Диференціальні рівняння і математична фізика

УДК 517.926.7
DOI: 10.31471/2304-7399-2023-18(68)-32-48

ПРО *dA*-ІНТЕГРОВНІ З КВАДРАТОМ НА ПІВОСІ РОЗВ'ЯЗКИ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ СИСТЕМ З МІРАМИ

В.В. Мазуренко[1], **О.В. Мазуренко**[2]
[1]*Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;*
76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57, Україна;
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка;*
79000, м. Львів, вул. Університетська, 1, Україна;
e-mail: viktor.mazurenko@pnu.edu.ua, oles.mazurenko@lnu.edu.ua

Ця робота поширює теорію Вейля–Тітчмарша на випадок узагальнених диференціальних систем. Доведено, що характеристична матриця розв'язувального ядра диференціальної системи з мірами належить до геометричного місця, яке є матричним аналогом вейлівського круга. Встановлено, що такі матричні круги звужуються і збігаються до граничного круга чи точки залежно від граничного поводження радіусів. Ця гранична множина є визначальною в обговоренні питання про кількість dA–інтегровних з квадратом на півосі розв'язків такої системи.

Ключові слова: *диференціальна система з мірами, матриця Ґріна, характеристична матриця, теорія Вейля–Тітчмарша, матричний граничний круг, dA-інтегровний з квадратом розв'язок.*

Вступ

Використовуючи метод граничного переходу від скінченного проміжку $0 \leqslant x \leqslant b$ до нескінченного $0 \leqslant x < \infty$, Вейль [19] встановив, що диференціальне рівняння $-\big(p(x)y'\big)' + q(x)y = \lambda y$ з неперервними на півосі коефіцієнтами $p(x) > 0$ і $q(x)$ має для всіх комплексних значень λ або один, або два лінійно незалежні розв'язки з простору $L_2(0,\infty)$ залежно від випадку "гранична точка" (Grenzpunktfall) чи "граничний круг" (Grenzkreisfall). В роботі [20] він знову повернувся до цього питання, розв'язуючи інтерполяційну проблему Неванлінни–Піка про відшукання (за заданою послідовністю значень $\omega_1, \omega_2, \ldots$ в точках $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$) функції $\omega(\lambda)$, яка є регулярною в області $\mathrm{Im}\,\lambda > 0$ і має там властивість $\mathrm{Im}\,\omega(\lambda) > 0$ (їх називають *N–функціями*), та довів, що якщо для одного значення параметра λ ($\mathrm{Im}\,\lambda > 0$) справджується випадок граничної точки, то він справджується і для решти значень цього параметра. Згодом, Тітчмарш [17] отримав і суттєво доповнив результати Вейля методом контурного інтегрування без використання теорії інтегральних рівнянь.

У науковій літературі відомими є роботи, які узагальнюють теорію Вейля–Тітчмарша для самоспряженого рівняння Штурма–Ліувілля на півосі на випадки несамоспряженого диференціального рівняння другого порядку [11], формально самоспряжених диференціальних [6, 7] і квазідиференціальних [18, 21] рівнянь парного і непарного порядків, самоспряженої і несамоспряженої систем диференціальних рівнянь [1, 9, 13, 8, 10, 2]. Відома також аналогічна теорія для дискретних гамільтонових систем та матриць Якобі [3, 1, 14, 5, 15, 4].

Мета нашої роботи — поширити теорію Вейля–Тітчмарша на випадок узагальненої системи диференціальних рівнянь (з мірами). Остання за деяких додаткових обмежень на коефіцієнти-міри (якщо породжуючі їх функції обмеженої варіації є абсолютно неперервними чи якщо ненульовими є лише дискретні складові цих функцій) охоплює як неперервні [1, 10], так і дискретні гамільтонові системи [15, 4]. З міркувань обмеження на обсяг публікації, ми подаємо доведення лише ключових тверджень, а решту — супроводжуємо коментарями.

1. Використані позначення, означення і факти

1. У цій роботі використовуємо такі позначення: $\mathbb{R}_+ = [0,\infty)$; $\mathbb{I} = [0,b]$, $0<b<\infty$; $\mathbb{C}^{p\times q}$ — лінійний простір комплекснозначних $(p\times q)$–матриць $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{p,q}$ з нормою $\|A\| = \sum\limits_{i=1}^{p}\sum\limits_{j=1}^{q}|a_{ij}|$; $\mathbb{C}^p$ — p–вимірний лінійний комплексний простір з нормою $\|x\| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{p} x_i^2}$ елемента $x = (x_1,\ldots,x_p)^T$ і скалярним добутком $(x,y) \equiv y^*x = \sum\limits_{i=1}^{p} x_i\bar{y}_i$ елементів x, y (тут * позначає ермітове спряження); 0 — нульовий елемент (матриця, вектор або скаляр); I_p — одинична $(p\times p)$–матриця; $\mathrm{Im}A = \frac{1}{2i}(A - A^*)$; $BV_{loc}^{+}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{p\times q})$ — простір неперервних справа матричних функцій $A\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}^{p\times q}$ локально обмеженої на $\mathbb{R}_+$ варіації, тобто таких, що мають обмежені повні варіації на кожному відрізку $\mathbb{I}$; $\Delta A(x) = A(x) - A(x-0)$ — стрибок матриці–функції

$A \in BV^{+}_{loc}(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{p\times q})$ у точці $x \in \mathbb{R}_+$.

2. Нагадаємо, що для ермітової матриці $A \in \mathbb{C}^{p\times p}$ нерівності $A \geqslant 0$ і $A > 0$ означають, що матриця A є невід'ємно і додатно визначеною відповідно, тобто для довільного ненульового вектора $v \in \mathbb{C}^p$ справджуються числові нерівності $(Av, v) \equiv v^*Av \geqslant 0$ і $(Av, v) > 0$. Відтак матричні нерівності $A \geqslant B$ і $A > B$ розуміємо як $A - B \geqslant 0$ і $A - B > 0$. Далі, якщо $A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}^{p\times p}$, то твердження, що $A(x)$ неспадна функція змінної $x \in \mathbb{R}_+$ означає, що з нерівності $x_2 > x_1$ випливає нерівність $A(x_2) \geqslant A(x_1)$ у щойно згаданому матричному сенсі.

Для неспадної функції $A \in BV^{+}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{p\times p})$ через $L^2_{dA}(\mathbb{I}, \mathbb{C}^p)$ позначимо гільбертів простір, що складається з класів еквівалентних між собою відносно міри Стільтьєса dA на $\mathbb{I}$ [16] p–вимірних векторів $f(x)$, зі скалярним добутком $\langle f, g\rangle_{dA} = \displaystyle\int_0^b g^*(t)\, dA(t) f(t)$ та нормою $\|f\|_{dA} = \sqrt{\langle f, f\rangle_{dA}}$.

3. За аналогією до [3], *матричним (або операторним) колом* з центром C, лівим радіусом R_1 і правим радіусом R_2 називаємо множину матриць $X \in \mathbb{C}^{p\times p}$ вигляду $X = C + R_1^{1/2} U R_2^{1/2}$, де $R_1 > 0$ і $R_2 > 0$ — фіксовані ермітові матриці, U — довільна унітарна матриця.

Позаяк $U = R_1^{-1/2}(X - C)R_2^{-1/2}$ та $U^*U = I_p$, $UU^* = I_p$, то X задовольняє обидва рівняння

$$X^*D_1X + X^*S_1 + S_1^*X + T_1 = 0, \quad XD_2X^* + XS_2^* + S_2X^* + T_2 = 0, \tag{1}$$

де $D_1 = R_1^{-1}$, $S_1 = -R_1^{-1}C$, $T_1 = C^*R_1^{-1}C - R_2$ та $D_2 = R_2^{-1}$, $S_2 = -CR_2^{-1}$, $T_2 = CR_2^{-1}C^* - R_1$. Навпаки, якщо справджуються рівняння (1), де $D_i > 0$ і T_i $(i = 1, 2)$ — ермітові матриці, причому $D_1^{-1} = S_2D_2^{-1}S_2^* - T_2$, $D_1^{-1}S_1 = S_2D_2^{-1}$, $S_1^*D_1^{-1}S_1 - T_1 = D_2^{-1}$, то X пробігає матричне коло з центром $C = -D_1^{-1}S_1 = -S_2D_2^{-1}$ та радіусами $R_1 = D_1^{-1} = S_2D_2^{-1}S_2^* - T_2$ і $R_2 = S_1^*D_1^{-1}S_1 - T_1 = D_2^{-1}$.

Далі у розділі 4 матимемо справу з геометричним місцем вигляду

$$(X - F)G(X - F)^* = (X + F)H(X + F)^*, \tag{2}$$

де X — змінна квадратна матриця порядку p, а F, G, H — задані матриці того ж порядку, причому G і H — ермітові. У скалярному випадку $(p = 1)$ рівняння (2) визначає звичайне коло, в разі якщо $F \neq 0$, а G і H є не рівними нулеві дійсними числами однакового знаку. В загальному випадку (2) збігається при $D_2 = H - G$, $S_2 = F(H + G)$, $T_2 = F(H - G)F^*$ з другим із матричних кіл (1). Зі сказаного випливає

Лема 1.1. *Нехай матриці F, G, H — неособливі, причому G і H — ермітові. Якщо $H > G$, а власні значення матриці $G^{-1}H$ додатні, то множина матриць X, для яких справджується* (2)*, є матричним колом*

$$X = C + R_1^{1/2} U R_2^{1/2}, \;\; UU^* = I_p, \tag{3}$$

з центром C та лівим і правим радіусами $R_1 > 0$ і $R_2 > 0$ вигляду

$$C = -F(H+G)(H-G)^{-1}, \; R_2 = (H-G)^{-1}, \tag{4}$$

$$R_1 = F[(H+G)(H-G)^{-1}(H+G) - (H-G)]F^*. \tag{5}$$

Зауважимо, що на відміну від ермітовості матриць R_1 і R_2 та умови $R_2 > 0$, котрі є очевидними наслідками припущень леми, умова $R_1 > 0$ є нетривіальним наслідком [1, с. 285].

Одночасно з матричним колом, записаним у вигляді (2) чи (3), доцільно розглянути також матричні круги, утворені внутрішністю цього кола, включаючи саме коло або без нього. Вони є непорожніми обмеженими замкненою і відкритою множинами матриць.

4. Нехай P, Q, J — квадратні матриці порядку p, причому J — косоермітова унітарна матриця, тобто $J^* = -J, \quad J^*J = I_n$.

Пару матриць (P, Q) називаємо *неособливою*, якщо зі співвідношень $Pv = 0$ та $Qv = 0$ $(v \in \mathbb{C}^p)$ випливає, що $v = 0$. Таким чином, неособливість пари (P, Q) означає незалежність рядків блокової матриці $\begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{p \times 2p}$, тобто $\operatorname{rank} \begin{pmatrix} P & Q \end{pmatrix} = p$.

Дві неособливі пари (P, Q) і (M, N) називаємо *J–еквівалентними*, якщо існує оборотна матриця J така, що $P = MJ$, $Q = NJ$.

Пару (P, Q) називаємо *J–унітарною*, якщо $PJP^* = QJQ^*$.

2. Постановка задачі і матриця Ґріна

На півосі $x \in \mathbb{R}_+$ розглядаємо узагальнену однорідну диференціальну систему (з мірами)

$$JY' = [B'(x) + \lambda A'(x)]Y, \tag{6}$$

где Y — невідомий p–вимірний вектор, J — косоермітова унітарна матриця, $A, B \in BV_{loc}^+(\mathbb{R}_+, \mathbb{C}^{p \times p})$, A', B' — їх узагальнені похідні, тобто міри Стільтьєса на $\mathbb{R}_+$, λ — (спектральний) параметр. До того ж, вважаємо $A(x)$ неспадною на $\mathbb{R}_+$ у матричному сенсі і $A^*(x) = A(x), \quad B^*(x) = B(x)$.

Інтерес до систем вигляду (6) значною мірою обумовлений тим, що вони дозволяють з єдиної точки зору досліджувати як звичайні лінійні диференціальні системи, так і лінійні імпульсні і скінченно–різницеві системи. Характерною особливістю таких систем є той факт, що в їх математичних моделях присутні у тому чи іншому вигляді добутки розривних функцій на узагальнені похідні від функцій обмеженої варіації. Такі добутки не завжди існують в сенсі теорії узагальнених функцій. Тому різні підходи до означення розв'язку можуть приводити загалом до різних результатів. У цій роботі ми розглядаємо клас коректних (отримуваний внаслідок накладання деяких додаткових вимог на коефіцієнти) систем, при дослідженні яких не виникає проблема множення функціоналів.

Розв'язком системи (6) називаємо вектор–функцію $Y \in BV^{+}_{loc}(\mathbb{R}_{+}, \mathbb{C}^{p})$, для якої справджується умова

$$[\Delta B(x) + \lambda \Delta A(x)]\,\Delta Y(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_{+},\ \lambda \in \mathbb{C}, \tag{7}$$

і яка задовольняє систему (6) в узагальненому сенсі, тобто коли диференціювання і рівність в (6) розуміються в сенсі теорії розподілів.

Зрозуміло, що умова (7) в означенні розв'язку системи (6) є неефективною, бо виражається у термінах стрибків шуканого розв'язку. Відтак на матриці $B(x)$ і $A(x)$ накладаємо іншу (еквівалентну і конструктивну) необхідну і достатню умову існування розв'язку системи (6), котру всюди далі вважаємо виконаною [16]:

$$\left\{J\,[\Delta B(x) + \lambda \Delta A(x)]\right\}^{2} = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_{+},\ \lambda \in \mathbb{C}. \tag{8}$$

Побіжно зазначимо, що у розглядуваному тут матричному випадку функції $B(x)$ і $A(x)$, вочевидь, можуть мати спільні точки розриву. Цей факт суттєво розширює клас досліджуваних систем.

Дослідження системи (6) проведемо, застосовуючи метод граничного переходу від скінченного проміжку $\mathbb{I}$ до півосі $\mathbb{R}_{+}$. Важливими для дослідження є властивості *фундаментальної матриці* $\Phi(x,t,\lambda)$ системи (6), тобто матричного розв'язку початкової задачі [12]

$$J\frac{d}{dx}\Phi(x,t,\lambda) = [B'(x) + \lambda A'(x)]\,\Phi(x,t,\lambda), \quad \Phi(t,t,\lambda) = I_{p},$$

а саме: для довільних $x,t,s \in \mathbb{I}$

1) $\Phi(x,t,\lambda)$ за кожною змінною x і t належить до $BV^{+}\left(\mathbb{I}, \mathbb{C}^{p\times p}\right)$ і є цілою функцією параметра λ;
2) $\Phi(x,t,\lambda)\Phi(t,s,\lambda) = \Phi(x,s,\lambda)$;
3) $\Phi(x,t,\lambda)\Phi(t,x,\lambda) = I_{p}$;
4) $\Phi^{*}(x,s,\mu)J\Phi(x,t,\lambda)\Big|_{x=x_1}^{x=x_2} = (\lambda - \overline{\mu})\displaystyle\int_{x_1}^{x_2} \Phi^{*}(x,s,\mu)dA(x)\Phi(x,t,\lambda)$;

5) $\Phi^*(x,t,\overline{\lambda})J\Phi(x,t,\lambda)=J$, $\Phi(x,t,\lambda)J\Phi^*(x,t,\overline{\lambda})=J$.

Узагальнену диференціальну систему (6) на проміжку $\mathbb{I}$ будемо розглядати разом з крайовою умовою

$$PY(0)+QY(b)=0, \tag{9}$$

де пара крайових матриць (P,Q) — неособлива і J–унітарна. При цьому припускаємо, що обидва рівняння $JY'-B'(x)Y=0$ та $A'(x)Y=0$ за умови (9) мають лише тривіальні розв'язки $Y\equiv 0$. Іншими словами це означає, що крайова задача (6), (9) не має незалежного від λ нетривіального розв'язку (*умова невиродженості за параметром* λ). Якщо ця умова справджується, то спектр крайової задачі (6), (9) збігається з усією λ–площиною. З іншого боку внаслідок виродженості матриці $A(x)$ крайова задача (6), (9) може взагалі не мати власних значень. Їх нема, н-д, у тому тривіальному випадку, коли $A(x)$ — стала матриця, а $\det[P+Q\Phi(b,0,0)]=0$. Якщо ж вони існують, то спектр задачі (6), (9) містить не більш, ніж зліченну кількість власних значень, єдиною граничною точкою яких може бути лише $\lambda=\infty$ [12].

В роботі [12] при вивченні матричної функції Ґріна на відрізку $\mathbb{I}$ було показано, що для довільної вектор–функції $F\in BV^+\left(\mathbb{I},\mathbb{C}^p\right)$, для якої $[\Delta B(x)+\lambda\Delta A(x)]J\Delta F(x)=0\ \forall x\in\mathbb{I},\ \lambda\in\mathbb{C}$, будь-який розв'язок неоднорідної системи $JY'-[B'(x)+\lambda A'(x)]Y=F'(x)$, що задовольняє крайову умову вигляду

$$Y(0)=Mv,\ Y(b)=Nv,\quad v\in\mathbb{C}^p \tag{10}$$

з неособливою і J–унітарною парою матриць (M^*,N^*), є для довільного λ $(\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0)$ інтегральним оператором $Y_F(x,\lambda)=\int_0^b K(x,t,\lambda)dF(t)$, що діє $BV^+\left(\mathbb{I},\mathbb{C}^p\right)\to \mathrm{L}^2_{dA}\left(\mathbb{I},\mathbb{C}^p\right)$, ядро якого (матриця Ґріна) має вигляд

$$K(x,t,\lambda)=\begin{cases}\Phi(x,0,\lambda)M\left[\Phi(b,0,\lambda)M-N\right]^{-1}\Phi(b,t,\lambda)J, & x<t;\\ \Phi(x,b,\lambda)N\left[M-\Phi(0,b,\lambda)N\right]^{-1}\Phi(0,t,\lambda)J, & x\geqslant t.\end{cases}$$

Якщо піти далі і врахувати, що неособливі пари (P,Q) і $(M^*,-N^*)$ є J–еквівалентними, то у випадку природнішої, ніж (10), крайової умови (9) *матриця Ґріна* матиме вигляд

$$K(x,t,\lambda)=\begin{cases}\Phi(x,0,\lambda)\left[P+Q\Phi(b,0,\lambda)\right]^{-1}Q\Phi(b,t,\lambda)J, & x<t;\\ -\Phi(x,b,\lambda)\left[P\Phi(0,b,\lambda)+Q\right]^{-1}P\Phi(0,t,\lambda)J, & x\geqslant t.\end{cases} \tag{11}$$

За умов $x\neq t$ та $\mathrm{Im}\,\lambda\neq 0$ матриця Ґріна $K(x,t,\lambda)$ за кожною зі змінних належить до $BV^+\left(\mathbb{I},\mathbb{C}^{p\times p}\right)$. Її властивості випливають з властивостей фундаментальної матриці, як наприклад, рівність $K(x,t,\lambda)=K^*(t,x,\overline{\lambda})$.

3. Характеристична матриця

Перетворимо формулу (11), яка визначає матрицю Ґріна. Для цього розглянемо *характеристичну* матрицю

$$X_{P,Q}(\lambda) = -\frac{1}{2}\big[P+Q\Phi(b,0,\lambda)\big]^{-1}\big[P-Q\Phi(b,0,\lambda)\big]J. \tag{12}$$

На підставі властивостей фундаментальної матриці $\Phi(x,t,\lambda)$ маємо

$$X_{P,Q}(\lambda)+\frac{1}{2}J = \big[P+Q\Phi(b,0,\lambda)\big]^{-1}Q\Phi(b,0,\lambda)J,$$
$$X_{P,Q}(\lambda)-\frac{1}{2}J = -\big[P+Q\Phi(b,0,\lambda)\big]^{-1}PJ.$$

Відтак

$$K(x,t,\lambda)=\begin{cases}\Phi(x,0,\lambda)\big[X_{P,Q}(\lambda)+\frac{1}{2}J\big]\Phi^*(t,0,\overline{\lambda}), & x<t;\\ \Phi(x,0,\lambda)\big[X_{P,Q}(\lambda)-\frac{1}{2}J\big]\Phi^*(t,0,\overline{\lambda}), & x\geqslant t\end{cases}$$

і, таким чином, обидві матриці (характеристична і матриця Ґріна) мають особливості в одних і тих же точках. Наступна теорема стверджує, що характеристична матриця є матричною N–функцією.

Теорема 3.1. *Характеристична матриця* $X_{P,Q}(\lambda)$ *ермітова при* $\operatorname{Im}\lambda=0$*, окрім полюсів, розміщених у власних значеннях крайової задачі* (6), (9)*, і її уявна частина знаковизначена у кожній з двох* λ*–півплощин, тобто*

$$\operatorname{Im}\lambda\cdot\operatorname{Im}X_{P,Q}(\lambda)\geqslant 0. \tag{13}$$

Доведення. У позначеннях

$$X_{\pm}(\lambda)=P\pm Q\Phi(b,0,\lambda) \tag{14}$$

матриця (12) має вигляд $X_{P,Q}(\lambda)=-\frac{1}{2}X_+^{-1}(\lambda)X_-(\lambda)J$. Відтак

$$\operatorname{Im}X_{P,Q}=-\frac{1}{4i}\Big(X_+^{-1}X_-J-J^*X_-^*X_+^{*\,-1}\Big)=-\frac{1}{4i}X_+^{-1}(X_-JX_+^*+X_+JX_-^*)X_+^{*\,-1}.$$

Тут використана косоермітовість матриці J. Якщо до того ж врахувати J–унітарність пари (P,Q), то вираз у дужках набуває вигляду

$$X_-JX_+^*+X_+JX_-^*=2\big[PJP^*-Q\Phi(b,0,\lambda)J\Phi^*(b,0,\lambda)Q^*\big]=$$
$$=2Q\big[J-\Phi(b,0,\lambda)J\Phi^*(b,0,\lambda)\big]Q^*.$$

Далі на підставі унітарності матриці J та властивостей 5) і 4) фундаментальної матриці $\Phi(x,t,\lambda)$ маємо

$$J-\Phi(b,0,\lambda)J\Phi^*(b,0,\lambda)=\Phi(b,0,\lambda)J\left[\Phi^*(b,0,\overline{\lambda})J\Phi(b,0,\overline{\lambda})-J\right]J^*\Phi^*(b,0,\lambda)=$$
$$=(\overline{\lambda}-\lambda)\Phi(b,0,\lambda)J\Gamma(b,\overline{\lambda})J^*\Phi^*(b,0,\lambda),$$

де

$$\Gamma(x,\lambda)=\int_0^x \Phi^*(t,0,\lambda)dA(t)\Phi(t,0,\lambda). \tag{15}$$

Таким чином,

$$\operatorname{Im}X_{P,Q}(\lambda)=\operatorname{Im}\lambda\cdot\left[X_+^{-1}(\lambda)Q\Phi(b,0,\lambda)J\right]\Gamma(b,\overline{\lambda})\left[X_+^{-1}(\lambda)Q\Phi(b,0,\lambda)J\right]^*, \tag{16}$$

звідки при $\operatorname{Im}\lambda=0$ випливає, що $\operatorname{Im}X_{P,Q}(\lambda)=0$ за умови існування $X_+^{-1}(\lambda)$. Це означає, що $X_{P,Q}(\lambda)$ — ермітова матриця, крім полюсів, розміщених в особливих точках матриці $X_+^{-1}(\lambda)=\left[P+Q\Phi(b,0,\lambda)\right]^{-1}$, тобто крім нулів визначника $\det[P+Q\Phi(b,0,\lambda)]$, котрі є власними значеннями крайової задачі (6), (9).

До того ж, матриця $\Gamma(b,\overline{\lambda})$ додатно визначена, бо для довільного нетривіального розв'язку $Y^*(x,\lambda)$ задачі (6), (9)

$$\int_0^b Y^*(x,\lambda)dA(x)Y(x,\lambda)>0. \tag{17}$$

Дійсно, якщо припустити протилежне, то внаслідок того, що $A(x)$ — неспадна на $\mathbb{I}$ ермітова матриця–функція, будемо мати майже всюди (відносно міри Стільтьєса dA), що $Y^*(x,\lambda)dA(x)Y(x,\lambda)=0$, а відтак, $dA(x)Y(x,\lambda)=0$. Таким чином, вектор–функція $Y(x,\lambda)\neq 0$ задовольняє обидва рівняння $JY'-B'(x)Y=0$ та $A'(x)Y=0$ і крайову умову (9), що суперечить умові невиродженості розв'язків за параметром λ.

Отже, з рівності (16) при $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$ випливає нерівність (13). □

4. Вкладені матричні круги

Використаємо лему 1.1, щоб описати геометричне місце, до якого належить характеристична матриця (12).

Теорема 4.1. *Для фіксованого* λ $(\operatorname{Im}\lambda\neq 0)$ *характеристична матриця* $X_{P,Q}(\lambda)$ *належить до геометричного місця*

$$\left(X-\frac{J}{2}\right)\frac{J}{i}\left(X-\frac{J}{2}\right)^*=\left(X+\frac{J}{2}\right)\frac{\Phi^*(b,0,\overline{\lambda})J\Phi(b,0,\overline{\lambda})}{i}\left(X+\frac{J}{2}\right)^*, \tag{18}$$

яке за умови $\operatorname{Im}\lambda < 0$ *визначає матричне коло*

$$X = C(\lambda) + R_1^{1/2}(\lambda) U R_2^{1/2}(\lambda), \quad UU^* = I_p, \tag{19}$$

що лежить у нижній матричній півплощині $\operatorname{Im} X < 0$*, і має такі центр* $C(\lambda)$ *та лівий і правий радіуси* $R_1(\lambda)$ *і* $R_2(\lambda)$*:*

$$C(\lambda) = -\frac{1}{2}J + \left[\Phi^*(b,0,\overline{\lambda}) J \Phi(b,0,\overline{\lambda}) - J\right]^{-1}, \tag{20}$$

$$R_1(\lambda) = i\left[J - \Phi^*(b,0,\lambda) J \Phi(b,0,\lambda)\right]^{-1}, \tag{21}$$

$$R_2(\lambda) = i\left[\Phi^*(b,0,\overline{\lambda}) J \Phi(b,0,\overline{\lambda}) - J\right]^{-1}. \tag{22}$$

Доведення. Зафіксуємо довільне λ з $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$. З рівностей (14) маємо

$$P = \frac{1}{2}\left[X_+(\lambda) + X_-(\lambda)\right], \quad Q = \frac{1}{2}\left[X_+(\lambda) - X_-(\lambda)\right]\Phi(0,b,\lambda).$$

Внаслідок J–унітарності пари матриць (P,Q) справджується рівність

$$\left(X_- + X_+\right)\frac{J}{4}\left(X_- + X_+\right)^* = \left(X_- - X_+\right)\frac{\Phi(0,b,\lambda) J \Phi^*(0,b,\lambda)}{4}\left(X_- - X_+\right)^*.$$

Якщо обидві частини останньої рівності домножити зліва на $X_+^{-1}(\lambda)$ і справа на $X_+^{*\,-1}(\lambda)$, врахувати, що $J^* = J^{-1} = -J$, використати властивості 5) і 3) фундаментальної матриці $\Phi(x,t,\lambda)$, а також згадати, що $X_{P,Q}(\lambda) = -\frac{1}{2}X_+^{-1}(\lambda) X_-(\lambda) J$, то прийдемо до такої рівності:

$$\left(X_{P,Q}(\lambda) - \frac{J}{2}\right) J \left(X_{P,Q}(\lambda) - \frac{J}{2}\right)^* =$$
$$= \left(X_{P,Q}(\lambda) + \frac{J}{2}\right)\Phi^*(b,0,\overline{\lambda}) J \Phi(b,0,\overline{\lambda})\left(X_{P,Q}(\lambda) + \frac{J}{2}\right)^*.$$

Насамкінець, поділимо обидві її частини на i, аби забезпечити їх ермітовість. Внаслідок цього отримаємо геометричне місце (18) для $X_{P,Q}(\lambda)$.

Далі покажемо, що для матриць

$$F = \frac{J}{2}, \quad G = \frac{J}{i}, \quad H = \frac{\Phi^*(b,0,\overline{\lambda}) J \Phi(b,0,\overline{\lambda})}{i} \tag{23}$$

справджуються умови леми 1.1. Легко бачити, що ці матриці неособливі, причому G і H — ермітові. Якщо врахувати умову нормування

$\Phi(0,0,\overline{\lambda}) = I_p$ і властивість 4) фундаментальної матриці, а також вираз (15) бачимо, що $H - G = \frac{1}{i}\left[\Phi^*(b,0,\overline{\lambda})J\Phi(b,0,\overline{\lambda}) - J\right] = 2\mathrm{Im}\,\overline{\lambda}\cdot\Gamma(b,\overline{\lambda}) > 0$, бо за умовою теореми $\mathrm{Im}\,\lambda < 0$, а на підставі нерівності (17) $\Gamma(b,\overline{\lambda}) > 0$. Залишається показати, що матриця $G^{-1}H$ має додатні власні значення.

Нехай μ — довільне власне значення. Тоді існує ненульовий вектор $v \in \mathbb{C}^p$, для якого $G^{-1}Hv = \mu v$ Звідси випливає, що $Hv = \mu Gv$ та $(Hv,v) = \mu(Gv,v)$. Позаяк матриці G і H — ермітові, то обидва скалярні добутки — дійсні числа, тому μ могло б бути не дійсним лише за умови $(Hv,v) = (Gv,v) = 0$. Однак, у цьому випадку було б $((H-G)v,v) = 0$, що не можливо, бо $v \neq 0$, а $H - G > 0$. Це означає, матриця $G^{-1}H$ має лише дійсні власні значення.

Далі розглянемо загальнішу від H матрицю $H_x = \frac{\Phi^*(x,0,\overline{\lambda})J\Phi(x,0,\overline{\lambda})}{i}$, для якої $H_0 = G$ і $H_b = H$. Міркуючи за аналогією, приходимо до висновків, що $H_x > G$ для всіх $x \in (0,b]$ і всі власні значення матриці $G^{-1}H_x$ — дійсні, причому жодне з них не дорівнює нулеві, бо матриці G, H_x — неособливі. Для $x = 0$ маємо $G^{-1}H_0 = I_p$, тобто усі власні значення є додатними (рівними 1). Якщо x неперервно зростає від 0 до b, то неперервно змінюються також власні значення матриці $G^{-1}H_x$. При цьому вони залишаються дійсними і відмінними від нуля, а отже, додатними.

За лемою 1.1, центр $C(\lambda)$ та лівий і правий радіуси $R_1(\lambda)$ і $R_2(\lambda)$ матричного кола (19) обчислюються за формулами (4) і (5). Друга з цих формул після підставляння в неї матриць H і G з (23) відразу дає (21). Трохи видозмінивши першу і третю формули, маємо

$$C = -F\left[(H-G)+2G\right](H-G)^{-1} = -F - 2FGR_2,$$

$$R_1 = F\left[(H+G)+(H-G)\right](H-G)^{-1}\left[(H+G)-(H-G)\right]F^* = 4FHR_2GF^*.$$

Підставляючи в них отримані з (23) добутки $FG = -\frac{I_p}{2i}$, $GF^* = \frac{I_p}{2i}$, $FH = \frac{J\Phi^*(b,0,\overline{\lambda})J\Phi(b,0,\overline{\lambda})}{2i}$, маємо для центра $C(\lambda)$ формулу (20), а для лівого радіуса $R_1(\lambda)$ формулу (21). □

Наслідок 4.1. *Якщо* $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$, *то*

$$R_2(\lambda) = -R_1(\overline{\lambda}), \quad R_1(\lambda) - R_2(\lambda) = J/i, \quad R_1(\lambda) + R_2(\lambda) = 2iC(\lambda). \tag{24}$$

Тепер, для фіксованих чисел b $(b > 0)$ і λ $(\mathrm{Im}\,\lambda < 0)$ позначимо через $\mathfrak{S}(b,\lambda)$ замкнений матричний круг вигляду

$$\left(X - \frac{J}{2}\right)\frac{J}{i}\left(X - \frac{J}{2}\right)^* \geqslant \left(X + \frac{J}{2}\right)\frac{\Phi^*(b,0,\overline{\lambda})J\Phi(b,0,\overline{\lambda})}{i}\left(X + \frac{J}{2}\right)^* \tag{25}$$

або вигляду $X = C(b,\lambda) + R_1^{1/2}(b,\lambda)UR_2^{1/2}(b,\lambda),\ UU^* \leqslant I_p$.

Важливою є наступна властивість звуження таких матричних кругів.

Теорема 4.2. *При зростанні b матричний круг $\mathfrak{S}(b,\lambda)$ звужується, тобто при $b_2 > b_1 > 0$ справджується $\mathfrak{S}(b_2,\lambda) \subset \mathfrak{S}(b_1,\lambda)$.*

Доведення. Нехай $X \in \mathfrak{S}(b_2,\lambda)$, тобто справджується нерівність

$$\left(X-\frac{J}{2}\right)\frac{J}{i}\left(X-\frac{J}{2}\right)^* - \left(X+\frac{J}{2}\right)\frac{\Phi^*(b_2,0,\overline{\lambda})J\Phi(b_2,0,\overline{\lambda})}{i}\left(X+\frac{J}{2}\right)^* \geqslant 0.$$

При зростанні b матриця-функція $\frac{\Phi^*(b,0,\overline{\lambda})J\Phi(b,0,\overline{\lambda})}{i}$ принаймні не спадає, бо на підставі властивості 4) фундаментальної матриці для довільних $0 < b_1 < b_2$ при $\operatorname{Im}\lambda < 0$ і неспадній на $\mathbb{R}_+$ матриці $A(x)$ маємо

$$\left.\frac{\Phi^*(b,0,\overline{\lambda})J\Phi(b,0,\overline{\lambda})}{i}\right|_{b=b_1}^{b=b_2} = 2\operatorname{Im}\overline{\lambda}\int_{b_1}^{b_2}\Phi^*(x,0,\overline{\lambda})dA(x)\Phi(x,0,\overline{\lambda}) \geqslant 0. \tag{26}$$

Відтак

$$\left(X-\frac{J}{2}\right)\frac{J}{i}\left(X-\frac{J}{2}\right)^* - \left(X+\frac{J}{2}\right)\frac{\Phi^*(b_1,0,\overline{\lambda})J\Phi(b_1,0,\overline{\lambda})}{i}\left(X+\frac{J}{2}\right)^* \geqslant$$

$$\geqslant \left(X-\frac{J}{2}\right)\frac{J}{i}\left(X-\frac{J}{2}\right)^* - \left(X+\frac{J}{2}\right)\frac{\Phi^*(b_2,0,\overline{\lambda})J\Phi(b_2,0,\overline{\lambda})}{i}\left(X+\frac{J}{2}\right)^* \geqslant 0.$$

звідки випливає, що $X \in \mathfrak{S}(b_1,\lambda)$.

Таким чином, при зростанні b нерівність (25) накладає щоразу сильніші обмеження на матрицю X, тобто матричні круги $\mathfrak{S}(b,\lambda)$ звужуються (принаймні, не розширюються), а отже, залишаються рівномірно обмеженими при достатньо великих b. □

У випадку $\operatorname{Im}\lambda > 0$ потрібно перейти від λ до $\overline{\lambda}$ або ж замінити на протилежний знак нестрогої нерівності в (25).

5. Граничний круг і гранична точка

Позначимо через $\mathfrak{S}(\infty,\lambda)$ перетин усіх матричних кругів $\mathfrak{S}(b,\lambda)$, де λ — фіксоване у нижній (чи верхній) півплощині. Множина $\mathfrak{S}(\infty,\lambda)$ непорожня — вона включає границю центрів $C(b,\lambda)$ при $b \to \infty$ або, принаймні, граничну точку послідовності центрів. Більше того у всіх кругів у нижній матричній півплощині є спільна точка $X = -\frac{J}{2}$, а у верхній матричній півплощині — точка $X = \frac{J}{2}$.

З'ясуємо граничне поводження величин $C(b,\lambda)$, $R_1(b,\lambda)$, $R_2(b,\lambda)$, визначених рівностями (20)–(22). Використовуючи властивість 4) фундаментальної матриці та співвідношення (15) і (24), маємо
$R_1(b,\lambda) = \left[2\mathrm{Im}\,\overline{\lambda}\cdot\Gamma(b,\lambda)\right]^{-1}, \quad R_2(b,\lambda) = -R_1(b,\overline{\lambda}) = \left[2\mathrm{Im}\,\overline{\lambda}\cdot\Gamma(b,\overline{\lambda})\right]^{-1},$

$$C(b,\lambda) = \frac{R_1(b,\lambda)+R_2(b,\lambda)}{2i} = \left[4i\mathrm{Im}\,\overline{\lambda}\right]^{-1}\left[\Gamma^{-1}(b,\lambda)+\Gamma^{-1}(b,\overline{\lambda})\right].$$

Спільним у цих формулах є залежність матриць $C(b,\lambda)$, $R_1(b,\lambda)$, $R_2(b,\lambda)$ від матриці $\Gamma^{-1}(b,\lambda)$. Остання за наслідком 4.1 задовольняє рівність

$$\Gamma^{-1}(b,\lambda)-\Gamma^{-1}(b,\overline{\lambda}) = (\lambda-\overline{\lambda})J, \quad 0<b<\infty,\ \mathrm{Im}\,\lambda\neq 0. \tag{27}$$

При $b>b_0$ і фіксованому λ ($\mathrm{Im}\,\lambda<0$) матриця $\Gamma(b,\lambda)$ додатно визначена і неспадна функція від b. Відтак, $\Gamma^{-1}(b,\lambda)$ — додатно визначена і незростаюча функція від b і тому прямує до деякої границі $\Gamma(\lambda) = \lim\limits_{b\to\infty}\Gamma^{-1}(b,\lambda)$. Спрямовуючи в (27) $b\to\infty$, для граничної матриці $\Gamma(\lambda)$ отримаємо рівність

$$\Gamma(\lambda)-\Gamma(\overline{\lambda}) = (\lambda-\overline{\lambda})J, \quad \mathrm{Im}\,\lambda\neq 0. \tag{28}$$

Далі величини $C(b,\lambda)$, $R_1(b,\lambda)$, $R_2(b,\lambda)$ мають границі при $b\to\infty$, і тому матричний круг $\mathfrak{S}(b,\lambda)$ також збігається до деякого граничного круга $\mathfrak{S}(\infty,\lambda)$, який визначається співвідношенням

$$X = \left[4\mathrm{Im}\,\overline{\lambda}\right]^{-1}\left[2\Gamma(\lambda)U\Gamma(\overline{\lambda})-i\Gamma(\lambda)-i\Gamma(\overline{\lambda})\right], \quad UU^*\leqslant I_p. \tag{29}$$

Можливі два випадки: перетин кругів $\mathfrak{S}(b,\lambda)$ є *кругом* або *точкою*. Перший випадок (*граничного круга*) справджується, якщо обидва радіуси $R_k(\lambda) = \lim\limits_{b\to\infty}R_k(b,\lambda)$, $k=1,2$, не дорівнюють нулеві, другий випадок (*граничної точки*) — якщо один з радіусів дорівнює нулеві.

Зауважимо, що замість вейлівської альтернативи "граничний круг" чи "гранична точка" за аналогією до [13] можна розглядати проблему інваріантності рангів радіусів $R_1(\lambda) = \frac{\Gamma(\lambda)}{2\mathrm{Im}\,\overline{\lambda}}$ та $R_2(\lambda) = \frac{\Gamma(\overline{\lambda})}{2\mathrm{Im}\,\overline{\lambda}}$ граничного круга (29).

6. dA–інтегровні з квадратом розв'язки

На завершення, з'ясуємо питання про кількість лінійно незалежних розв'язків системи (6), що є dA–інтегровними з квадратом на півосі, тобто належать до $L^2_{dA}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^p)$. Оскільки довільний розв'язок системи (6) має вигляд $Y(x,\lambda) = \Phi(x,0,\lambda)Y(0)$, то умова $\int_0^\infty Y^*(x,\lambda)dA(x)Y(x,\lambda) < \infty$ приналежності розв'язку $Y(x,\lambda)$ до $L^2_{dA}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^p)$ для довільного $\lambda \in \mathbb{C}$ еквівалентна такому співвідношенню:

$$\lim_{b\to\infty} v^*\Gamma(b,\lambda)v < \infty, \quad v = Y(0) \neq 0. \tag{30}$$

У випадку граничного круга, коли матриця $\Gamma(b,\lambda)$ прямує до скінченної границі при $b \to \infty$, співвідношення (30) справджується для всіх v, тобто усі розв'язки системи (6) належать до $L^2_{dA}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^p)$. Крім того, у цьому випадку кількість таких лінійно незалежних розв'язків не залежить від λ.

Теорема 6.1. *Нехай для деякого $\lambda \in \mathbb{C}$ в усіх точках $x_s \in \mathbb{R}_+$ розривів матриць $B(x)$ і $A(x)$ справджується умова*

$$\det\{E - J[\Delta B(x_s) + \lambda\Delta A(x_s)]\} = 1 \tag{31}$$

і функція $\operatorname{tr}\big(JA_c(x)\big)$*, де $A_c(x)$ — неперервна компонента матриці $A(x)$, є сталою на півосі $\mathbb{R}_+$. Якщо за таких припущень усі розв'язки системи* (6) *належать до $L^2_{dA}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^p)$ при одному значенні λ, то це справджується і для решти значень λ.*

Зауважимо, що у випадку системи диференціальних рівнянь з інтегровними за Лебегом коефіцієнтами (тобто, коли в (6) елементи матриць $B(x)$ і $A(x)$ — абсолютно неперервні функції) виконання умови (31) очевидне [1, с. 296]. Для узагальненої диференціальної системи ця умова справджується, зокрема, якщо $E - J[\Delta B(x_s) + \lambda\Delta A(x_s)]$ — трикутна матриця з одиницями на головній діагоналі, що завжди виконується при дослідженні квазідиференціальних рівнянь з коефіцієнтами–мірами [16]. З приводу другої умови теореми 6.1 можна сказати, що вона виглядає дещо неприродною і що більш доречною є, наприклад, вимога дійснозначності матриці $JA(x)$, внаслідок якої $\operatorname{tr}\big(JA(x)\big)$ загалом і $\operatorname{tr}\big(JA_c(x)\big)$ зокрема дорівнюють нулеві. Тим не менше, у застосуваннях до узагальнених квазідиференціальних рівнянь матриця–міра $JA'(x)$ завжди має рівні нулеві діагональні елементи, відтак вказане у теоремі обмеження для таких рівнянь завчасно виконане.

У випадку граничної точки усе залежатиме від поводження власних значень матриці $\Gamma(b,\lambda)$. Нехай вони впорядковані з врахуванням їх кратності, тобто $\mu_1(b) \leqslant \mu_2(b) \leqslant \ldots \leqslant \mu_p(b)$. Нагадаємо, що усі власні значення, як зрештою і сама матриця $\Gamma(b,\lambda)$, — невід'ємні і неспадні функції від b. При $b \to \infty$ деякі з них можуть залишатися обмеженими, а решта — ні, тобто $\mu_r(\infty) < \infty,\ r = \overline{1,q},\ q < p$. Нехай $v_r(b),\ r = \overline{1,q}$ — відповідні їм ортонормовані власні вектори матриці $\Gamma(b,\lambda)$. Позаяк $\Gamma(b,\lambda)$ — неспадна функція від b, то для $b_1 < b_2 < \infty$ при $r = \overline{1,q}$ маємо

$$v_r^*(b_1)\Gamma(b_1,\lambda)v_r(b_1) \leqslant v_r^*(b_2)\Gamma(b_2,\lambda)v_r(b_2) = \mu_r(b_2).$$

Компоненти векторів $v_r(b),\ r = \overline{1,q}$ є рівномірно обмеженими, відтак самі вектори поелементно збігаються при $b \to \infty$ по деякій підпослідовності значень b. Спрямовуючи $b \to \infty$ по цій підпослідовності, отримаємо $\lim\limits_{b\to\infty} v_r^*(b)\Gamma(b,\lambda)v_r(b) \leqslant \mu_r(\infty),\ r = \overline{1,q}$. Звідси випливатиме, що q лінійно незалежних розв'язків володіють властивістю (30). У цьому випадку можна вказати нижню межу для кількості таких розв'язків.

Теорема 6.2. *Нехай матриця $-iJ$ має p^- від'ємних і p^+ додатних власних значень $(p^- + p^+ = p)$. Тоді система* (6) *на півосі $\mathbb{R}_+$ має принаймні p^- лінійно незалежних розв'язків з $L^2_{dA}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^p)$ у верхній півплощині* $\operatorname{Im}\lambda > 0$ *і p^+ таких розв'язків у нижній півплощині* $\operatorname{Im}\lambda < 0$.

На завершення, зазначимо, що якщо вейлівську альтернативу розглядати як проблему інваріантності рангів радіусів граничного круга (29), то кількість лінійно незалежних розв'язків з $L^2_{dA}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^p)$ дорівнюватиме рангу матриці $R_1(\lambda)$ або $\Gamma(\lambda)$ і не залежатиме від λ [13]. Зокрема, у застосуваннях до узагальнених квазідиференціальних рівнянь $2n$–го порядку матриця J має вигляд $J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$. Відтак зі співвідношення (28) випливає, що матриця $\Gamma(\lambda)$ при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ має ранг не менший від n і, таким чином, максимальна кількість m лінійно незалежних розв'язків з $L^2_{dA}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^p)$ при $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$ задовольняє нерівність $n \leqslant m \leqslant 2n$.

7. Висновки та подальші дослідження

Як бачимо, у нашому дослідженні ключовим є дробово–лінійне перетворення, в якому допустимі пари крайових матриць (P,Q) відображаються у матричні N–функції $X_{P,Q}(b,\lambda)$, на основі яких будується матриця Ґріна $K(x,t,\lambda)$. Якщо пари (P,Q) пробігають усю множину неособливих J–унітарних пар, їх образи $X_{P,Q}(b,\lambda)$ при фіксованому λ $(\operatorname{Im}\lambda \neq 0)$ належать до деякого незалежного від крайових матриць P,Q геометричного місця, яке у матричних термінах можна тлумачити, як аналог круга. При зростанні параметра b, ці круги мають властивість звужуватися. Перетином кругів є деякий граничний круг, який, однак, може вироджуватися у точку, якщо один з його радіусів дорівнює нулеві. Таким чином, вдалося поширити теорію граничного круга і граничної точки на випадок диференціальних систем з мірами та дослідити питання кількості лінійно незалежних розв'язків системи (6) з простору $L^2_{dA}(\mathbb{R}_+,\mathbb{C}^p)$.

Важливим наслідком цієї теорії є обмеженість характеристичної матриці $X_{P,Q}(b,\lambda)$ при фіксованому λ та $b\to\infty$, що у свою чергу дає можливість отримати оцінки для спектральної матриці крайової задачі (6), (9) і підстави для граничного переходу. Ці питання спектральної теорії через брак місця опинились за межами цієї публікації, їх ми сподіваємось розглянути в одній з наступних робіт.

References

1. Atkinson F.V. Discrete and Continuous Boundary Problems. Academic Press, New York, 1964.
2. Behrndt J., Hassi S., Snoo H., Wietsma R. Square-integrable solutions and Weyl functions for singular canonical systems. Math. Nachr. 284, 1334-1384 (2011).
3. Berezanskii Yu.M. Expansion according to eigenfunction of a partial difference equation of order two. Trudy Mosk. Mat. Obsc. 5, 203–268 (1956).
4. Bohner M., Sun S. Weyl–Titchmarsh theory for symplectic difference systems, Appl. Math. Comput. 216 (10), 2855-2864 (2010).
5. Clark S., Gesztesy F. On Weyl-Titchmarsh theory for singular finite difference Hamiltonian systems. J. Comput. Appl. Math. 171, 151-184 (2004).
6. Everitt W.N. Singular Differential Equations II, Some Self-Adjoint Even Order Cases. Quart. J. Math. (Oxford) 18, 13-32 (1967).
7. Everitt W.N. Integral-square, analytic solutions of odd-order, formally symmetric differential equations. Proc. London Math. Soc. 25, 156-182 (1972).
8. Hinton D.B., Shaw J.K. On Titchmarsh-Weyl $M(\lambda)$-functions for linear Hamiltonian systems. J. Differential Equations, 40 (3), 316-342 (1981).
9. Kogan V.I., Rofe-Beketov F.S. On square-integrable solutions of symmetric systems of differential equations of arbitrary order. Proc. Roy. Soc. Edinburgh A 74, 1–40 (1974).
10. Krall A.M. Hilbert Space, Boundary Value Problems and Orthogonal Polynomials. Operator Theory, Vol. 133, Birkhäuser, Basel, 2002.
11. Lidskii, V. B. A non-selfadjoint operator of Sturm-Liouville type with a discrete spectrum. Trudy Mosk. Mat. Obsc. 9, 45-79 (1960).

12. Mazurenko, V.V., Tatsii, R.M. Solvability of a nonhomogeneous boundary value problem for a differential system with measures. Differential Equations, 39 (3), 353–361 (2003).
13. Orlov S.A. Nested matrix disks analytically depending parameter, and theorems on the invariance radii of limiting disks. Math. USSR-Izv. 10 (3), 565–613 (1976).
14. Serebryakov V.P. Weyl discs for Jacobi block matrices. Differential Equations, 22 (9), 1545–1551 (1986).
15. Shi Y. Weyl–Titchmarsh theory for a class of discrete linear Hamiltonian systems. Linear Algebra Appl. 416 (2–3), 452-519 (2006).
16. Тацій Р.М, Стасюк М.Ф, Мазуренко В.В., Власій О.О. Узагальнені квазідиференціальні рівняння. – Дрогобич: Коло, 2011.
17. Titchmarsh E.C. Eigenfunction Expansions. Oxford University Press, Oxford, 1962.
18. Walker P.W. A vector-matrix formulation for formally symmetric ordinary differential equations with applications to solutions of integrable square. J. London Math. Soc. 9 (2), 151-159 (1974).
19. Weyl H. Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen willkürlicher Funktionen. Math. Ann. 68, 220–269 (1910).
20. Weyl H. Über das Pick-Nevanlinna'sche Interpolationsproblem und sein infinitesimales Analogon. Ann. Math. 36 (1), 230–254 (1935).
21. Zettl A. Formally Self-Adjoint Quasi-Differential Operators. Rocky Mountain J. Math. 5, 453-474 (1975).

Стаття надійшла до редакційної колегії 03.11.2023 р.

SQUARE *dA*-INTEGRABLE SOLUTIONS OF DIFFERENTIAL SYSTEMS WITH MEASURES ON THE SEMIAXIS

V.V. Mazurenko[1], **O.V. Mazurenko**[2]
[1]*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;*
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenka, 57, Ukraine;
[2]*Ivan Franko National University of Lviv;*
79000, Lviv, Universytetska, 1, Ukraine;
e-mail: viktor.mazurenko@pnu.edu.ua, oles.mazurenko@lnu.edu.ua

This paper extends the Weyl-Titchmarsh theory to the case of generalized differential systems. It is that proved the characteristic matrix of the resolvent kernel of a differential system with measures belongs to a locus, which is a matrix analog of the Weyl disk. It is established that such matrix *disks are nested and converge to the limiting disk or point depending on the limiting behavior of the radii. This limiting set plays an important role in discussing of the number of solutions to such system that are square dA-integrated on the semiaxis.*

Key words: *differential system with measures, Green's matrix, characteristic matrix, Weyl–Titchmarsh theory, matrix limiting disk, square dA-integrable solution.*