Теорія ймовірностей та математична статистика

УДК 519.218. 24
DOI: 10.31471/2304-7399-2024-19(73)-74-85

ПРО ПЕРЕХІДНІ ЯВИЩА ДЛЯ ПОВНОЇ КІЛЬКОСТІ ЧАСТИНОК В ГІЛЛЯСТИХ ПРОЦЕСАХ З ІММІГРАЦІЄЮ

Т. Б. Лисецький
Львівський національний університет імені Івана Франка;
79000, м. Львів, вул. Університетська 1;
e-mail: taraslysetskiyy@gmail.com

Ми розглядаємо близькі до критичних гіллясті процеси зі скінченною кількістю типів частинок та перетвореннями, що залежать від віку частинок та імміграцією. Відомо, що у критичних процесах, загальна кількість частинок в процесі, які існували до моменту t, розділена на t^2 збігається до нескінченно подільного розподілу, перетворення Лапласа якого є явно заданим. У статті одержано граничні розподіли для ширшого класу процесів, які прямують до критичного при $t \to \infty$.

Ключові слова: *гіллясті процеси, рівняння відновлення, близькі до критичних процеси, імміграція.*

1. Вступ.

В даній статті ми будемо розглядати близькі до критичних гіллясті процеси зі скінченною кількістю типів частинок та перетвореннями, залежними від віку частинок, в яких присутня імміграція.

Опис процесу можна знайти в [4]. Побудову ймовірнісного простору можна знайти в [1], розділ VI. Тут ми надамо короткий опис розглядуваного процесу.

Спочатку опишемо процеси без імміграції. В процесі беруть участь d типів частинок $T_1, T_2, \dots, T_d$. Кожна частинка типу T_i еволюціонує незалежно від інших частинок, живе деякий випадковий час τ_i і в момент τ_i перетворюється випадковим чином в сукупність $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$ частинок типів $T_1, T_2, \dots, T_d$, де α_j позначає кількість частинок типу T_j($\mathbb{Z}_+^d$ позначає множину d-вимірних векторів з невід'ємними цілочисельними координатами).

Нехай $G^i(t)$ – функція розподілу часу життя частинок типу T_i , $i \in \{1, \dots, d\}$. Умовну ймовірність перетворення частинки типу T_i (при умові, що перетворення цієї частинки відбулось і її вік в цей момент дорівнював u) в α частинок відповідних типів позначимо через $p_\alpha^i(u)$.

Вектором $Z_i(t) = \left(Z_{i,1}(t), \dots, Z_{i,d}(t)\right)$ позначено кількість частинок типів $T_1, T_2, \dots, T_d$, що існують у процесі в момент t, при умові що в початковий момент часу була одна частинка типу T_i, а вектором $Y_i(t) = \left(Y_{i,1}(t), \dots, Y_{i,d}(t)\right)$ – кількість частинок типів $T_1, T_2, \dots, T_d$, які існували до моменту t (включно з тими, що існують в момент t) при тій же умові.

Нехай $s = (s_1, \dots, s_d), z = (z_1, \dots, z_d)$. Позначимо через s^z добуток $s^z = s_1^{z_1} \cdots s_d^{z_d}$. Введемо твірні функції

$$h^i(u, s) = \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d} p_\alpha^i(u) s^\alpha, \ F^i(t, s) = E\left(s^{Y_i(t)}\right),$$

$$h(u, s) = \left(h^1(u, s), \dots, h^d(u, s)\right), F \quad (t, s) = \left(F^1(t, s), \dots, F^d(t, s)\right).$$

Вважатимемо, що ці твірні функції визначені принаймні на

$$D = \left\{|s_i| \le 1, i \in \{1, \dots, d\}\right\}.$$

Покладемо

$$a_j^i(u) = \frac{\partial h^i(u,s)}{\partial s_j}\Big|_{S = \mathbf{1}}, A_j^i = \int_0^{+\infty} a_j^i(u)\, dG^i(u),$$

$$b_{jk}^i(u) = \frac{\partial h^i(u,s)}{\partial s_j \partial s_k}\Big|_{S = \mathbf{1}}, B_{jk}^i = \int_0^{+\infty} b_{jk}^i(u)\, dG^i(u),$$

де $\mathbf{1}$ (тут і надалі) – вектор довжини d, в якому всі елементи рівні одиниці.

Процес називається докритичним, якщо перонів корінь ρ матриці $A = \left\|A_j^i\right\|_{i,j \in \{1,\dots,d\}}$ менший одиниці, критичним, якщо рівний одиниці, та надкритичним, якщо більший одиниці. Позначимо через $u = (u_1, \dots, u_d)$ та $v = (v_1, \dots, v_d)$ правий та лівий додатні власні вектори цієї матриці, для яких виконується $(u, v) = (u, \mathbf{1}) = 1$ (такі вектори завжди існують за теоремою Фробеніуса [4, ст. 130], бо елементи матриці A додатні).

Також введемо наступні позначення:

$$B \equiv B(h, G) = \sum_{l,k,m=1}^d B_{mk}^l v_l u_k u_m, M_a^{kl} = \int_0^{+\infty} a_l^k(u) u\, dG^k(u),$$

$$M_a = \sum_{l,k=1}^d M_a^{kl} v_k u_l.$$

Імміграцію найпростіше визначати шляхом введення додаткового типу частинок T_0. Вважатимемо, що в початковий момент часу в процесі є одна частинка типу T_0. В кінці життя частинка типу T_0 з ймовірністю $p_\alpha^0(u)$ (при умові, що перетворення відбулось в момент u) перетворюється в одну частинку свого ж типу та сукупність частинок типів

$T_1, T_2, \dots, T_d, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}_+^d$. Частинки типів $T_1, T_2, \dots, T_d$ еволюціонують так як і в процесі без імміграції.

Вектор $Y^0(t) = \left(Y_1^0(t), \dots, Y_d^0(t)\right)$ характеризує повну кількість частинок типів $T_1, T_2, \dots, T_d$, які існували в процесі з імміграцією до моменту t (при умові що в початковий момент часу була одна частинка типу T_0).

Введемо твірні функції $h^0(u,s) = \sum_\alpha p_\alpha^0(u) s^\alpha$ та $f(t,s) = E\left(s^{Y^0(t)}\right)$.

Також введемо наступні позначення

$$a_j^0(u) = \frac{\partial h^0(u,s)}{\partial s_j}\bigg|_{s\,=\,\mathbf{1}}, A_j^0 = \int_0^{+\infty} a_j^0(u)\, dG^0(u),$$

$$M_0 \equiv M_0(G^0) = \int_0^{+\infty} u\, dG^0(u),\ \ A^0 \equiv A^0(h^0, G^0) = \sum_{j=1}^d A_j^0 u_j.$$

Відомо (див. [2],[3]), що при скінченних A^0, M_0, M_a^{lk}, M_a, для критичного процесу справедлива наступна слабка збіжність

$$E\left(\exp\left\{-\sum_{j=1}^d \frac{\beta_j Y_j^0(t)}{v_j t^2}\right\}\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \left(ch\sqrt{\frac{B\sum_{j=1}^d \beta_j}{2M_a}}\right)^{-\frac{2A^0 M_a}{BM_0}}, \beta_j \geq 0.$$

Нашою метою є знаходження границі $E\left(\exp\left\{-\sum_{j=1}^d \frac{\beta_j Y_j^0(t)}{v_j t^2}\right\}\right)$ при $\rho \to 1$ та $t \to +\infty$. Для процесів $Z_i(t)$ подібний результат встановлено в [6].

Передусім сформулюємо теорему відновлення, яку ми будемо використовувати.

Нехай $M_n(dx) = \left\|M_{ij}^n(dx)\right\|_{i,j\in\{1,\dots,d\}}$, $n \in \mathbb{N}$ є послідовністю $d \times d$ матриць, елементами якої є скінченні невід'ємні міри на $[0,+\infty)$. Через $H_n(x)$ позначимо матрицю відновлення, яка відповідає $M_n(dx)$, тобто

$$H_n(x) = \sum_{l=0}^{+\infty} M_n^{*l}(x), x \geq 0, \text{де } M_n^{*0}(x) = I,$$

$$M_n^{*l+1}(x) = \int_0^x M_n^{*l}(x-u) M_n\,(du).$$

Припускатимемо що послідовність $M_n(dx)$ слабко збігається до $M(dx)$, причому матриця $M = M[0,+\infty)$ нерозкладна і її перонів корінь рівний одиниці. Нехай ρ_n – перонів корінь матриці $M_n[0,+\infty)$, а u_n та v_n її власні правий та лівий вектори відповідно. Тоді можна вважати що $\rho_n \to 1, u_n \to u, v_n \to v$, де u та v правий та лівий власні вектори матриці M.

Нехай

$$a_n = \left(v_n, \int_0^{+\infty} x M_n(dx)\, u_n \right), a = \left(v, \int_0^{+\infty} x M(dx)\, u \right).$$

Теорема 1 (Шуренков, [5]). *Нехай послідовність борелевих функцій* $g^n(x), n \in \mathbb{N}$ *така, що для деякого* $\gamma \geq 0$ *виконується*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sup_{x>0} \frac{g_n(x)}{\max\{1, x^\gamma\}} < \infty$$

і $\frac{g_n(x)}{x^\gamma} \to f(z), x(\rho_n - 1) \to z$ *при* $x \to +\infty, n \to +\infty.$

Тоді, якщо

$$\lim_{t\to+\infty} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_t^{+\infty} u M_{ij}^n(du) < +\infty, i, j \in \{1, \dots, d\},$$

то

$$\frac{1}{x^{1+\gamma}} \int_0^x g_n(x-y) dH_n(y) \to$$

$$\frac{1}{a} \int_0^1 f(c(1-y))(1-y)^\gamma e^{yc/a} dy \, \|u_i v_j\|_{i,j\in\{1,\dots,d\}},$$

$x(\rho_n - 1) \to c$, *при* $x \to +\infty, n \to +\infty$.

2. Гранична теорема для процесів з імміграцією.

Через $G(x, z, \lambda)$ позначимо твірну функцію, яка задається наступним чином

$$G(x, z, \lambda) = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \varphi_k(x, z) \frac{\lambda^k}{k!}, \tag{1}$$

$$\varphi_k(x, z) = \frac{A^0}{2kM_0} \sum_{r=0}^{k-1} C_k^r \left(\frac{B}{2}\right)^{k-r-1} \frac{\left(\sum_{j=1}^d x_j\right)^{k-r}}{(M_a)^{2k-2r}} \int_0^1 \varphi_r\big(x, z(1-y)\big)$$

$$\psi_{k-r}\big(z(1-y)\big)(1-y)^\gamma e^{zy} dy, k \geq 1,$$

$$\psi_1(z) = \frac{e^z - 1}{z},$$

$$\psi_k(z) = \sum_{r=1}^{k-1} C_k^r \int_0^1 \psi_{k-r}\big(z(1-y)\big)\psi_r\big(z(1-y)\big)(1-y)^\gamma e^{zy} dy, k \geq 2,$$

$$x = (x_1, \dots, x_d) > 0, \lambda \leq 0.$$

Теорема 2. *Якщо* $\overline{\lim}_{\substack{\rho\to1\\ t\to+\infty}} t|\rho - 1| < +\infty$

$$0 < \underline{\lim}_{\rho\to1} B(h, G) \leq \overline{\lim}_{\rho\to1} B(h, G) < +\infty, \tag{2}$$

$$\overline{\lim}_{\rho\to1} \max_{i,j} \int_y^{+\infty} u a_j^i(u) dG^i(u) \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0, \tag{3}$$

$$\overline{\lim}_{\rho\to1} \int_y^{+\infty} u dG^0(u) \xrightarrow[y\to+\infty]{} 0, \tag{4}$$

$$0 < \underline{\lim}_{\rho\to1}\big(M_0(G^0) + A^0(h^0, G^0)\big)$$

$$\leq \overline{\lim}_{\rho\to1}\big(M_0(G^0) + A^0(h^0, G^0)\big) < +\infty, \tag{5}$$

всі граничні для А матриці нерозкладні, тоді для кожної часткової границі $\lim_{\substack{\rho\to 1\\ t\to+\infty}} t|\rho-1|=\omega$

$$E\left(\exp\left\{-\sum_{j=1}^{d}\frac{\beta_j Y_j^0(t)}{v_j t^2}\right\}\right)\xrightarrow[\substack{t\to+\infty\\ \rho\to 1}]{} G(x,w,\lambda),$$

де $w=\frac{\omega}{M_a}$, $\beta_j\geq 0$; β_j зображено як $\beta_j=-\lambda x_j,\lambda\leq 0,x_j>0$, $j\in\{1,\dots,d\}$.

Доведення. Будемо вважати, що перонів корінь ρ матриці A залежить від натурального параметра n і $\rho_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$. Усі перелічені характеристики таких випадкових процесів будемо позначати індексом n, тобто

$$\rho=\rho_n, A=A_n, u=u_n=(u_{n,1},\dots,u_{n,d}), v=v_n=(v_{n,1},\dots,v_{n,d}),$$
$$h(u,s)=h^n(u,s)=\left(h^{n,1}(u,s),\dots,h^{n,d}(u,s)\right),$$
$$F\ \ (t,s)=F^n\ \ (t,s)=\left(F^{n,1}(t,s),\dots,F^{n,d}(t,s)\right),$$
$$a_j^i(u)=a_j^{n,i}(u), b_{jk}^i(u)=b_{jk}^{n,i}(u), B_{jk}^i=B_{jk}^{n,i}, B=B_n,$$
$$M_a^{kl}=M_{n,a}^{kl}, M_a=M_{n,a}, Y_j^0(t)=Y_{n,j}^0(t).$$

Характеристики імміграційної компоненти також будемо індексувати: $f(t,s)=f^n(t,s), h^0(u,s)=h^{n,0}(u,s), a_j^0=a_j^{n,0}, M_0=M_{n,0}, A^0=A^{n,0}$.

Припускатимемо, що всі перелічені величини збігаються до границь, які відповідають критичному процесу (умови (2)-(5) гарантують існування часткових границь).

Оскільки $v_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}v$ та $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}u$ та усі координати векторів v_n,u_n,v,u додатні (за умовами теореми), то без зменшення загальності, можна вважати, що існують додатні константи D_1та D_2, такі що $D_1\leq v_n,u_n,v,u\leq D_2$.

В цих припущеннях достатньо показати, що

$$E\left(\exp\left\{-\sum_{j=1}^{d}\frac{\beta_j Y_{n,j}^0(t)}{v_{n,j}t^2}\right\}\right)\to G(x,w,\lambda),$$

$\frac{t|\rho_n-1|}{M_{n,a}}\to w$ при $t\to+\infty, n\to+\infty$.

Представимо вектор $-\beta=-(\beta_1,\dots,\beta_d)$ у вигляді $-\beta=\lambda(x_1,\dots,x_d)$ де $\lambda\leq 0, x_i\geq 0, i\in\{1,\dots,d\}$.

Відомо ([2],[3]), що компоненти вектора $F^n(t,\lambda)=F^n\left(t,e^{\frac{\lambda x}{v_n}}\right)=\left(F^{n,1}(t,\lambda),\dots,F^{n,d}(t,\lambda)\right)$, де $\frac{\lambda x}{v_n}=\frac{\lambda x_1}{v_{n,1}}+\dots+\frac{\lambda x_d}{v_{n,d}}$, задовольняють рівняння

$$F^{n,i}(t,s)=e^{\frac{\lambda x_i}{v_{n,i}}}\left(\left(1-G^{n,i}(t)\right)+\int_0^t h^{n,i}\left(u,F^n(t-u,s)\right)dG^{n,i}(u)\right)\quad(6)$$

За теоремою 1 з [4, ст. 112], функції $h^i(u,y)$ можна представити як

$$1+\sum_{j=1}^{d} a_j^{n,i}(u)\left(y_j-1\right)+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{d} b_{jk}^{n,i}(u)\left(y_j-1\right)(y_k-1)$$
$$-\sum_{j,k=1}^{d} \varepsilon_{jk}^{n,i}(u,y)\left(y_j-1\right)(y_k-1), \tag{7}$$
де $0 \le \varepsilon_{jk}^{n,i}(u,y) \le b_{jk}^{n,i}(u)$ і $\lim\limits_{y\to 1}\varepsilon_{jk}^{n,i}(u,y)=0$.

Розглянемо вектор $F_0^n\ (t,\lambda)=\left(F_0^{n,1}(t,\lambda),\dots,F_0^{n,d}(t,\lambda)\right)$, де компоненти $F_0^{n,i}(t,\lambda)$ є розв'язками системи інтегральних рівнянь
$$F_0^{n,i}(t,\lambda)=\frac{\lambda x_i}{v_{n,i}}+\sum_{j=1}^{d}\int_0^t F_0^{n,j}(t-u,\lambda)a_j^{n,i}(u)dG^{n,i}(u)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{d}\int_0^t F_0^{n,j}(t-u,\lambda)F_0^{n,l}(t-u,\lambda)b_{jl}^{n,i}(u)dG^{n,i}(u). \tag{8}$$
Шукатимемо розв'язки цих рівнянь у вигляді
$$F_0^{n,i}(t,\lambda)=\sum_{k=1}^{+\infty}\psi_k^{n,i}(t)\frac{\lambda^k}{k!}. \tag{9}$$

Якщо такі розв'язки існують, то функції $\psi_k^i(t)$ задовольняють наступні рекурентні співвідношення
$$\psi_1^{n,i}(t)=\frac{x_i}{v_{n,i}}+\sum_{j=1}^{d}\int_0^t \psi_1^{n,j}(t-u)a_j^{n,i}(u)dG^{n,i}(u),$$
$$\psi_k^{n,i}(t)=\sum_{j=1}^{d}\int_0^t \psi_k^{n,j}(t-u)a_j^{n,i}(u)dG^{n,i}(u)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k-1}C_k^r\sum_{j,l=1}^{d}\int_0^t \psi_r^{n,j}(t-u)\psi_{k-r}^{n,l}(t-u)b_{jl}^{n,i}(u)dG^{n,i}(u)\,,k\ge 2. \tag{10}$$

Використовуючи теорему 1 з $\gamma=0$ встановлюємо, що
$$\lim_{t,n\to+\infty}\frac{\psi_1^{n,i}(t)}{t}=u_i\frac{\sum_{j=1}^{d}x_j}{M_a}\psi_1(w), \tag{11}$$
де $\psi_1(w)=\frac{e^w-1}{w}$, $M_a=\lim_{n\to+\infty}M_{n,a}$.

Тому можна стверджувати, що (див. обгрунтування аналогічних оцінок в ([6], ст. 230)
$$0<c_0t\le\psi_1^{n,i}(t)\le ct, c_0, c>0. \tag{12}$$

Зауважимо що границя $\lim\limits_{n,t\to+\infty}\frac{\sum_{j=1}^{d}H_{j,n}^i(t)}{t}$ існує завдяки теоремі 1 (з $\gamma=0$ та $g_n(x)\equiv 1$). Без зменшення загальності вважатимемо, що
$$\lim_{n,t\to+\infty}\frac{\sum_{j=1}^{d}H_{j,n}^i(t)}{t}\le c,\ \ i\in\{1,\dots,d\}, \max_l\sum_{k,m=1}^{d}B_{mk}^l\le c. \tag{13}$$
По індукції, аналогічно до [3, ст. 37], можна показати що, якщо виконується (13), то
$$\psi_k^{n,i}(t)\le c_kc^{2k-2}t^{2k-1}, k\ge 1, i\in\{1,\dots,d\}, \tag{14}$$
де
$$c_1=c, c_k=\sum_{r=1}^{k-1}C_k^r\,c_rc_{k-r}, k\ge 2. \tag{15}$$

Запишемо рівність
$$\sum_{k=1}^{+\infty}c_k\frac{\lambda^k}{k!}=\frac{1-\sqrt{1-4c\lambda}}{2}, \tag{16}$$
де $|\lambda|\le\frac{1}{4c}$, а c_k визначені в (15). Правильність цієї рівності можна встановити, розклавши її праву частину в ряд Маклорена.

З (14) і (16) отримуємо абсолютну збіжність ряду (9) при $0<\lambda\leq\frac{1}{4c^3\max\{1,t^2\}}$.

Нерівності

$$\frac{1-\sqrt{1-4cy}}{2}\leq 2c\lambda$$

та

$$0\leq\frac{1-\sqrt{1-4cy}}{2}-c\lambda\leq 4c^2y^2$$

при $c>0, 0\leq y\leq\frac{1}{4c}$ дозволяють стверджувати, що

$$\left|F_0^{n,i}(t,\lambda)\right|\leq 2c|\lambda|,$$
$$\left|F_0^{n,i}(t,\lambda)-\psi_1^{n,i}(t)\lambda\right|\leq 4c^4|\lambda|^2\max\{1,t^2\}$$

при $|\lambda|\leq\frac{1}{4c^3\max\{1,t^2\}}$.

Ці нерівності, а також (12) дозволяють стверджувати, що

$$-\min\{1,2c|\lambda|\}\leq F_0^i(t,\lambda)\leq 0 \qquad (17)$$

при $\frac{-c_0}{5c^4\max\{1,t^2\}}\leq\lambda\leq 0$.

Домноживши (10) на $\frac{\lambda^k}{k!}$ і підсумовуючи по k переконуємось, що (9) є розв'язком (8).

Покажемо, що

$$\lim_{t,n\to+\infty}\frac{\psi_k^{n,i}(t)}{t^{2k-1}}=u_i\left(\frac{B}{2}\right)^{k-1}\frac{\left(\sum_{j=1}^d x_j\right)^k}{(M_a)^{2k-1}}\psi_k(w), k\geq 2, \qquad (18)$$

де $\psi_k(w)=\sum_{r=1}^{k-1}C_k^r\int_0^1\psi_{k-r}\big(w(1-y)\big)\psi_r\big(w(1-y)\big)(1-y)^\gamma e^{yw}dy$.

Для $k=2$ маємо

$$\psi_2^{n,i}(t)=\sum_{j=1}^d\int_0^t\psi_2^{n,j}(t-u)a_j^{n,i}(u)dG^{n,i}(u)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^d\int_0^t\psi_1^{n,j}(t-u)\psi_1^{n,l}(t-u)b_{jl}^{n,i}(u)dG^{n,i}(u).$$

Враховуючи (11) і використовуючи теорему 1 з $\gamma=2$, отримуємо, що

$$\lim_{t,n\to+\infty}\frac{\psi_2^{n,i}(t)}{t^3}=u_i\frac{B}{2}\frac{\left(\sum_{j=1}^d x_j\right)^2}{(M_a)^3}\psi_2(w),$$

де $\psi_2(w)=\int_0^1\Big(\psi_1\big(w(1-y)\big)\Big)^2(1-y)^\gamma e^{yw}dy$.

Отже, базу індукції задано. Нехай (18) виконується для всіх $k\leq r-1$. Тоді

$$\frac{1}{2t^{2r-2}}\sum_{k=1}^{r-1}C_r^k\sum_{j,k=1}^d\int_0^t\psi_k^{n,j}(t-u)\psi_{r-k}^{n,l}(t-u)b_{jl}^{n,i}(u)dG^{n,i}(u)\xrightarrow[t\to+\infty]{}$$
$$\left(\frac{B}{2}\right)^{r-2}\frac{\left(\sum_{j=1}^d x_j\right)^r}{2(M_a)^{2r-2}}\sum_{j,l=1}^d B_{lj}^i u_l u_j\sum_{k=1}^{r-1}C_r^k\psi_k(w)\psi_{r-k}(w), \qquad (19)$$

тому (18) є наслідком (19) і знову ж таки теореми 1, на цей раз із $\gamma=2r-2$.

Нехай $\tau \geq t$. Для такого τ, що $\frac{-c_0}{5c^4 \max\{1,t^2\}} \leq \frac{\lambda}{\tau^2} \leq 0$, використовуючи (6)-(8), отримуємо нерівність

$$\left|F^{n,i}\left(t,\frac{\lambda}{\tau^2}\right) - 1 - F_0^{n,i}\left(t,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right| \leq \left|e^{\frac{\lambda x_i}{\tau^2 v_{n,i}}} - 1 - \frac{\lambda x_i}{\tau^2 v_{n,i}}\right| +$$

$$+\left|e^{\frac{\lambda x_i}{\tau^2 v_{n,i}}} - 1\right| \int_0^t \left|h^i\left(u, F^n\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right) - 1\right| dG^{n,i}(u) +$$

$$+\sum_{j,l=1}^d \int_0^t \varepsilon_{jk}^i\left(u, \mathbf{1} + F_0^n \quad \left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right) F_0^{n,j}\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right) F_0^{n,k}\left(t-\right.$$

$$\left.-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right) dG^{n,i}(u) + \int_0^t \left|h^{n,i}\left(u, F^n\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right) - h^{n,i}\left(u, 1 + F_0^n\left(t-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right)\right| dG^{n,i}(u). \qquad (20)$$

Перший член правої частини (20) за абсолютною величиною не перевищує $\left(\frac{\lambda x_i}{\tau^2 v_{n,i}}\right)^2$. Третій член, завдяки (7), не перевищує $\left(\frac{2c\lambda}{\tau^2}\right)^2 \max\limits_l \sum_{j,l=1}^d \int_0^t \varepsilon_{jk}^{n,l}\left(u, \mathbf{1} + F_0^n \quad \left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right) dG^{n,i}(u)$. За умовами (2) та (7) можемо стверджувати, що третій доданок не перевищує $C_1\left(\frac{2c\lambda}{\tau^2}\right)^2, C_1 > 0$.

Перейдемо до оцінки другого члена в (20). Очевидно, що $\left|e^{\frac{\lambda x_i}{\tau^2 v_{n,i}}} - 1\right| \leq \frac{|\lambda| x_i}{\tau^2 v_{n,i}}$, крім того

$$h^{n,i}\left(u, F^n\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right) - 1 = \sum_{j=1}^d a_j^{n,i}(u)\left(F^{n,j}\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right) - 1\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^d b_{jk}^{n,i}(u)\left(F^{n,j}\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right) - 1\right)\left(F^{n,k}\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right) - 1\right)$$

$$-\sum_{j,l=1}^d \varepsilon_{jk}^{n,i}\left(u, F^n\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right)\left(F^{n,j}\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right) - 1\right)\left(F^{n,k}\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right) - 1\right).$$

Оцінимо $\left|F^{n,i}\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right) - 1\right|$:

$$\left|F^{n,i}\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right) - 1\right| \leq E \quad \left(\left|\exp\left\{\lambda \sum_{j=1}^d \frac{x_j Y_{i,j}^n(t-u)}{v_{n,j}\tau^2}\right\} - 1\right|\right)$$

$$\leq |\lambda| E \quad \left(\sum_{j=1}^d \frac{x_j Y_{i,j}^n(t-u)}{v_{n,j}\tau^2}\right),$$

де остання нерівність випливає з елементарної нерівності $|e^{-x} - 1| \leq x, x \geq 0$. Аналогічно до (12) можна стверджувати, що $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} E \quad \left(\sum_{j=1}^d Y_{i,j}^n(t-u)\right) \leq C_2(t-u)$, тому

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \left|F^{n,j}\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right) - 1\right| \leq \frac{C_3|\lambda|}{\tau}, \tau \geq t, j \in \{1,\dots,d\}.$$

Тому, враховуючи умову (2), другий член не перевищує $\frac{C_3|\lambda|^2 x_i}{\tau^3 v_{n,i}}$ для будь-якого λ та $\tau \geq t$.

За теоремою 4.1.2 з [4]

$$\left|h^{n,i}\left(u, F^n\left(t-u, \frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right) - h^{n,i}\left(u, 1 + F_0^n\left(t-u, \frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right)\right|$$
$$\leq \sum_{j=1}^d a_j^{n,i}(u)\left|F^{n,j}\left(t-u, \frac{\lambda}{\tau^2}\right) - 1 - F_0^{n,j}\left(t-u, \frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right|.$$

Поклавши $\sigma(\lambda,\tau) = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \max_{i\in\{1,\dots,d\}}\left\{\left(\frac{\lambda x_i}{\tau v_{n,i}}\right)^2 + \frac{C_3|\lambda| x_i}{\tau v_{n,i}} + C_1\left(\frac{2c\lambda}{\tau}\right)^2\right\}$, отримуємо нерівність

$$\left|F^{n,i}\left(t, \frac{\lambda}{\tau^2}\right) - 1 - F_0^{n,i}\left(t, \frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right| \leq \frac{\sigma(\lambda,\tau)}{\tau^2}$$
$$+\sum_{j=1}^d \int_0^t a_j^{n,i}(u)\left|F^{n,j}\left(t-u, \frac{\lambda}{\tau^2}\right) - 1 - F_0^{n,j}\left(t-u, \frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right| dG^{n,i}(u). \quad (21)$$

Очевидно, що

$$\lim_{\tau\to+\infty} \sigma(\lambda,\tau) = 0, i \in \{1,\dots,d\}. \quad (22)$$

Ітеруючи нерівність (21), встановлюємо, що

$$\left|F^n\left(t, \frac{\lambda}{\tau^2}\right) - 1 - F_0^n\left(t, \frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right| \leq \frac{\sigma(\lambda,\tau)}{\tau^2} H_n(t) * \mathbf{1}, \quad (23)$$

де $X * y$ позначає добуток матриці і вектора.

Використовуючи теорему 1 з [4, ст. 112], функцію $h^{n,0}(u,y)$ можна подати у вигляді

$$1 + \sum_{j=1}^d a_j^{n,0}(u)\left(y^j - 1\right) - \sum_{j=1}^d \varepsilon_j^{n,0}(u,y)\left(y^j - 1\right), \quad (24)$$

де $0 \leq \varepsilon_j^{n,0}(u,y) \leq a_j^{n,0}(u)$ і $\lim\limits_{y\to 1} \varepsilon_j^{n,0}(u,y) = 0$.

Також з [2, ст. 465] відомо, що твірна функція $f^n(t,s) = E\left(s^{N_n^0(t)}\right)$ задовольняє рівняння

$$f^n(t,s) = 1 - G^0(t) + \int_0^t h^{n,0}\left(u, F\ \ (t-u,s)\right) f^n(t-u,s)\, dG^0(u). \quad (25)$$

Ми будемо порівнювати $f(t,\lambda) = f\left(t, e^{\lambda x}\right)$ із розв'язком рівняння

$$f^{n,0}(t,\lambda) = 1 - G^{n,0}(t) +$$
$$+\int_0^t f^{n,0}\left(u, F\ \ ^n(t-u,\lambda)\right)\left(1 + \sum_{j=1}^d a_j^{n,0}(u)\, F_0^{n,j}(t,\lambda)\right) dG^{n,0}(u), \quad (26)$$

де $F_0^{n,j}(t,\lambda)$ є розв'язками рівнянь (8).

Розв'язок (26) шукатимемо у вигляді ряду

$$f^{n,0}(t,\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi_k^n(t) \frac{\lambda^k}{k!}, \quad (27)$$

коефіцієнти якого визначаються з рекурентних співвідношень

$$\varphi_k^n(t) = \sum_{r=0}^{k-1} C_k^r \sum_{j=1}^d \int_0^t \varphi_r^n(t-u)\psi_{k-r}^{n,j}(t-u) a_j^{n,0}(u)\, dG^{n,0}(u) +$$
$$+\int_0^t \varphi_k^n(t-u)\, dG^{n,0}(u),$$

де $\varphi_0^n(t) \equiv 1$, а $\psi_k^{n,j}(t)$ визначені в (10).

При умові, що $\sup\limits_n \max\limits_j A_j^{n,0} \leq c$, яку можна вважати виконаною завдяки (5), подібно до (14)-(15) можна встановити

$$\varphi_k^n(t) \leq d_k t^{2k}, k \geq 1, i \in \{1,\dots,d\},$$

де

$$d_0 = 1, d_k = \sum_{r=1}^{k-1} C_k^r\, d_r c_{k-r} c^{2k-2r}, k \geq 1,$$

а с, c_k ті ж, що і в (15).

Безпосередня перевірка показує, що

$$\sum_{k=1}^{+\infty} d_k \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1}{1 - \frac{\sqrt{1-4c^2\lambda}}{2}}$$

при $|\lambda| \leq \frac{1}{4c^2}$, причому ряд зліва збігається абсолютно, а отже ряд (27) збігається абсолютно при $|\lambda| \leq \frac{1}{4c^4 \max\{1, t^2\}}$.

Нерівність $\frac{1}{1-\frac{\sqrt{1-y}}{2}} \leq 2, 0 \leq y \leq 1$ також показує, що виконується нерівність

$$\left| f^{n,0}\left(t-u, \frac{\lambda}{\tau^2}\right) \right| \leq 2. \tag{28}$$

Нехай $B_u^n(x, y)$ є вектором з координатами $\sum_{j,l=1}^{d} x_j y_l b_{jl}^{n,i}(u)$, $i \in \{1, \dots, d\}, x = (x_1, \dots, x_d),\ y = (y_1, \dots, y_d)$. Тоді, зважаючи на зображення (10) та теорему відновлення,

$$\psi_1^n(t) = \left(\psi_1^{n,1}(t), \dots, \psi_1^{n,d}(t)\right) \sim \int_0^t H_n\,(dy)\,\frac{x}{v_n},$$

$$\psi_k^n(t) = \left(\psi_k^{n,1}(t), \dots, \psi_k^{n,d}(t)\right)$$

$$\sim \frac{1}{2}\int_0^t H_n(du) \sum_{r=1}^{k-1} C_k^r \int_0^{t-u} B_y^n\big(\psi_r^n(t-u-y), \psi_{k-r}^n(t-u-$$

$$-y)\big) dG^{n,i}(y)\,, k \geq 2, t \to +\infty.$$

Також

$$\varphi_k^n(t) \sim \int_0^t H_n^0(du) \sum_{r=0}^{k-1} C_k^r \sum_{j=1}^{d} \int_0^{t-u} \varphi_r^n(t-u-y) \psi_{k-r}^{n,j}(t-u$$

$$-y) a_j^{n,0}(u) dG^{n,0}(y)\,, k \geq 1, t \to +\infty.$$

де $H_n^0(u)$ – функція відновлення, що відповідає $G^{n,0}(u)$.

Використавши теорему 1, встановлюємо за індукцією, що

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\varphi_r^n(t)}{t^{2r}} = \varphi_r(w),$$

де $\varphi_k(w)$ визначаються рекурентною формулою

$$\varphi_k(w) = \frac{A^0}{2kM_0} \sum_{r=0}^{k-1} C_k^r \left(\frac{B}{2}\right)^{k-r-1} \frac{\left(\sum_{j=1}^{d} x_j\right)^{k-r}}{(M_a)^{2k-2r}} \int_0^1 \varphi_r\big(w(1-y)\big)$$

$$\psi_{k-r}\big(w(1-y)\big)(1-y)^{\gamma} e^{yw} dy, k \geq 1.$$

Зважаючи на зображення (1) для твірних $G(x, z, \lambda)$ та (27), для того щоб довести теорему, достатньо показати, що

$$\lim_{t,n \to +\infty} \left(f^n\left(t, \frac{\lambda}{t^2}\right) - f^{n,0}\left(t, \frac{\lambda}{t^2}\right) \right) = 0. \tag{29}$$

Користуючись (24), (25) та (26) при $t \leq \tau$ для $\frac{-c_0}{5c^4 \max\{1, t^2\}} \leq \frac{\lambda}{\tau^2} \leq 0$ можна записати

$$f^n\left(t,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)-f^{n,0}\left(t,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)=$$
$$=\int_0^t h^{n,0}(u,F^n)\left(f^n\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)-f^{n,0}\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right)dG^{n,0}(u)$$
$$+\int_0^t f^{n,0}(u,F^n)\left(h^{n,0}(t,F^n)-h^{n,0}(t,1+F_0^n)\right)dG^{n,0}(u)$$
$$+\int_0^t f^{n,0}(u,F^n)\sum_{j=1}^d \varepsilon_j^{n,0}(u,1+F_0^n)\,F_0^{n,j}(t-u,\lambda)dG^{n,0}(u), \qquad (30)$$

де $F^n=F^n\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right), F_0^n=F_0^n\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)$.

Абсолютна величина першого доданка в (30) не перевищує
$$\int_0^t\left|f^n\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)-f^{n,0}\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right|dG^{n,0}(u).$$

За допомогою теореми 4.1.2 з [5] та (28) встановлюємо, що абсолютна величина другого доданка в (30) не перевищує
$$2\int_0^t\sum_{j=1}^d a_j^{n,0}(u)\left|F^{n,j}\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)-1-F_0^{n,j}\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right|dG^{n,0}(u)$$
і тому, в свою чергу враховуючи (23), не перевищує
$$\frac{2\sigma(\lambda,\tau)}{\tau^2}\int_0^t(H_n(t-u)*\mathbf{1},a^{n,0}(u))dG^{n,0}(u),$$
де $a^{n,0}(u)=\left(a_1^{n,0}(u),\dots,a_d^{n,0}(u)\right)$, а (x,y) позначає скалярний добуток.

Третій член в (30) завдяки (17) та (28) не перевищує
$$\frac{4|\lambda|c}{\tau^2}\int_0^{+\infty}\varepsilon_j^{n,0}(u,\mathbf{1}+F_0^n)dG^{n,0}(u).$$
В свою чергу, зважаючи на умову (5) та (24),
$$\frac{4|\lambda|c}{\tau^2}\int_0^{+\infty}\varepsilon_j^{n,0}(u,\mathbf{1}+F_0^n)dG^{n,0}(u)\le\frac{C_4|\lambda|}{\tau^2}$$

Тоді, прийнявши
$$\sigma_1(t,\lambda,\tau)=\frac{4|\lambda|C_4}{\tau}$$
$$+\sup_n\frac{\sigma(\lambda,\tau)}{\tau}\int_0^t\left(H_n(t-u)*\mathbf{1},a^{n,0}(u)\right)dG^{n,0}(u),$$
отримаємо оцінку
$$\left|f^n\left(t,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)-f^{n,0}\left(t,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right|\le\frac{1}{\tau}\sigma_1(t,\lambda,\tau)$$
$$+\int_0^t\left|f^n\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)-f^{n,0}\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right|dG^{n,0}(u).$$
Умова (3) теореми гарантує виконання умов теореми 1 і тому $\frac{\sigma(\lambda,\tau)}{\tau}H_n(t)*\mathbf{1}\xrightarrow[\tau,t\to+\infty]{}0, \tau\ge t$, завдяки (22), а умова (5) гарантує обмеженість $\int_0^{+\infty}a^{n,0}(u)dG^{n,0}(u)$, тому $\lim_{t,\tau\to+\infty}\sigma_1(t,\lambda,\tau)=0$.

Ітеруючи останню нерівність, отримуємо
$$\left|f^n\left(t,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)-f^{n,0}\left(t,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right|\le\frac{1}{\tau}\int_0^t\sigma_1(t-u,\lambda,\tau)dH_n^0(u). \qquad (31)$$

Оскільки виконується умова (4), то за теоремою 1 $\lim_{t,n\to+\infty}\frac{H_n^0(t)}{t}\le C^0<+\infty$. Поклавши $t=\tau$ і спрямувавши в (31) t та n до нескінченості, отримуємо (29).

Теорему доведено.

Зауваження 1. Якщо $w = 0$, то використовуючи теорему 3 з [3], можна встановити, що $G(x, w, \lambda) = \left(ch \sqrt{\frac{-\lambda B \sum_{j=1}^{d} x_j}{2M_a}} \right)^{-\frac{2A^0 M_a}{BM_0}}$.

Література

1. Harris, T.E. The Theory of Branching Processes / Harris, T.E. – Berlin: Springer, 1963. – 232 p. (Die Grundelhren der Matematishen Wissenschaften; Vol. 119).
2. Weiner, H. J. Total Progeny in a Multitype Critical Age Dependent Branching Process with Immigration / Weiner, H. J. // Journal of Applied Probability. – 1974. – 11, №3, – P. 458–470.
3. Т.Б. Лисецький, Я.І. Єлейко. Граничні теореми для загальної кількості частинок в критичних гіллястих процесах, з перетвореннями залежними від віку частинок / Т.Б. Лисецький, Я.І. Єлейко // Прикарпатський вісник НТШ Число. – 2021. – № 16(60). – С. 33-46.
4. Севастьянов, Б.А. Ветвящиеся процессы / Севастьянов, Б.А. – Москва: Наука, 1971. – 436 с.
5. Шуренков В.М. Переходные явления теории восстановления в асимптотических задачах теории случайных процессов. I / Шуренков В.М. // Матем. сб. – 1980. – 112(154), № 1(5). – С. 115–132.
6. Шуренков В.М. Переходные явления теории восстановления в асимптотических задачах теории случайных процессов. II / Шуренков В.М. // Матем. сб. – 1980. –112(154), № 2(6). – С. 226–241.

Стаття надійшла до редакційної колегії 25.09.2024 р.

ON TRANSIENT PHENOMENA FOR TOTAL PROGENY IN BRANCHING PROCESSESWITH IMMIGRATION

T. B. Lysetskyi
Ivan Franko National University of Lviv; 79000, Lviv, Universytetska Str., 1; e-mail: taraslysetskiyy@gmail.com

In this paper, we considernear-critical multi-type age-dependent branching processes with immigration. It is known that critical processes, total numbers of particles in process born by t, divided by t^2converges in probability to infinitely divisible law, whose Laplace transform is explicitly given. Here, we find limiting distributions for a broader class of processes that approach critical process as $t \to \infty$.

Key words: *branching process, renewal equations, near-critical process, immigration.*