Математика

УДК 51 (075.8)

ЗВ'ЯЗОК АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ З *(N, M)*-ФОРМАМИ, ЇХ СТЕПЕНЯМИ ТА РЕКУРЕНТНИМИ ДРОБАМИ

Р. А. Заторський[1], І. І. Ліщинський[1], А. В. Семенчук[2]
[1]*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; 76025, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57; e-mail: romazz@rambler.ru*
[2]*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: andrisem333@mail.ru*

В роботі досліджуються зв'язки (n,m)-форм виду $s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}$, $s_i, m \in Q$ із узагальненими діофантовими рівняннями Пелля, алгебраїчними рівняннями n-го степеня та рекурентними дробами.

Ключові слова: *(n,m)-форми, параперманент, одиниці полів, діофантові рівняння, рекурентні дроби, раціональні наближення.*

Вступ

Відомо, що у другому розділі монографії [1] Делоне і Фадєєв пропонують техніку обчислень для кубічних чисел.

1. Попередні поняття та теореми

1.1. Алгебраїчні форми *n*-го порядку.

Означення 1. Алгебраїчною (*n,m*) -формою, або коротко **(*n,m*)-формою** називають дійсне число

$$x = s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}},\ n \in N \qquad s_i, m \in Q \tag{1}$$

або n-вимірний вектор

$$x = (s_0, s_1, \ldots, s_{n-1}). \tag{2}$$

Очевидно, що множина (n,m)-форм із звичайними операціями додавання та множення утворює поле.

1. Ізоморфізм (*n,m*)-форм із деяким класом матриць

(n,m)-формі (1) поставимо у відповідність циркулянт n-го порядку

$$X = \begin{pmatrix} s_0 & s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} & s_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} & \cdots & s_2\sqrt[n]{m^2} & s_1\sqrt[n]{m} \\ s_1\sqrt[n]{m} & s_0 & s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} & \cdots & s_3\sqrt[n]{m^3} & s_2\sqrt[n]{m^2} \\ s_2\sqrt[n]{m^2} & s_1\sqrt[n]{m} & s_0 & \cdots & s_4\sqrt[n]{m^4} & s_3\sqrt[n]{m^3} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} & s_{n-3}\sqrt[n]{m^{n-3}} & s_{n-4}\sqrt[n]{m^{n-4}} & \cdots & s_0 & s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} \\ s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} & s_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} & s_{n-3}\sqrt[n]{m^{n-3}} & \cdots & s_1\sqrt[n]{m} & s_0 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

а (n,m)-формі (2) – матрицю виду

$$X = \begin{pmatrix} s_0 & ms_{n-1} & ms_{n-2} & \cdots & ms_2 & ms_1 \\ s_1 & s_0 & ms_{n-1} & \cdots & ms_3 & ms_2 \\ s_2 & s_1 & s_0 & \cdots & ms_4 & ms_3 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_{n-2} & s_{n-3} & s_{n-4} & \cdots & s_0 & ms_{n-1} \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \cdots & s_1 & s_0 \end{pmatrix}. \qquad (4)$$

Кожна із двох останніх матриць однозначно задана своїм першим стовпцем.

Позаяк добуток (n,m)-форм

$$x' = s'_0 + s'_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s'_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}, \qquad (5)$$

$$x'' = s''_0 + s''_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s''_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}, \qquad (6)$$

є (n,m)-формою виду

$$x = s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}},$$

де

$$s_i = \sum_{j=0}^{i} s'_j s''_{i-j} + m\sum_{j=i+1}^{n-1} s'_j s''_{i-j}, \quad i = 0,1,\ldots,n-1 \qquad (7)$$

і відповідає першому стовпцю добутку матриць X' і X'', які відповідають (n,m)-формам (5), (6), то справедлива

Теорема 1. Множини (n,m)-форм (1), (2) ізоморфні відповідно множинам матриць (3), (4).

Таким чином, k-тому степеню (n,m)-форми (5) відповідає k-тий степінь матриці

$$X^{/} = \begin{pmatrix} s_0^{/} & s_{n-1}^{/}\sqrt[n]{m^{n-1}} & s_{n-2}^{/}\sqrt[n]{m^{n-2}} & \cdots & s_2^{/}\sqrt[n]{m^2} & s_1^{/}\sqrt[n]{m} \\ s_1^{/}\sqrt[n]{m} & s_0^{/} & s_{n-1}^{/}\sqrt[n]{m^{n-1}} & \cdots & s_3^{/}\sqrt[n]{m^3} & s_2^{/}\sqrt[n]{m^2} \\ s_2^{/}\sqrt[n]{m^2} & s_1^{/}\sqrt[n]{m} & s_0^{/} & \cdots & s_4^{/}\sqrt[n]{m^4} & s_3^{/}\sqrt[n]{m^3} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_{n-2}^{/}\sqrt[n]{m^{n-2}} & s_{n-3}^{/}\sqrt[n]{m^{n-3}} & s_{n-4}^{/}\sqrt[n]{m^{n-4}} & \cdots & s_0^{/} & s_{n-1}^{/}\sqrt[n]{m^{n-1}} \\ s_{n-1}^{/}\sqrt[n]{m^{n-1}} & s_{n-2}^{/}\sqrt[n]{m^{n-2}} & s_{n-3}^{/}\sqrt[n]{m^{n-3}} & \cdots & s_1^{/}\sqrt[n]{m} & s_0^{/} \end{pmatrix},$$

або матриці

$$X^{/} = \begin{pmatrix} s_0^{/} & ms_{n-1}^{/} & ms_{n-2}^{/} & \cdots & ms_2^{/} & ms_1^{/} \\ s_1^{/} & s_0^{/} & ms_{n-1}^{/} & \cdots & ms_3^{/} & ms_2^{/} \\ s_2^{/} & s_1^{/} & s_0^{/} & \cdots & ms_4^{/} & ms_3^{/} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_{n-2}^{/} & s_{n-3}^{/} & s_{n-4}^{/} & \cdots & s_0^{/} & ms_{n-1}^{/} \\ s_{n-1}^{/} & s_{n-2}^{/} & s_{n-3}^{/} & \cdots & s_1^{/} & s_0^{/} \end{pmatrix},$$

Очевидно також, що якщо останні дві матриці помножити відповідно на матриці-стовпці

$$X^{//} = \begin{pmatrix} s_0^{//} \\ s_1^{//}\sqrt[n]{m} \\ s_2^{//}\sqrt[n]{m^2} \\ \vdots \\ s_{n-2}^{//}\sqrt[n]{m^{n-2}} \\ s_{n-1}^{//}\sqrt[n]{m^{n-1}} \end{pmatrix}, \quad X^{//} = \begin{pmatrix} s_0^{//} \\ s_1^{//} \\ s_2^{//} \\ \vdots \\ s_{n-2}^{//} \\ s_{n-1}^{//} \end{pmatrix},$$

то отримаємо відповідно матриці-стовпці

$$X = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1\sqrt[n]{m} \\ s_2\sqrt[n]{m^2} \\ \vdots \\ s_{n-2}\sqrt[n]{m^{n-2}} \\ s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_{n-2} \\ s_{n-1} \end{pmatrix},$$

де s_i задаються рівностями (7).

Для довільної (n,m)-форми

$$x = s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}$$

можна знайти лише одну (n,m)-форму

$$\overline{x} = \overline{s_0} + \overline{s_1}\sqrt[n]{m} + \ldots + \overline{s_{n-1}}\sqrt[n]{m^{n-1}},$$

таку, що їх добуток $x\overline{x}$ є деяким дійсним числом. При цьому (n,m)-форму $\overline{x}$ називають спряженою до (n,m)-форми x, а їх добуток – нормою останньої і позначають через $|(n,m)|$.

Нехай X і $\overline{X}$ – матриці відповідні (n,m)-формі

$$s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}$$

і спряженій (n,m)-формі $\overline{x}$. Тоді

$$X \cdot \overline{X} = |(n,m)| \cdot E,$$

де E – одинична матриця, причому, норма (n,m)-форми x дорівнює детермінанту матриці X, а матриця відповідна спряженій (n,m)-формі $\overline{x}$ є оберненою матрицею до матриці X, помноженої на детермінант матриці X.

Таким чином, n-вимірним узагальненням рівняння Пелля

$$\begin{vmatrix} s_0 & ms_1 \\ s_1 & s_0 \end{vmatrix} = s_0^2 - ms_1^2 = \pm 1$$

є рівняння

$$\begin{vmatrix} s_0 & ms_{n-1} & ms_{n-2} & \cdots & ms_2 & ms_1 \\ s_1 & s_0 & ms_{n-1} & \cdots & ms_3 & ms_2 \\ s_2 & s_1 & s_0 & \cdots & ms_4 & ms_3 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_{n-2} & s_{n-3} & s_{n-4} & \cdots & s_0 & ms_{n-1} \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \cdots & s_1 & s_0 \end{vmatrix} = \pm 1.$$

Використовуючи поліноміальну формулу легко довести тотожність

$$\left(s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}\right)^k =$$

$$= \sum_{\substack{\lambda_0+\lambda_1+\ldots+\lambda_{n-1}=k \\ \lambda_1+2\lambda_2+\ldots+(n-1)\lambda_{n-1}=ns+i}} \frac{k!}{\lambda_0!\,\lambda_1!\cdot\ldots\cdot\lambda_{n-1}!} s_0^{\lambda_0} s_1^{\lambda_1} \cdot\ldots\cdot s_{n-1}^{\lambda_{n-1}} m^s m^{\frac{i}{n}}.$$

Однак цією формулою для піднесення (n,m)-форм до k-го степеня користуватися незручно, бо вона пов'язана із впорядкованими розбиттями числа n на цілі невід'ємні доданки.

1.2. Парафункції трикутних матриць (таблиць)

Нехай K – деяке числове поле.

Означення 2. [3]. Трикутну таблицю

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}_n \tag{8}$$

чисел із числового поля K назвемо **трикутною матрицею.**

Кожному елементу a_{ij} трикутної матриці (8) поставимо у відповідність $(i-j+1)$ елементів a_{ik}, $k\in\{j,\ldots,i\}$, які назвемо **похідними елементами** трикутної матриці, породженими **ключовим елементом** a_{ij}. Ключовий елемент трикутної матриці одночасно є і його похідним елементом. Добуток всіх похідних елементів, породжених ключовим елементом a_{ij} позначимо через $\{a_{ij}\}$ і назвемо **факторіальним добутком** цього ключового елемента, тобто

$$\{a_{ij}\}=\prod_{k=j}^{i} a_{ik}.$$

Означення 3. [3]. Нехай A – трикутна матриця (8). Парадетермінантом та параперманентом цієї матриці називають відповідно числа

$$d\det(A)=\sum_{r=1}^{n}\sum_{p_1+\ldots+p_r=n}(-1)^{n-r}\prod_{s=1}^{r}\{a_{p_1+\ldots+p_s,\,p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

$$pper(A)=\sum_{r=1}^{n}\sum_{p_1+\ldots+p_r=n}\prod_{s=1}^{r}\{a_{p_1+\ldots+p_s,\,p_1+\ldots+p_{s-1}+1}\},$$

де підсумовування проводиться за множиною натуральних розв'язків рівняння $p_1+\ldots+p_r=n.$

Більш докладну інформацію про парадетермінанти і параперманенти та їх властивості можна знайти у [3].

1.3. Одноперіодичні рекурентні дроби

Нехай дано алгебраїчне рівняння n-го порядку

$$x^n=a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_n,\;\; a_n\neq 0 \tag{9}$$

і вираз

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc} a_1 & & & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & & & & \\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \cdots & a_1 & & & & \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\ 0 & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \cdots & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \cdots & a_1 \end{array}\right]_m, \qquad (10)$$

побудований при допомозі коефіцієнтів цього рівняння, який слугуватиме позначенням дробу, чисельником якого є параперманент m-го порядку P_m, утворений видаленням із цього виразу вертикальної риски, а знаменником параперманент $(m-1)$-го порядку Q_m без першого стовпця параперманента чисельника.

Якщо у виразі (10) здійснити граничний перехід при $m \to \infty$, то отримаємо одноперіодичний рекурентний дріб n-го порядку

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc} a_1 & & & & & & & \\ \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & & & & \\ \vdots & \cdots & \ddots & & & & & \\ \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \cdots & a_1 & & & & \\ \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \cdots & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & & \\ 0 & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \cdots & \frac{a_3}{a_2} & \frac{a_2}{a_1} & a_1 & & \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{a_n}{a_{n-1}} & \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} & \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} & \cdots & a_1 \end{array}\right]_\infty. \qquad (11)$$

Теорема 2. [4]. Нехай задане алгебраїчне рівняння (9) із попарно різними коренями. Якщо для m-го раціонального вкорочення одноперiодичного рекурентного дробу n-го порядку (11) існує скінченна ненульова дійсна границя при $m \to \infty$, тобто

$$\lim_{m\to\infty} \frac{P_m}{Q_m} = x \neq 0,$$

то такий рекурентний дріб n-го порядку є зображенням дійсного кореня алгебраїчного рівняння (9) з найбільшим модулем.

Докладніше про рекурентні дроби можна прочитати у [4].

2. Зв’язок (n,m)-форм з алгебраїчними рівняннями

Знайдемо цілі коефіцієнти рівняння

$$x^n = a_{n,1}x^{n-1} + a_{n,2}x^{n-2} + \ldots + a_{n,n-1}x^1 + a_{n,n}, \tag{12}$$

коренем якого є (n, m)-форма

$$x = s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}, \quad s_i \in Q, \quad m \in N.$$

Нехай задано матрицю

$$X = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{13}$$

Головний мінор r-го порядку цієї матриці позначимо через (див. [2]):

$$X\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1,i_1} & a_{i_1,i_2} & \cdots & a_{i_1,i_r} \\ a_{i_2,i_1} & a_{i_2,i_2} & \cdots & a_{i_2,i_r} \\ \vdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ a_{i_r,i_1} & a_{i_r,i_2} & \cdots & a_{i_r,i_r} \end{vmatrix},$$

де

$$i_1 < i_2 < \ldots < i_r.$$

Характеристичне рівняння

$$det(x - xE) = 0,$$

матриці (13), як відомо, має розгорнутий вигляд

$$x^n = a_{n,1}x^{n-1} + a_{n,2}x^{n-2} + \ldots + a_{n,n-1}x^1 + a_{n,n},$$

де

$$a_{n,j} = (-1)^{j-1} \sum_{1\le i_1 < i_2 < \ldots < i_j \le n} X\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_j \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_j \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Згідно з теоремою Гамільтона-Келі, кожна квадратна матриця задовольняє характеристичне рівняння, тому справедлива тотожність

$$X^n = a_{n,1}X^{n-1} + a_{n,2}X^{n-2} + \ldots + a_{n,n-1}X^1 + a_{n,n}, \qquad (15)$$

є коефіцієнтами (14), де X – матриця (13).

Нехай матриця X в рівнянні (15) задана рівністю (4), тоді коефіцієнти $a_{n,j}$ рівняння (12), коренем якого є (n,m)-форма (2), можна знайти користуючись рівностями (14). Таким чином, справедлива

Теорема 3. Якщо (n,m)-форма

$$x = s_0 + s_1\sqrt[n]{m} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}$$

є коренем рівняння

$$x^n = a_{n,1}x^{n-1} + a_{n,2}x^{n-2} + \ldots + a_{n,n-1}x^1 + a_{n,n},$$

то коефіцієнти цього рівняння дорівнюють

$$a_{n,j} = (-1)^{j-1}\sum_{1\le i_1<i_2<\ldots<i_j\le n} X\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_j \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_j \end{pmatrix},$$

де

$$X\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_r \end{pmatrix}$$

головні мінори матриці

$$X = \begin{pmatrix} s_0 & ms_{n-1} & ms_{n-2} & \cdots & ms_2 & ms_1 \\ s_1 & s_0 & ms_{n-1} & \cdots & ms_3 & ms_2 \\ s_2 & s_1 & s_0 & \cdots & ms_4 & ms_3 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \vdots \\ s_{n-2} & s_{n-3} & s_{n-4} & \cdots & s_0 & ms_{n-1} \\ s_{n-1} & s_{n-2} & s_{n-3} & \cdots & s_1 & s_0 \end{pmatrix}.$$

Справедлива

Теорема 4. (n, m^n+1)**-форма виду**

$$m^{n-1} + m^{n-2}\sqrt[n]{m^n+1} + \ldots + m\sqrt[n]{(m^n+1)^{n-2}} + \sqrt[n]{(m^n+1)^{n-1}}$$

є коренем алгебраїчного рівняння

$$x^n = \binom{n}{1}m^{n-1}x^{n-1} + \binom{n}{2}m^{n-2}x^{n-2} + \ldots + \binom{n}{n-1}mx + \binom{n}{n}.$$

Доведення. Оскільки всі головні мінори однакового порядку матриці

$$\begin{pmatrix} m^{n-1} & m^n+1 & m(m^n+1) & \cdots & m^{n-3}(m^n+1) & m^{n-2}(m^n+1) \\ m^{n-2} & m^{n-1} & m^n+1 & \cdots & m^{n-4}(m^n+1) & m^{n-3}(m^n+1) \\ m^{n-3} & m^{n-2} & m^{n-1} & \cdots & m^{n-5}(m^n+1) & m^{n-4}(m^n+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m & m^2 & m^3 & \cdots & m^{n-1} & m^n+1 \\ 1 & m & m^2 & \cdots & m^{n-2} & m^{n-1} \end{pmatrix}$$

рівні між собою, то достатньо знайти один з них. Знайдемо головний мінор s-го порядку матриці

$$\begin{pmatrix} m^{n-1} & m^n+1 & m(m^n+1) & \cdots & m^{s-2}(m^n+1) \\ m^{n-2} & m^{n-1} & m^n+1 & \cdots & m^{s-3}(m^n+1) \\ m^{n-3} & m^{n-2} & m^{n-1} & \cdots & m^{s-4}(m^n+1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m^{n-s} & m^{n-s+1} & m^{n-s+2} & \cdots & m^{n-1} \end{pmatrix}$$

Помножимо перший стовпець на $-m^r$, $r=1,2,\dots,s-1$ і додамо до $(r+1)$-го стовпця, тоді отримаємо детермінант матриці

$$\begin{pmatrix} m^{n-1} & 1 & m & \cdots & m^{s-2} \\ m^{n-2} & 0 & 1 & \cdots & m^{s-3} \\ m^{n-3} & 0 & 0 & \cdots & m^{s-4} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ m^{n-s} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Розкладемо останній детермінант за елементами першого стовпця, отримаємо

$$(-1)^{s+1}m^{n-s}.$$

Таким чином, згідно з теоремою 3 коефіцієнт $a_{n,s}$ дорівнює

$$(-1)^{s-1}(-1)^{s+1}m^{n-s}\binom{n}{s}=m^{n-s}\binom{n}{s}.$$

3. Деякі обчислення пов'язані з алгебраїчними рівняннями n-го степеня

Теорема 5. Якщо

$$x^n=a_{n,1}x^{n-1}+a_{n,2}x^{n-2}+\ldots+a_{n,n-1}x+a_{n,n},$$

і

$$x^m=A_{m,1}x^{n-1}+A_{m,2}x^{n-2}+\ldots+A_{m,n-1}x+A_{m,n},\ \ n\le m,$$

то виконуються рівності

$$A_{m,i}=\left[\begin{array}{cccccccccc}
a_{n,i} &&&&&&&&& \\
\frac{a_{n,i+1}}{a_{n,1}} & a_{n,1} &&&&&&&& \\
\frac{a_{n,i+2}}{a_{n,2}} & \frac{a_{n,2}}{a_{n,1}} & a_{n,1} &&&&&&& \\
\vdots & \cdots & \cdots & \ddots &&&&&& \\
\frac{a_{n,n}}{a_{n,n-i}} & \frac{a_{n,n-i}}{a_{n,n-i-1}} & \frac{a_{n,n-i-1}}{a_{n,n-i-2}} & \cdots & a_{n,1} &&&&& \\
0 & \frac{a_{n,n}}{a_{n,n-i}} & \frac{a_{n,n-i}}{a_{n,n-i-1}} & \cdots & \frac{a_{n,2}}{a_{n,1}} & a_{n,1} &&&& \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots &&& \\
0 & \frac{a_{n,n}}{a_{n,n-1}} & \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n-2}} & \cdots & \frac{a_{n,i+1}}{a_{n,i}} & \frac{a_{n,i}}{a_{n,i-1}} & \cdots & a_{n,1} && \\
\vdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \\
0 & 0 & 0 & \cdots & \frac{a_{n,n}}{a_{n,n-1}} & \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n-2}} & \cdots & \frac{a_{n,3}}{a_{n,2}} & \frac{a_{n,2}}{a_{n,1}} & a_{n,1}
\end{array}\right]_{m-n+1}, \qquad (16)$$

де $i=1,2,\ldots,n.$

Доведення. При $m=n$ рівність (16) очевидно виконується. Покажемо, що виконується індукційний крок.

Маємо

$$x^{m+1}=A_{m+1,1}x^{n-1}+\ldots+A_{m+1,i}x^{n-i}+\ldots+A_{m+1,n-1}x+A_{m+1,n}.$$

З іншої сторони маємо рівності

$$x^{m+1}=A_{m,1}x^{n}+A_{m,2}x^{n-1}+\ldots+A_{m,n-1}x^{2}+A_{m,n}x=$$

$$=A_{m,1}\left(a_{n,1}x^{n-1}+a_{n,2}x^{n-2}+\ldots+a_{n,n-1}x+a_{n,n}\right)+A_{m,2}x^{n-1}+\ldots+A_{m,n-1}x^{2}+A_{m,n}x=$$

$$=\left(a_{n,1}A_{m,1}+A_{m,2}\right)x^{n-1}+\ldots+\left(a_{n,i}A_{m,1}+A_{m,i+1}\right)x^{n-i}+\ldots+\left(a_{n,n-1}A_{m,1}+A_{m,n}\right)x+a_{n,n}A_{m,1}.$$

Отже, справедливі рівності

$$A_{m+1,i}=a_{n,i}A_{m,1}+A_{m,i+1}$$

Але неважко побачити, що при розкладі параперманента $A_{m+1,i}$ за елементами першого стовпця, ми отримаємо вираз $a_{n,i}A_{m,1}+A_{m,i+1}$.

Наслідок 1. Якщо

$$x^{n}=a_{n,1}x^{n-1}+a_{n,2}x^{n-2}+\ldots+a_{n,n-1}x+a_{n,n},$$

і

$$x^{m}=A_{m,1}x^{n-1}+A_{m,2}x^{n-2}+\ldots+A_{m,n-1}x+A_{m,n},\quad n\le m,$$

то коефіцієнти $A_{m,i}$ можна знайти із рекурентних рівнянь

$$A_{m,i}=a_{n,i}A_{m-1,1}+a_{n,i+1}A_{m-2,1}+\ldots+a_{n,n}A_{m-n+i-1,1},\quad i=1,2,\ldots,n,$$

в яких

$$A_{n,1} = a_{n,1}, \quad A_{n-1,1} = 1, \quad A_{n-2,1} = \ldots = A_{0,1} = 0.$$

Доведення. Випливає із розкладу параперманента (16) за елементами першого стовпця.

При $n = 3$ наслідок 1 запишеться у вигляді:
якщо

$$x^3 = a_{3,1}x^2 + a_{3,2}x^1 + a_{3,3},$$

і

$$x^m = A_{m,1}x^2 + A_{m,2}x^1 + A_{m,3}, \ 3 \le m,$$

то коефіцієнти $A_{m,i}$, $i = 1,2,3$ можна знайти із рекурентних рівнянь

$$A_{m,1} = a_{3,1}A_{m-1,1} + a_{3,2}A_{m-2,1} + a_{3,3}A_{m-3,1},$$

$$A_{m,2} = a_{3,2}A_{m-1,1} + a_{3,3}A_{m-2,1},$$

$$A_{m,3} = a_{3,3}A_{m-1,1}, \quad m = 4,5,6,\ldots,$$

При цьому слід вважати, що $A_{3,1} = a_{3,1}$, $A_{2,1} = 1$, $A_{1,1} = A_{0,1} = 0.$

Для порівняння наведемо аналогічний алгоритм Делоне і Фадєєва (див. [1], стор. 73): нехай маємо

$$\omega^3 = S\omega^2 + Q\omega + N,$$

і

$$\omega^m = U_m\omega^2 + V_m\omega + W_m,$$

тоді коефіцієнти U_m, V_m, W_m можна знайти відповідно із співвідношень

$$U_m = \sum_{\alpha+2\beta+3\gamma=m-2} \frac{(\alpha+\beta+\gamma)!}{\alpha!\beta!\gamma!} S^\alpha Q^\beta N^\gamma,$$

$$V_m = U_{m+1} - U_m S,$$

$$W_m = U_{m+2} - U_{m+1}S - U_m Q.$$

Зауважимо, що аналогічні алгоритми при $n > 3$ в існуючій літературі не розглядалися.

Теорема 6. Якщо (n,k)-форма має вигляд

$$x = s_0 + s_1\sqrt[n]{k} + \ldots + s_{n-1}\sqrt[n]{k^{n-1}},$$

то інші суміжні корені анулюю чого полінома над полем раціональних чисел даної форми мають вигляд:

$$x_i = s_0 + s_1\varepsilon^i\sqrt[n]{k} + \ldots + s_{n-1}\varepsilon^{(n-1)i}\sqrt[n]{k^{n-1}}$$

де ε – первісний корінь n-го степеня з одиниці, $i = 1,\ldots,n-1$.

Доведення. Для уніфікації позначень (n,k)-форму x також розглядатимемо у вигляді x_n. Покажемо, що для кожного k $S_m = \sum_{i=1}^{n} x_i^m$ не залежить від коренів і належить полю раціональних чисел.

Спочатку розглянемо $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^{ip}=\varepsilon^{p}\sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon^{ip}$, але оскільки ε – первісний корінь n-го степеня з одиниці, то $\sum_{i=0}^{n-1}\varepsilon^{ip}=\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^{ip}$. Тобто $\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^{ip}=0$ якщо p не кратне n.

В формулі x_i^m (не зводячи подібні доданки) кожен доданок матиме вигляд

$$s_{p_1}\varepsilon^{ip_1}\sqrt[n]{k^{p_1}}\cdot\ldots\cdot s_{p_m}\varepsilon^{ip_m}\sqrt[n]{k^{p_m}}=\left(s_{p_1}\ldots s_{p_m}\right)\varepsilon^{i(p_1+\ldots+p_m)}\sqrt[n]{k^{p_1+\ldots+p_m}},$$

де $p_1,\ldots,p_m\in\{0,1,2,\ldots,n-2,n-1\}$. Тоді в $S_m=\sum_{i=1}^{n}x_i^m$ доданки перегрупуємо в групи з однаковими наборами $p_1,\ldots,p_m$, і кожна така група матиме вигляд:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(s_{p_1}\ldots s_{p_m}\right)\varepsilon^{i(p_1+\ldots+p_m)}\sqrt[n]{k^{p_1+\ldots+p_m}}=\left(s_{p_1}\ldots s_{p_m}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}\varepsilon^{i(p_1+\ldots+p_m)}\right)\sqrt[n]{k^{p_1+\ldots+p_m}}.$$

Отже, якщо $p_1+\ldots+p_m$ не є кратна n, то дана група доданків дорівнює нулю, якщо ж $p_1+\ldots+p_m$ кратна n, то дана група доданків є раціональним числом.

За формулами Ньютона σ_m (елементарні симетричні вирази від $x_1,\ldots,x_n$), $m=1,\ldots,n$ виражаються через S_q, $q\le m$, і σ_r, $r<m$. Так як $\sigma_1=S_1$ і всі S_m раціональні числа, то і всі σ_m, де $m=1,\ldots,n$ теж раціональні числа. А за формулами Вієта поліном $(x-x_1)\ldots(x-x_n)\in Q[x]$, що й доводить теорему.

Для деяких прикладних задач більше значення має не самий вигляд суміжних коренів (n,k)-форми, а відповідь на питання: чи є дана форма найбільша за модулем серед своїх суміжних коренів? Це питання є достатньо складним і потребує більш ґрунтовного дослідження, проте з вищенаведеної теореми випливає очевидний наслідок.

Наслідок 2. Якщо $s_0,s_1,\ldots,s_{n-1}$, $n\in N$ невід'ємні раціональні числа, то (n,k)-форма $x=s_0+s_1\sqrt[n]{k}+\ldots+s_{n-1}\sqrt[n]{k^{n-1}}$ є найбільшою за модулем серед своїх суміжних коренів анулюючого полінома над полем раціональних чисел.

Таким чином, при допомозі теореми 3 для кожної (n,m)-форми (1) можна записати алгебраїчне рівняння n-го порядку, коренем якого вона являється. Більше того, згідно з наслідком 2 ця форма має найбільший модуль серед модулів суміжних коренів алгебраїчного рівняння. Тому, використовуючи теорему 2, при допомозі раціональних вкорочень відповідних рекурентних дробів, можна будувати раціональні наближення (10) до (n,m)-форм (1).

Теорема 7. Якщо (n,m)-форма (1) з невід'ємними коефіцієнтами s_i, $i=0,1,\dots,n-1$ є коренем алгебраїчного рівняння (9), то рекурентний дріб (11) є її зображенням, а його m-те раціональне вкорочення (10) – її раціональним наближенням.

Література

1. Делоне Б.Н. Теория иррациональностей третьей степени / Б.Н. Делоне, Д.К. Фаддєєв. – М.:Изд-во АН СССР, 1940. – 340 с.
2. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
3. Заторський Р.А. Числення трикутних матриць та його застосуванням / Р.А. Заторський. – Івано-Франківськ. Сімик, 2010. – 508 с.
4. Zatorsky R. On rational approximations of algebraic numbers of higher orders and certain parametrization for generalized Pell's equations / R. Zatorsky // http:arxiv.org/abs/1103.5772v1.

Стаття надійшла до редакційної колегії 21.11.2014 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,***
д.ф.-м.н., професором ***Григорчуком Р. І.*** *(США, Техас)*

RELATIONSHIP ALGEBRAIC EQUATIONS WITH *(N,M)*-FORMS, THEIR DEGREES AND RECURRENCE FRACTIONS

R. A. Zatorsky[1], I. I. Lishchynskyj[1], A. V. Semenchuk[2]
[1]*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;*
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
e-mail: romazz@rambler.ru, tarasgoy@yahoo.com
[2]*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;*
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

It analyzes the relationships (n,m)-forms type $s_0+s_1\sqrt[n]{m}+\ldots+ +s_{n-1}\sqrt[n]{m^{n-1}}$, $s_i, m\in Q$ *with the generalized Diophantine equations Pell, algebraic equations n-th degree and recurrence fractions.*

Key words *and phrases: (n,m)-forms, parapermanent, unit fields, Diophantine equations, recurrence fractions, rational approximation.*