УДК 539.3, 517.5
DOI: 10.31471/2304-7399-2024-19(73)-33-40

БІОРТОГОНАЛЬНІ СИСТЕМИ СТЕПЕНІВ КОНФОРМНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ

І. В. Андрусяк, О. Я. Бродяк
Національний університет "Львівська політехніка";
79016, м. Львів, вул. Митрополита Андрея 5;
e-mail: ivanna.v.andrusyak@lpnu.ua, oksana.y.brodiak@lpnu.ua

Раніше було розглянуто розклад аналітичних функцій у ряди, членами яких є поліноми такі, як поліноми Фабера, поліноми Бернуллі, поліноми Ейлера, а також було досліджено збіжність цих рядів шляхом застосування контурного інтегрування та конформних перетворень. У даній статті, застосовуючи можливості конформних відображень однозв'язних областей на круг, ми будуємо біортогональні системи функцій. Також ми дослідили умови розвинення аналітичних функцій в області, обмеженої ланцюговою лінією,в ряди, члени яких є степенями цих відображень.

Розглянуто приклади біортогональних систем, елементами яких є показникові функції. Побудовано також розв'язки крайових задач для рівняння Гельмгольца у випадку, коли граничні функції задаються рядами в термінах біортогональних систем функцій.

Ключові слова: *біортогональні системи функцій, конформні відображення, рівняння Гельмгольца.*

Системи аналітичних функцій, біортогональних на замкнутих кривих в однозв'язних областях комплексної площини, утворюють базиси у просторах функцій, аналітичних в цих областях [3].

У роботах Маркушевича А.І. [1] та Сухорольського М.А. [2, 3] розглянуто розклад аналітичних функцій у ряди, членами яких є поліноми такі, як поліноми Фабера, поліноми Бернуллі, поліноми Ейлера, також в цих роботах досліджено збіжність цих рядів шляхом застосування контурного інтегрування та конформних перетворень. Біортогональні системи функцій для побудови розв'язків крайових задач для рівняння Гельмгольца як на площині та в просторі були використані в роботах Сухорольського М.А. [5, 6].

У цій статті ми будуємо біортогональні системи функцій шляхом застосування конформних відображень однозв'язних областей на круг. Досліджено умови розвинення аналітичних функцій у заданих областях у ряди, членами яких є біортогональні системи аналітичних функцій. Також знайдено розв'язки крайових задач для рівняння Гельмгольца у вигляді рядів, члени яких побудовані за допомогою біортогональних систем функцій, аналітичних в області, обмеженої ланцюговою лінією.

Нехай
$$w = \phi(z) \tag{1}$$
– конформне відображення однозв'язної області D розширеної комплексної площини z на круг $K: |w| < 1$ комплексної площини w таке, що $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 1$ і нехай $z = h(w)$ – обернене відображення, при якому коло $C: |w| = 1$ відображається на межу області D, а саме $L = \partial D$.

Система функцій $\{w^n\}_{n=0}^{\infty}$ і спряжена (асоційована) до неї система $\{1/w^{m+1}\}_{m=0}^{\infty}$ – біортогональні на замкненому контурі,
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{w^n}{w^{m+1}} dw = \delta_{nm}, \tag{2}$$
де $C_r: |w| = r,\ 0 < r < 1,\ \delta_{nm} = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ 1, & n = m \end{cases}$ – символ Кронекера. При цьому система $\{w^n\}$ – базис у просторі функцій, аналітичних у крузі $K: |w| < 1$, а система $\{1/w^{m+1}\}$ – базис у просторі функцій, аналітичних зовні круга $\overline{K}: |w| \leq 1$.

Підставляючи вираз перетворення $w = \phi(z)$ в умову біортогональності (2), одержимо такі два співвідношення:
$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L_r} \phi^n(z) \frac{\phi'(z)}{\phi^{m+1}(z)} dz = \delta_{nm};\quad \frac{1}{2\pi i}\int_{L_r} \frac{d}{dz}\left(\frac{\phi^{n+1}(z)}{n+1}\right) \frac{1}{\phi^{m+1}(z)} dz = \delta_{nm}, \tag{3}$$
де $L_r \subset D$– прообраз кола C_r при відображенні (1).

Введемо системи функцій
$$\{g_n(z) = \phi^n(z)\}_{n=0}^{\infty}, \left\{g_n^*(z) = \frac{1}{n+1}\frac{d}{dz}\left(\phi^{n+1}(z)\right)\right\}_{n=0}^{\infty}, z \in D. \tag{4}$$

Функції $g_n(z)$ і $g_n^*(z)$ аналітичні в околі точки $z = 0$, оскільки функція $\phi(z)$ є аналітична в цьому околі, і її розвинення у ряд Лорана не містить головної частини (тобто без членів з від'ємними степенями змінної). Відповідно до (3), системи функцій $\{\omega_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$, $\{\omega_m^*(z)\}_{m=0}^{\infty}$ задаємо головними частинами рядів Лорана в околі нуля функцій $\phi'(z)\phi^{-(m+1)}(z) = \omega_m(z) + g_m(z)$, і $\phi^{-(m+1)}(z) = \omega_m^*(z) + g_m^*(z)$, де $g_m(z)$, $g_m^*(z)$ – правильні частини розвинень цих функцій (див. [2]).

Справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай* $w = \phi(z)$ *– конформне відображення (1) і* $|z| < l$ *– найбільший круг, в якому ряд Маклорена цієї функції збіжний і який лежить в області* D. *Тоді системи функцій (4) утворюють базиси простору* E_r*:* $0 < r < l$*, аналітичних функцій у крузі* $|z| < r$.

Доведення. Розглянемо функцію
$$\Phi(z) = \frac{1}{\phi(l/\xi)},$$
яка однолиста в області $|\xi| > l$ і задовольняє умови $\Phi(\infty) = \infty$, $\lim\limits_{z\to\infty} \Phi(z)/z = 1$. Нехай $\psi(\xi)$ – також однолиста функція в області $|\xi| > l$ і $\psi(\infty) = 1$. Тоді за теоремою 10 [1, ст. 616] система поліномів $\{p_n(\xi)\}_{n=0}^{\infty}$ є базисом в ширшому розумінні у просторі E_r, $r > l$, і є го-

ловними частинами рядів Лорана функцій $\frac{\Phi^n(\xi)\Phi'(\xi)}{\psi(\xi)}$ в околі нескінченно віддаленої точки. Спряженими до цих поліномів є функції $\widetilde{\omega}_m(\xi) = \frac{\psi(\xi)}{\Phi^{m+1}(\xi)}$, $m = 0,\ 1,\ \ldots$. Також, система функцій $\{\widetilde{\omega}_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$ – базис у просторі $\tilde{E}_\rho$ функцій, аналітичних в області $|z| > \rho,\ \rho \geq l$, і рівних нулеві у нескінченно віддаленій точці, а $\{p_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ – спряжена до неї система функцій.

Умова біортогональності наступна

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r'\geq r} p_n(\xi)\widetilde{\omega}_m(\xi)\, d\xi = \delta_{nm}.$$

Перетворимо цю умову з використанням відображення $\xi = l/z$, одержимо

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma^+} \widetilde{\omega}_m\left(\frac{l}{z}\right) p_n\left(\frac{l}{z}\right)\frac{l dz}{z^2} = \delta_{nm}, \tag{5}$$

де Γ^+: $|z| = l/z$ - коло, орієнтоване проти годинникової стрілки.

Система функцій $\left\{\frac{\widetilde{\omega}_m(l/z)}{z}\right\}$ – базис в просторі функцій, аналітичних в крузі $|z| < l$, і $\left\{\frac{l p_n(l/z)}{z}\right\}$ – спряжена до неї система многочленів за від'ємними степенями змінної,

$$\frac{\widetilde{\omega}_m(l/z)}{z} = \frac{\psi(l/z)}{z\Phi^{m+1}(l/z)} = \phi^m(z)\frac{\phi(z)\psi(l/z)}{z};$$

$$\frac{l p_n(l/z)}{z} = \Gamma\left[\frac{lF^n(l/z)}{z}\frac{F'(l/z)}{\psi(l/z)}\right] = \Gamma\left[\frac{\phi'(z)}{\phi^{n+1}(z)}\frac{z}{\phi(z)\psi(l/z)}\right], \tag{6}$$

де $\Phi'(\xi) = \Phi'(l/z) = \frac{z^2\phi'(z)}{l\phi^2(z)}$; $\Gamma[g(z)]$ – головна частина ряду Лорана функції $g(z)$ в околі нуля.

Покладемо $\psi(l/z) = \frac{z}{\phi(z)}$ і $\psi(l/z) = \frac{z\phi'(z)}{\phi(z)}$, тоді з (5) отримаємо умови біортогональності для систем функцій (4) і відповідні до них спряжені системи функцій:

$$\omega_n(z) = \frac{l p_n(l/z)}{z} = \Gamma\left[\frac{\phi'(z)}{\phi^{n+1}(z)}\frac{z}{\phi(z)\psi(l/z)}\right] = \Gamma\left[\frac{\phi'(z)}{\phi^{n+1}(z)}\right];$$

$$\omega_n^*(z) = \frac{l p_n(l/z)}{z} = \Gamma\left[\frac{\phi'(z)}{\phi^{n+1}(z)}\frac{z}{\phi(z)\psi(l/z)}\right] = \Gamma\left[\frac{1}{\phi^{n+1}(z)}\right]. \tag{7}$$

Отже, якщо функція $f(z)$ аналітична в крузі $|z| < l$, то вона розвивається в середині цього круга у рівномірно збіжні ряди за системами (4),

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, g_n(z),\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\, g_n{}^*(z),\ |z| \leq r < l, \tag{8}$$

де $a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r'\leq r} f(\xi)\omega_n(\xi)\, d\xi$; $b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=r'\leq r} f(\xi)\omega_n^*(\xi)\, d\xi$.

Теорема доведена.

Теорема 2. *Системи біортогональних функцій (4) є базисом у просторі функцій, аналітичних в області* D.

Доведення. Покажемо, що ряди (8) рівномірно збігаються в будь-якій області $\overline{D}' \subset D$, якщо функція $f(z)$ аналітична в області D. Оскільки (1) відображає область D на одиничний круг, то будь-яка точка

$z \in \overline{D}'$ лежить на лінії L_ρ, яка єпрообразом кола $|w| = \rho < 1$. Тоді маємо оцінки для функцій систем (4):

$$|g_n(z)| = |\phi(z)|^n = \rho^n,$$
$$|g_n^*(z)| = |\phi(z)|^n \left|\phi'(z)\right| \le A_\phi \rho^n, z \in L_\rho, \tag{9}$$

де $A_\phi = \max\limits_{z \in L_\rho} |\phi'(z)|$.

Нехай L_{ρ_0}– прообраз кола $|w| = \rho_0$, $\rho < \rho_0 < 1$, і $F = \max\limits_{z \in L_{\rho_0}} |f(z)|$, $A_\psi = \max\limits_{|w|=\rho_0} \left|h'(w)\right|$. Перетворимо вирази для коефіцієнтів рядів (7) з урахуванням того, що інтеграл по контуру L_{ρ_0} від аналітичної функції в області D дорівнює нулеві,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi| = L_{\rho_0}} f(\xi) \omega_n(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi| = L_{\rho_0}} \frac{f(\xi)\phi'(\xi) d\xi}{\phi^{n+1}(\xi)} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w| = \rho_0} \frac{f(h(w)) dw}{w^{n+1}},$$
$$b_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi| = L_{\rho_0}} f(\xi) \omega_n^*(\xi)\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi| = L_{\rho_0}} \frac{f(\xi) d\xi}{\phi^{n+1}(\xi)} =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{|w| = \rho_0} \frac{f(h(w)) h'(w) dw}{w^{n+1}},$$

і знайдемо оцінки:

$$|a_n| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|w| = \rho_0} \frac{|f(h(w))||dw|}{|w|^{n+1}} \le \frac{F}{\rho_0^n};$$
$$|b_n| \le \frac{1}{2\pi} \int_{|w| = \rho_0} \frac{|f(h(w))|\left|h'(w)\right||dw|}{|w|^{n+1}} \le \frac{F A_\psi}{\rho_0^n}. \tag{10}$$

Оцінивши суми рядів (8) з урахуванням оцінок (9), (10) і нерівності $\rho < \rho_0$, переконуємося у рівномірній їх збіжності в області $\overline{D}' \subset D$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||g_n(z)| \le F \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n = \frac{F\rho_0}{\rho_0 - \rho},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} |b_n||g_n^*(z)| \le F A_\psi \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^n = \frac{F A_\psi \rho_0}{\rho_0 - \rho},$$

і, відповідно, аналітичності сум рядів у цій області. Оскільки круг $|z| < l$ належить області D, то суми рядів (8) визначають аналітичну функцію $f(z)$ в цій області.

Розглянемо приклади систем функцій, які побудовано з використанням експоненціальної функції.

Базис у просторі функцій, аналітичних в області, обмеженої ланцюговою лінією. Нехай D – область, обмежена ланцюговою лінією (внутрішність кривої). Конформне відображення області D на одиничний круг K і обернене до нього відображення задаються функціями

$$w = \phi(z) \equiv \frac{e^z - 1}{e^z}, \quad z = h(z) \equiv \ln \frac{1}{1 - w}. \tag{11}$$

Крива L: $z = \ln \frac{1}{2\sin(\theta/2)} + i\frac{\pi - \theta}{2}$, $0 \le \theta < 2\pi$, яка є границею області D відображається в коло C: $|w| = 1$. Приймаючи $z = x + iy$ і виключивши параметр θ, одержимо рівняння кривої Lу вигляді $x = -\ln(2\cos y)$.

Розглянемо систему функцій

$$\left\{g_n(z)=\left(\frac{e^z-1}{e^z}\right)^n\right\}_{n=0}^{\infty},\ z\in D, \tag{12}$$

і побудуємо спряжену до неї систему $\{\omega_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$.

Спочатку, знайдемо розвинення функцій $g_n(z)$ в ряд Маклорена:

$$g_n(z)=(1-e^{-z})^n=\sum_{l=0}^{n}C_n^l(-1)^l e^{-zl}=$$

$$=\sum_{l=0}^{n}(-1)^l C_n^l\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^k l^k}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l+k}C_n^l\frac{l^k}{k!}z^k \tag{13}$$

Ввівши позначення, $P_n^{(k)}=\sum_{l=0}^{n}(-1)^{l+k}C_n^l\frac{l^k}{k!}$, одержимо

$$g_n(z)=\sum_{k=0}^{\infty}P_n^{(k)}z^k,\ |z|<\ln 2.$$

Знайдемо ряд Лорана в околі нуля для функції $\phi^{-m}(z)=\left(\frac{e^z}{e^z-1}\right)^m$. Використовуючи формулу [4, ст. 938]:

$$\frac{t^n e^{xt}}{(e^t-1)^n}=\sum_{k=0}^{\infty}B_k^{(n)}(x)\frac{t^k}{k!},$$

де $B_k^{(n)}(x)=\sum_{l=0}^{k}C_k^l B_l^{(n)}x^{k-l}$ – многочлени Бернуллі n-го порядку, степеня k, $B_k^{(n)}(0)=B_l^{(n)}$ – числа Бернуллі, отримаємо

$$\phi^{-m}(z)=\left(\frac{e^z}{e^z-1}\right)^m=\frac{1}{z^m}e^{\frac{mz}{2}}\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k}^{(m)}\left(\frac{m}{2}\right)\frac{z^{2k}}{(2k)!}=$$

$$=\frac{1}{z^m}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(mz)^l}{2^l l!}\sum_{k=0}^{\infty}B_{2k}^{(m)}\left(\frac{m}{2}\right)\frac{z^{2k}}{(2k)!}=\cdots=\frac{1}{z^m}\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{m^l}{2^l}B_{2k}^{(m)}\left(\frac{m}{2}\right)\frac{z^{2k+l}}{l!(2k)!}=$$

$$=\frac{1}{z^m}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=k}^{\infty}\frac{m^{l-2k}}{2^{l-2k}}B_{2k}^{(m)}\left(\frac{m}{2}\right)\frac{z^l}{(l-2k)!(2k)!}.$$

Ввівши позначення $G_l^{(m)}=\frac{1}{l!}\sum_{k=0}^{l}\left(\frac{m}{2}\right)^{l-2k}C_l^{2k}B_{2k}^{(m)}\left(\frac{m}{2}\right)$, отримаємо

$$\phi^{-m}(z)=\sum_{l=0}^{\infty}G_l^{(m)}\frac{1}{z^{m-l}}.$$

Звідси знайдемо головну частину ряду Лорана функції $\phi^{-m}(z)$ в околі нуля:

$$F_m(z)=\sum_{l=0}^{m-1}G_l^{(m)}\frac{1}{z^{m-l}}.$$

Далі знайдемо головну частину ряду Лорана функції $\frac{-1}{m}\frac{d}{dz}\phi^{-m}(z)=\phi^{-(m+1)}(z)\phi'(z)$, $m\geq 1$, яка задає загальний член відповідної системи асоційованих функцій,

$$\omega_m(z)=\frac{-1}{m}\frac{d}{dz}F_m(z)=\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(m-l)}{m}G_l^{(m)}\frac{1}{z^{m-l+1}}.$$

У випадку $m=0$, $\phi^{-1}(z)\phi'(z)=(e^z-1)^{-1}$ для функцій системи $\{\omega_m(z)\}_{m=0}^{\infty}$ одержимо наступні формули

$$\omega_0(z)=\frac{1}{z};\ \omega_m(z)=\sum_{l=0}^{m-1}\frac{(m-l)}{m}G_l^{(m)}\frac{1}{z^{m-l+1}},\ m\geq 1. \tag{14}$$

Приклад 1. Зі співвідношень (13) і (14), враховуючи, що $\omega_m(z)=\frac{-1}{m}\frac{d}{dz}F_m(z)$, випишемо розвинення чотирьох перших функцій цих систем:

$$g_0(z)=1;\ g_1(z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{6}-\frac{z^4}{24}+\cdots;$$

$$g_2(z) = z^2 - z^3 + \frac{7}{12}z^4 + \cdots;$$

$$g_3(z) = z^3 - \frac{3}{2}z^4 + \frac{5}{4}z^5 + \cdots;$$

$$\omega_0(z) = \frac{1}{z};\ \omega_1(z) = \frac{1}{z^2};\ \omega_2(z) = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z^2};\quad \omega_3(z) = \frac{1}{3}\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4}.$$

За теоремою 1 система функцій $g_n(z)$ є базисом простору аналітичних у крузі функцій $|z| < \ln 2$, і, за теоремою 2, система функцій (12) є базисом простору аналітичних у D функцій. З другого співвідношення в (3) отримуємо системи функцій, аналогічні до

$$\left\{g_n^*(z) = \frac{d}{dz}\frac{\phi^{n+1}(z)}{n+1}\right\}_{n=0}^{\infty};\ \{\omega_m^*(z) = F_{m+1}(z)\}_{m=0}^{\infty}, z \in D.$$

Побудова розв'язку задачі Діріхле для рівняння Гельмгольца. Нехай $w = \phi(z)$ – конформне відображення (1). Запишемо рівняння Гельмгольца з використанням змінних $w,\ \overline{w}$,

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial w \partial \overline{w}} + kU = 0, \tag{15}$$

де $k = const,$ і $U = U(w, \overline{w})$ – дійснозначна функція.

Множину розв'язків цього рівняння у крузі можна записати у вигляді (див. [4, 5])

$$U = Re \sum_{m=0}^{\infty} c_m w^m J_m^*(w\overline{w}), \tag{16}$$

де $J_m^*(w\overline{w}) = J_m^*(|w|^2) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n k^n |w|^{2n}}{2^{2n+m}(n+m)!n!}$, і c_m – довільні сталі. Функції $J_m^*(w\bar{w})$, якщо $k > 0$, безпосередньо виражаються через функції Бесселя m-го порядку: $J_m\left(\sqrt{k}|w|\right) = \left(\sqrt{k}|w|\right)^m J_m^*(|w|^2)$.

Перейдемо до нових змінних $z = h(w)$, $\bar{z} = \overline{h}(w)$. Оскільки $\phi'(z) \neq 0$, $z \in D$, одержимо наступне рівняння

$$4\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial \bar{z}} + k\phi'(z)\overline{\phi'(z)}U = 0.$$

Множину розв'язків цього рівняння одержимо з (16) заміною змінних $w = \phi(z)$, $\overline{w} = \overline{\phi(z)}$,

$$U(z, \bar{z}) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m\, \phi^m(z) J_m^*\left(\phi(z)\overline{\phi(z)}\right).$$

Розв'язок для круга. Запишемо розв'язок рівняння (15) в крузі K: $|w| < 1$ за умови

$$U(w, \overline{w})|_K = f(t), t \in C, \tag{17}$$

де $f(t)$ - функція, що розвивається у рівномірно збіжний ряд,

$$f(t) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m t^m. \tag{18}$$

Зауважимо, що якщо ряд за системою функцій, аналітичних в закритій області $\bar{G}$, рівномірно збігається на межі $L = \partial G$, то він рівномірно збігається в $\bar{G}$, а його сума неперервна на L і аналітична в G функція [7, ст. 192]. Однією з достатніх умов рівномірної збіжності ряду функції $g(t)$ на L за системою функцій, аналітичних в області $\bar{G}$, є її приналежність класу неперервних функцій Гельдера [7, ст. 275].

Отже, з рівномірної збіжності ряду (18) випливає рівномірна збіжність цього ряду в $\overline{K}$, аналітичність функції $f(z)$ в K і неперервність цієї функції на C.

Підставляючи вираз (18) в умову (17) з урахуванням зображення (16) і рівності $w\overline{w} = 1$, $w \in C$, отримаємо

$$\sum_{m=0}^{\infty} c_m e^{im\psi} J_m^*(1) = \sum_{m=0}^{\infty} d_m e^{im\psi}.$$

Звідси знайдемо коефіцієнти $c_m = d_m / J_m^*(1)$ і запишемо розв'язок задачі

$$U(w, \overline{w}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d_m}{J_m^*(1)} w^m J_m^*(w\overline{w}).$$

Отже, розв'язок задачі задається у вигляді ряду за системою функцій $\{w^m J_m^*(w\overline{w})\}$. При цьому, внаслідок обмеженості функції $J_m^*(|w|^2)$ і рівномірної збіжності ряду (18) в $\overline{K}$, одержаний ряд збігається також рівномірно в $\overline{K}$.

Висновки. У роботі, застосовуючи конформні відображення $w = \phi(z)$ однозв'язних областей на одиничний круг, такі, що $\phi(0) = 0$, $\phi'(0) = 1$, будуємо базиси для просторів аналітичних функцій і знаходимо відповідні розв'язки крайових задач для рівняння Гельмгольца. Такий підхід можна поширити на випадок відображень, що задовольняють умови $\phi(z_0) = 0$, $\phi'(z_0) = 1$. У цьому випадку необхідно використовувати розклади відповідних функцій у ряди Маклорена та Лорана в околі z_0.

Подібні базиси для аналітичних функцій можуть бути використані для побудови розв'язків крайових задач для рівняння Гельмгольца.

Література

1. Маркушевич А.И. Теория аналитических функций. Том 2. – М.: Наука, 1968. – 624 с.
2. Сухорольський М.А. Розвинення аналітичних функцій за системою многочленів типу Мелліна. // Вісник НУ "ЛП". Серія фізико-математичні науки. – 2005. –№. 346. – С. 111-115.
3. Сухорольський М.А. Розклад функцій у систему поліномів, біортогональних на замкнутому контурі, із системою функцій, регулярних у нескінченно віддаленій точці. // Укр мат. J –2010 – 62 , 268-288. https://doi.org/10.1007/s11253-010-0350-6.
4. Polyanin A.D, Manzhirov A.V., Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists, New York, Chapman & Hall/CRC Taylor& Francis Group , 2007.
5. M.A. Sukhorolsky. Analytical solutions to Helmholtz equation, Mathematical problems of mechanics of inhomogeneous structures (Ed. by Lukovskiy I., Kit J., Kushnir R., Lviv: IAPMM of NAS of Ukraine), 2014. P. 160-163.

6. M.A. Sukhorolsky, V.V. Dostoyna. One class of biorthogonal systems of functions that arise in the solution of the Helmholtzz equation in the cylindrical coordinate system, J. Math. Sci., 192(5), 2013. P. 541-554.
7. M.A. Lavrentyev, B.V. Shabat. Methods of the theory of functions of a complex variable, M.: Nauka, 1987.

Стаття надійшла до редакційної колегії 03.10.2024 р.

BIORTHOGONAL SYSTEMS OF POWERS OF CONFORMAL MAPPINGS

I. V. Andrusiak, O. Ya. Brodyak
Lviv Polytechnic National University; 79016, Lviv, 5 Metropolyta Andreia St.; e-mail: ivanna.v.andrusyak@lpnu.ua, oksana.y.brodiak@lpnu.ua

Applying the capabilities of conformal mappings of singly connected regions to the disk, we construct biorthogonal systems of functions. The conditions for the decomposition of analytic functions in the area bounded by a chain line into series whose members are powers of these mappings have been studied.

Examples of biorthogonal systems whose elements are indicator functions are considered. The solutions of the boundary value problems for the Helmholtz equation in the case, when the boundary functions are given by series in terms of biorthogonal systems of functions, are also constructed.

Keywords: *biorthogonal systems of functions, conformal mappings, Helmholtz equations.*