УДК 517.95+511.2
DOI: 10.31471/2304-7399-2023-18(68)-54-62

ЗАДАЧА СПРЯЖЕННЯ З БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ МІШАНОГО РІВНЯННЯ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ

І. Я. Савка[1], І. Р. Тимків[2]
[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 79060, м. Львів, вул. Наукова 3-б;
[2]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76018, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
e-mail: tymkiv_if@ukr.net

В шкалі просторів Соболєва отримано коректну розв'язність задачі спряження з локальними багатоточковими умовами за виділеною змінною та умовами періодичності за іншою координатою для мішаних рівнянь гіперболічного типу високих порядків. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі. Доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів складених з вузлів інтерполяції багатоточкових умов.

Ключові слова: *мішане рівняння, гіперболічне рівняння,умови спряження, багатоточкові умови, малий знаменник, міра Лебега.*

Задачі спряження для диференціальних рівнянь моделюють процеси, що проходять у двошарових середовищах із різко відмінними фізичними властивостями. При цьому на одній частині шару області задається одне рівняння, а на другій – інше рівняння, можливо, відмінного типу чи порядку [3, 8, 9, 10, 13]. Розв'язності крайових задач для диференціальних рівнянь змішаного типу активно розглядались у роботах [1, 2, 7, 11, 12, 14]. Для обмежених областей крайові задачі, взагалі кажучи, є некоректними за Адамаром, а існування їхніх розв'язків у багатьох випадках пов'язане з проблемою малих знаменників (див., наприклад, [4, 5, 6]). Маловивченими залишаються задачі спряження для різнотипних рівнянь високих порядків.

1. Постановка задачі. У даній роботі у циліндричній області розглядається задача спряження для двох рівнянь гіперболічного типу високих порядків n і m відповідно, однорідних за порядком диференціювання, з локальними багатоточковими умовами, які містять значення невідомої функції та її похідних.

Надалі використаємо такі позначення: Ω – коло радіуса 1, $D=\{(t,x): t\in\left(-T,T\right), x\in\Omega\}$, де $T>0$; $D_-=D\cap\{t<0\}$, $D_+=D\cap\{t>0\}$;

H_q, $q \in R,$ – простір, одержаний поповненням простору скінченних сум $\varphi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \varphi_k e^{ikx}$, за нормою $\|\varphi; H_q\| = \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\varphi_k|^2 (1+|k|)^{2q}}$, де $\varphi_k \in C$; $C^n([0,T]; H_q)$, $n \in Z_+$, – простір функцій $u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k(t) e^{ikx}$, $u_k(t) \in C([0,T])$, таких, що для кожного фіксованого $t \in [0,T]$ похідні $\frac{\partial^s u(t,x)}{\partial t^s} := \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k^{(s)}(t) e^{ikx}$, $s \in \{0,1,\ldots,n\}$, належать до простору H_{q-s} і є неперервними за t в нормі цього простору $\|u; C^n([0,T]; H_q)\| = \sum_{s=0}^{n} \max_{t \in [0,T]} \left\| \frac{\partial^s u(t,\cdot)}{\partial t^s}; H_{q-s} \right\|$.

В області D розглянемо задачу

$$\begin{cases} L_1(\partial/\partial t, \partial/\partial x) u = \dfrac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^n} + \sum\limits_{s=1}^{n} a_s \dfrac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^{n-s} \partial x^s} = 0, \quad (t,x) \in D_-, \\ L_2(\partial/\partial t, \partial/\partial x) u = \dfrac{\partial^m u(t,x)}{\partial t^m} + \sum\limits_{s=1}^{m} b_s \dfrac{\partial^m u(t,x)}{\partial t^{m-s} \partial x^s} = 0, \quad (t,x) \in D_+, \end{cases} \tag{1}$$

розглянемо задачу з умовами спряження при $t = 0$ та локальними багатоточковими умовами

$$\lim_{t \to -0} \frac{\partial^{q-1} u(t,x)}{\partial t^{q-1}} = \lim_{t \to +0} \frac{\partial^{q-1} u(t,x)}{\partial t^{q-1}}, q \in \{1,\ldots,\theta\},\ 1 < \theta \le \min\{n,m\}, \tag{2}$$

$$\begin{cases} U_{1,j}(\partial/\partial t)\, u(t,x)\big|_{t=t_j} = \varphi_j(x),\ j \in \{1,\ldots,r\}, -T \le t_1 < \ldots < t_r < 0, 1 \le r \le n, \\ U_{2,j}(\partial/\partial t)\, u(t,x)\big|_{t=t_j} = \varphi_j(x),\ j \in \{r+1,\ldots,\ell\}, 0 < t_{r+1} < \ldots < t_\ell \le T, \ell = n+m-\theta, \end{cases} \tag{3}$$

де $a_s, b_s \in R,\ n,m \in N,\ U_{1,j}(\partial/\partial t) = \sum_{q=0}^{n-1} \beta_{1,q}^j \frac{\partial^q}{\partial t^q}$, $U_{2,j}(\partial/\partial t) = \sum_{q=0}^{m-1} \beta_{2,q}^j \frac{\partial^q}{\partial t^q}$, $\beta_{1,q,}^j, \beta_{2,q,}^j \in C,\ \beta_{1,n-1}^j \ne 0,\ \beta_{2,m-1}^j \ne 0,\ j \in \{1,\ldots,\ell\}$. Вважатимемо, що рівняння (1) гіперболічне.

Означення: *Розв'язком задачі* (1) – (3) *називаємо таку функцію* $u = u(t,x)$, *що*

$$u \in C^n([-\mathrm{T},0]; \mathrm{H}_q),\ u \in C^m([0,\mathrm{T}]; \mathrm{H}_q),$$

$$\|L_1(\partial/\partial t, \partial/\partial x) u; C([-T,0]; H_{q-n})\| = 0,$$

$$\|L_2(\partial/\partial t, \partial/\partial x) u; C([0,T]; H_{q-m})\| = 0,$$

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \left\| \frac{\partial^{j-1} u(-\varepsilon,\cdot)}{\partial t^{j-1}} - \frac{\partial^{j-1} u(\varepsilon,\cdot)}{\partial t^{j-1}}; H_{q+1-j} \right\| = 0, \quad j \in \{1,\ldots,\theta\},$$

$$\left\| U_{1,j}(\partial/\partial t)u(t,\cdot)\big|_{t=t_j} - \varphi_j(\cdot); H_{q+1-n} \right\| = 0, \quad j \in \{1,\dots,r\},$$

$$\left\| U_{2,j}(\partial/\partial t)u(t,\cdot)\big|_{t=t_j} - \varphi_j(\cdot); H_{q+1-m} \right\| = 0, \quad j \in \{r+1,\dots,\ell\}.$$

2. Побудова формального розв'язку. Розв'язок задачі (1) – (3) шукаємо у вигляді ряду Фур'є

$$u(t,x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} u_k(t) e^{ikx} . \tag{4}$$

Кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in \mathbb{Z}$ розв'язком рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{d^n u_k(t)}{dt^n} + \sum\limits_{s=1}^{n} a_s (ik)^s \dfrac{d^n u_k(t)}{dt^{n-s}} = 0, \quad t < 0, \\ \dfrac{d^m u_k(t)}{dt^m} + \sum\limits_{s=1}^{m} b_s (ik)^s \dfrac{d^m u_k(t)}{dt^{m-s}} = 0, \quad t > 0, \end{cases} \tag{5}$$

справджує умови спряження

$$\lim_{t\to -0} \frac{d^{q-1}u_k(t)}{dt^{q-1}} = \lim_{t\to +0} \frac{d^{q-1}u_k(t)}{dt^{q-1}}, q \in \{1,\dots,\theta\}, \tag{6}$$

і багато точкові умови

$$\begin{cases} U_{1,j}(d/dt)u_k(t)\big|_{t=t_j} = \varphi_{k,j}, \ j \in \{1,\dots,r\}, -T \le t_1 < \dots < t_r < 0, \ \ 1 \le r \le n, \\ U_{2,j}(d/dt)u_k(t)\big|_{t=t_j} = \varphi_{k,j}, j \in \{r+1,\dots,\ell\}, 0 < t_{r+1} < \dots < t_\ell \le T, \ell = n+m-\theta. \end{cases} \tag{7}$$

Із гіперболічності рівняння (1) випливає, що корені рівнянь $L_1(\lambda,1) = 0$ і $L_2(\mu,1) = 0$ є простими. Позначимо їх через $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ і $\mu_1,\dots,\mu_m$ відповідно.

Розв'язок рівняння (5) при $k \neq 0$ шукаємо у вигляді

$$u_k(t) = \begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{n} C_s(k) e^{ik\lambda_s t}, \quad t < 0, \\ \sum\limits_{s=1}^{m} C_{n+s}(k) e^{ik\mu_s t}, \quad t > 0, \end{cases} \tag{8}$$

де $C_s(k)$ визначаються і системи рівнянь

$$\begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{n} C_s(k)(ik\lambda_s)^{q-1} = \sum\limits_{s=1}^{m} C_{n+s}(k)(ik\mu_s)^{q-1}, \quad q \in \{1,\dots,\theta\}, \\ \sum\limits_{s=1}^{n} C_s(k) U_{1,j}(ik\lambda_s) e^{ik\lambda_s t_j} = \varphi_{k,j}, \qquad j \in \{1,\dots,r\}, \qquad k \in Z \setminus \{0\}. \\ \sum\limits_{s=1}^{m} C_s(k) U_{2,j}(ik\mu_s) e^{ik\mu_s t_j} = \varphi_{k,j}, \qquad j \in \{r+1,\dots,\ell\}. \end{cases} \tag{9}$$

Визначник системи (9) зображується формулою

$$\Delta(k)=(ik)^{\theta-1}\begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & -1 & \dots & -1 \\ \lambda_1 & \dots & \lambda_n & -\mu_1 & \dots & -\mu_m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{\theta-1} & \dots & \lambda_n^{\theta-1} & -\mu_1^{\theta-1} & \dots & -\mu_m^{\theta-1} \\ U_{1,1}(ik\lambda_1)e^{ik\lambda_1 t_1} & \dots & U_{1,j}(ik\lambda_n)e^{ik\lambda_n t_1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_{1,r}(ik\lambda_1)e^{ik\lambda_1 t_r} & \dots & U_{1,r}(ik\lambda_n)e^{ik\lambda_n t_r} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & U_{2,r+1}(ik\mu_1)e^{ik\mu_1 t_{r+1}} & \dots & U_{2,r+1}(ik\mu_m)e^{ik\mu_m t_{r+1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & U_{2,\ell}(ik\mu_1)e^{ik\mu_1 t_\ell} & \dots & U_{2,\ell}(ik\mu_m)e^{ik\mu_m t_\ell} \end{vmatrix},$$

$$k\in Z\setminus\{0\}.$$

При $k=0$ розв'язком задачі (5) – (7) є многочлени степенів n і m відповідно

$$u_0(t)=\begin{cases} \sum\limits_{s=1}^{n} C_s(0)t^{s-1}, & t<0, \\ \sum\limits_{s=1}^{m} C_{n+s}(0)t^{s-1}, & t>0, \end{cases}$$

коефіцієнти яких визначаються із системи, яку отримуємо з умов (5), (6), визначник цієї системи $\Delta(0)$.

Якщо виконується умова

$$\forall k\in Z \qquad \Delta(k)\neq 0, \tag{10}$$

то застосовуючи правило Крамера для знаходження розв'язків системи (9) та підставляючи отримані вирази у формули (8), встановлюємо, що задача (5) – (7) має єдиний розв'язок, який зображується рівністю

$$u_k(t)=\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{\ell}\dfrac{\Delta_{s+\theta,j}(k)\varphi_{k,s}}{\Delta(k)}e^{ik\lambda_j t}, & t<0, \\ \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{s=1}^{\ell}\dfrac{\Delta_{s+\theta,n+j}(k)\varphi_{k,s}}{\Delta(k)}e^{ik\mu_j t}, & t>0, \end{cases} \qquad k\in Z, \tag{11}$$

де $\Delta_{q,j}(k)$, $q\in\{\theta+1,\dots n+m\}$, $j\in\{1,\dots,n+m\}$ – алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині q-го рядка та j-го стовпця у визначнику $\Delta(k)$. Таким чином враховуючи (4), (11) отримуємо формальне зображення розв'язку задачі (1) – (3)

$$u(t,x)=u_0(t)+\begin{cases} \sum\limits_{k\in Z\setminus\{0\}}\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{s=1}^{\ell}\dfrac{\Delta_{s+\theta,j}(k)\varphi_{k,s}}{\Delta(k)}e^{ik(\lambda_j t+x)}, & t<0, \\ \sum\limits_{k\in Z\setminus\{0\}}\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{s=1}^{\ell}\dfrac{\Delta_{s+\theta,n+j}(k)\varphi_{k,s}}{\Delta(k)}e^{ik(\mu_j t+x)}, & t>0. \end{cases} \tag{12}$$

3. Існування розв'язку. Збіжність ряду (12) пов'язана з проблемою малих знаменників оскільки величини $\Delta(k)$, $k \in Z\setminus\{0\}$, будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості цілих k і спричиняти розбіжність (12).

Теорема 1. *Нехай виконується умова* (10) *та існує стала* $\omega \in R$ *така що для всіх (крім скінченної кількості) цілих* k *виконується*

$$\left|\Delta(k)\right| > C_1(1+|k|)^{-\omega}. \tag{13}$$

Якщо $\varphi_j \in H_{q+\theta+\omega+r(n-1)+(\ell-r)(m-1)-1}$, $j \in \{1,\ldots,\ell\}$, *то існує єдиний розв'язок задачі* (1) – (3). *Цей розв'язок неперервно залежить від функцій* φ_j, $j \in \{1,\ldots,\ell\}$.

Доведення. Із (11) на підставі нерівностей (13) отримуємо, що

$$\left|u_k^{(j)}(t)\right| \le C_2 \sum_{s=1}^{\ell} \left|\varphi_{k,s}\right| (1+|k|)^{\omega+\theta+r(n-1)+(\ell-r)(m-1)+j-1}, \\ j \in \{0,1,\ldots,\max\{n,m\}\}, \quad k \in Z\setminus\{0\}. \tag{14}$$

Із нерівностей (14) випливає, що для ряду (12) виконуються оцінки

$$\begin{aligned} &\left\|u \in C^n([-\mathrm{T},0];\mathrm{H}_q)\right\| \le C_3 \sum_{s=1}^{\ell} \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\varphi_{k,s}\right|^2 (1+|k|)^{2(\omega+\theta+r(n-1)+(\ell-r)(m-1)-1)}} \\ &= C_3 \sum_{s=1}^{\ell} \left\|\varphi_s; \mathrm{H}_{q+\omega+\theta+r(n-1)+(\ell-r)(m-1)-1}\right\|, \\ &\left\|u \in C^m([0,\mathrm{T}];\mathrm{H}_q)\right\| \le C_4 \sum_{s=1}^{\ell} \sqrt{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left|\varphi_{k,s}\right|^2 (1+|k|)^{2(\omega+\theta+r(n-1)+(\ell-r)(m-1)-1)}} \\ &= C_4 \sum_{s=1}^{\ell} \left\|\varphi_s; \mathrm{H}_{q+\omega+\theta+r(n-1)+(\ell-r)(m-1)-1}\right\|, \end{aligned} \tag{15}$$

де C_3, C_4 – додатні сталі, які від k не залежать. Із отриманих оцінок (15) випливає твердження теореми.

4. Оцінка малих знаменників. Проаналізуємо умови виконання нерівностей (13). Для цього скористаємось метричним підходом [5], який полягає у вивченні міри множин параметрів задачі, зокрема у розглядуваному випадку – вузлів інтерполяції $t_1,\ldots,t_\ell$. Для оцінювання малих знаменників використаємо допоміжне твердження.

Лема 1. *Для довільних фіксованих* $\beta_{1,q}^j$, $\beta_{2,s}^j$, $j \in \{1,\ldots,\ell\}$, $q \in \{1,\ldots,n\}$, $s \in \{1,\ldots,m\}$, *нерівності*

$$\left|U_{1,j}(ik\lambda_q)\right| \ge C_5(1+|k|)^{n-1}, \quad \left|U_{2,j}(ik\mu_s)\right| \ge C_6(1+|k|)^{m-1},$$

виконуються для всіх $k \in Z\setminus\{0\}$.

Позначимо:

$$P_q(\lambda,k) = (\lambda - ik\lambda_1)\ldots(\lambda - ik\lambda_{n+q-r-1}),\ q \in \{1,\ldots,r\},$$

$$P_q(\mu,k) = (\mu - ik\mu_1)\ldots(\mu - ik\mu_{m+q-\ell-1}),\ q \in \{r+1,\ldots,\ell\},$$

$$\Lambda_q=(\lambda_{n+q-r}-\lambda_1)\ldots(\lambda_{n+q-r}-\lambda_{n+q-r-1}),\ q\in\{1,\ldots,r\},$$
$$M_q=(\mu_{m+q-\ell}-\mu_1)\ldots(\mu_{m+q-\ell}-\mu_{m+q-\ell-1}),\ q\in\{r+1,\ldots,\ell\}.$$

Теорема 2. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в R^ℓ) векторів $\vec{t}\in[0,T]^\ell$ нерівність (13) виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k\in Z\setminus\{0\}$ при $\omega>r(3n-r-2)/2+(\ell-r)(3m-\ell+r-2)/2-\theta$.*

Доведення. З огляду на лему Бореля Кантеллі для доведення теореми досить встановити, що збіжним є ряд

$$\sum_{k\in Z} mes_{R^\ell} W(k), \qquad (16)$$

де $W(k)$ множина тих векторів $\vec{t}\in[0,T]^\ell$, для яких нерівність, протилежна до нерівності (13), виконується при фіксованому $k\in Z\setminus\{0\}$. Щоб встановити збіжність ряду (16), доведемо, що для всіх $k\in Z\setminus\{0\}$ виконується оцінка

$$mes_{R^\ell} W(k)\le C_5(1+|k|)^{-1-\varepsilon},\quad \varepsilon>0. \qquad (17)$$

Для цього запровадимо позначення: $\delta_q(k,t_1,\ldots,t_q)$ − визначник, який отримується з визначника $\Delta(k,\vec{t})$ викреслюванням останніх $\ell-q$ рядків та останніх $\ell-r$ стовбців,а також $r-q$ стовбців номери яких складають множину $\{n-r+q+1,\ldots,n\}$, $q\in\{1,\ldots,r\}$; $\delta_q(k,t_1,\ldots,t_q)$, − визначник, який отримується з визначника $\Delta(k,\vec{t})$ викреслюванням останніх $\ell-q$ рядків та останніх $\ell-q$ стовбців $q\in\{r+1,\ldots,\ell\}$, зрозуміло, що $\delta_\ell(k,t_1,\ldots,t_\ell)=\Delta(k,\vec{t})$. Для кожного $k\in Z\setminus\{0\}$ розглянемо множини:

$$W_q(k)=\{\vec{t}\in[0,T]^n : |\delta_q(k,t_1,..,t_q)|<\nu_q(k), |\delta_{q-1}(k,t_1,\ldots,t_{q-1})|\ge\nu_{q-1}(k)\},$$

де числа $\nu_q(k)$, $q\in\{1,\ldots,\ell\}$, визначаються таким чином:

$$\nu_q(k)=(1+|k|)^{-q(2n-q-1)/2-\varepsilon_q}\prod_{j=1}^{q}\left|U_{1,j}(ik\lambda_{n+j-r})\right|,\quad q\in\{1,\ldots,r\},$$

$$\nu_q(k)=(1+|k|)^{-r(2n-r-1)/2-(q-r)(2m-q+r-1)/2-\varepsilon_q}\prod_{j=1}^{r}\left|U_{1,j}(ik\lambda_{n+j-r})\right|\prod_{j=r+1}^{q}\left|U_{2,j}(ik\mu_{m+j-\ell})\right|,$$

$$q\in\{r+1,\ldots,\ell\},\ 0<\varepsilon_1<\ldots<\varepsilon_\ell.$$

Легко перевірити, що $W(k)\subset\bigcup_{q=1}^{\ell}W_q(k)$. Тому

$$mes_{R^\ell} W(k)\le\sum_{q=1}^{n} mes_{R^\ell} W_q(k). \qquad (18)$$

Оцінимо зверху міри Лебега множин $W_q(k,\vec{\tau}_q)$, $q\in\{1,\ldots,\ell\}$, де $\vec{\tau}_q=(t_1,\ldots,t_{q-1},t_{q+1},\ldots,t_\ell)$, $d\vec{\tau}_q=dt_1\ldots dt_{q-1}dt_{q+1}\ldots dt_\ell)$, $W_q(k,\vec{\tau}_q)=\{t_q\in[0,T]:\vec{t}\in W_q(k)\}$, $q\in\{1,\ldots,\ell\}$.

Для цього розкладемо визначник $\delta_q(k,t_1,\ldots,t_q)$ за елементами останнього рядка і до отриманої рівності застосуємо диференціальний вираз $P_q\left(\partial/\partial t_q,k\right)$, одержимо

$$\begin{aligned}
&P_q\left(\partial/\partial t_q,k\right)\delta_q(k,t_1,\ldots,t_q)=(ik)^{n+q-r-1}\exp(i\lambda_q k t_q)\delta_{q-1}(k,t_1,\ldots,t_{q-1})\times\\
&\times\Lambda_q U_{1,q}(ik\lambda_{n+q-r}),\quad q\in\{2,\ldots,r\},\\
&P_q\left(\partial/\partial t_q,k\right)\delta_q(k,t_1,\ldots,t_q)=(ik)^{m+q-\ell-1}\exp(i\mu_q k t_q)\delta_{q-1}(k,t_1,\ldots,t_{q-1})\times\\
&\times M_q U_{2,q}(ik\mu_{m+q-\ell}),\quad q\in\{r+1,\ldots,\ell\}.
\end{aligned}\tag{19}$$

Зазначимо, що функція $\delta_q(k,t_1,\ldots,t_q)$, $q\in\{1,\ldots,\ell\}$, як функція змінної t_q (при фіксованих $t_1,\ldots,t_{q-1}$), є квазімногочленом, модулі показників експонент якого не перевищують $T\,|k|$. Якщо $\vec{t}\in W_q(k)$, $q\in\{1,\ldots,\ell\}$, то з (19) та означення множин $W_q(k)$ випливає, що

$$\begin{aligned}
&\forall t_q\in[0,T]\quad \left|P_q\left(\partial/\partial t_q,k\right)\delta_q(k,t_1,\ldots,t_q)\right|\ge|\Lambda_q U_{1,q}(ik\lambda_{n+q-r})|\times\\
&\times(1+|k|)^{n+q-r-1}\nu_{q-1}(k),\quad q\in\{1,\ldots,r\},\\
&\forall t_q\in[0,T]\quad \left|P_q\left(\partial/\partial t_q,k\right)\delta_q(k,t_1,\ldots,t_q)\right|\ge|M_q U_{2,q}(ik\mu_{m+q-\ell})|\times\\
&\times(1+|k|)^{m+q-\ell-1}\nu_{q-1}(k),\quad q\in\{r+1,\ldots,\ell\}.
\end{aligned}\tag{20}$$

Крім того, для кожного q, $q\in\{1,\ldots,r\}$, степінь многочлена $P_q(\lambda,k)$ за змінною λ дорівнює $n+q-r-1$, а для кожного q, $q\in\{r+1,\ldots,\ell\}$, степінь многочлена $P_q(\mu,k)$ за змінною μ дорівнює $m+q-\ell-1$. Оскільки модуль коефіцієнта при λ^{q-j-1}, $j\in\{0,1,\ldots,q-1\}$, в многочлені $P_q(\lambda,k)$, не перевищує $C_6(1+|k|)^j$, а модуль коефіцієнта при μ^{q-j-1}, $j\in\{0,1,\ldots,q-1\}$, в многочлені $P_q(\mu,k)$, не перевищує $C_7(1+|k|)^j$ Тому з оцінок (20) на підставі леми 3 із [5] встановлюємо

$$\begin{aligned}
&mes_R W_q(k,\vec{\tau}_q)\le C_{14}(1+|k|)\left(\frac{\nu_q(k)}{\left|U_{1,q}(ik\lambda_{n+q-r})\right||k|^{n+q-r-1}\,\nu_{q-1}(k)}\right)^{\frac{1}{n+q-r-1}}\le\\
&\le C_{15}(1+|k|)^{-1-\varepsilon_0},\quad q\in\{1,\ldots,r\},\ k\in Z\setminus\{0\},\\
&mes_R W_q(k,\vec{\tau}_q)\le C_{16}(1+|k|)\left(\frac{\nu_q(k)}{\left|U_{2,q}(ik\mu_{m+q-\ell})\right||k|^{m+q-\ell-1}\,\nu_{q-1}(k)}\right)^{\frac{1}{m+q-\ell-1}}\le\\
&\le C_{17}(1+|k|)^{-1-\varepsilon_0},\quad q\in\{r+1,\ldots,\ell\},
\end{aligned}\tag{21}$$

де $\varepsilon_0=\min\limits_{1\le q\le\ell}\{(\varepsilon_q-\varepsilon_{q-1})/(n+q-r-1)\}$.

Інтегруючи оцінки (21) за змінними $t_1,\ldots,t_{q-1},t_{q+1},\ldots,t_\ell$ та враховуючи оцінки (18), отримуємо

$$mes_{R^\ell} W(k) \le C_{18}(1+|k|)^{-1-\varepsilon_0}, \quad k \in Z\setminus\{0\}. \qquad (22)$$

Із оцінок (22) випливає збіжність ряду (17). З наведених міркувань випливає, що нерівність

$$\left|\Delta(k,\vec{t})\right| \ge (1+|k|)^{-r(2n-r-1)/2-(\ell-r)(2m-\ell+r-1)/2-\varepsilon_0} \prod_{j=1}^{r}\left|U_{1,j}(ik\lambda_{n+j-r})\right| \times$$
$$\times \prod_{j=r+1}^{\ell}\left|U_{2,j}(ik\mu_{m+j-\ell})\right|, \qquad (23)$$

виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в *в* R^ℓ) *векторів* $\vec{t} \in [0,T]^\ell$ для всіх (крім скінченної кількості) цілих k. Із (23) враховуючи твердження леми 1 отримуємо доведення теореми.

Отримані результати можна поширити на випадок однорідних строго гіперболічних рівнянь з багатьма просторовими змінними.

Література

1. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. – М.: Наука, 1981.
2. Джураев Т., Сопуев А., М. Мамажанов Краевые задачи для уравнений парабологиперболического типа. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
3. Золина Л.А. О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа // Журн. вычислительной мат. и мат. физики. – 1966. – 6, № 6. – С. 991–1001.
4. Кузь А. М., Пташник Б. Й. Задача з умовою, що містить інтегральний доданок, для параболо-гіперболічного рівняння // Укр. мат. журн. – 2015. – **67**, № 5. – С. 635–644. Kuz A.M., Ptashnyk B. Yo. A Problem with Condition Containingan Integral Termfor a Parabolic-Hyperbolic Equation // Ukr. Math. J. – 2015. – 67 (5) . – p. 723–734.
5. Пташник Б. Й., Симотюк М. М. Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами // Укр. мат. журн. – 2003. – 55, № 2. – С. 241–254.
6. Савка І. Я., Шевчук Р. В., Тимків І. Р. Задача лінійного спряження з нелокальною багатоточковою умовою для параболо-гіперболічного рівняння в циліндричній області // Прикарпат. вісн. НТШ. Число. – 2020. – № 1(59). – С. 16–28. https://doi.org/10.31471/2304-7399-2020-1(59)-16-28.
7. Смирнов М.М. Уравнения смешанного типа. – М.: Наука, 1970. – 296 с.
8. Стручина Г. М. Задача о сопряжении двух уравнений // Инженерно-физический журнал. – 1961. – 4(11). – С. 99–104.
9. Трикоми Ф. О линейных уравнениях в частных производных смешанного типа. – М.: ИЛ,1947. – 192 с.

10. Уфлянд Я. С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инженерно-физический журнал. – 1964. – 7(1). – С. 89–92.
11. Berdyshev A., Cabada A., Karimov E.On the existence of eigenvalues of a boundary value problem with transmitting condition of the integral form for a parabolic-hyperbolic equation // Mathematics (MDPI). – 2020. – **8**, No. 6. – Art. 1030. – P. 1–13. – https://doi.org/10.3390/math8061030.
12. Milovanović-Jeknić Z. Parabolic-hyperbolic transmission problem in disjoint domains // Filomat. – 2018. – **32**, No. 20. – P. 6911–6920. https://doi.org/10.2298/FIL1820911M.
13. Rassias J. M. Mixed type partial differential equations with initial and boundary values in fluid mechanics // Int. J. Appl. Math. Statist. – 2008. – **13**, No. J08. – P. 77–107.
14. Schneider M. Introduction to partial differential equations of mixed type. Lecture Notes, No.1.Institute for Mathematical Sciences, University of Delaware, Newark, Del., (1977).

Стаття надійшла до редакційної колегії 14.11.2023 р.

CONJUGATION PROBLEM WITH MULTIPOINT CONDITIONS FOR MIXED HYPERBOLIC TYPE EQUATIONS

I. Ya. Savka[1], I. R. Tymkiv[2]

[1]Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine; 79060, Lviv, Naukova Str. 3-b; e-mail: s-i@ukr.net;
[2]Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas; 76019, Ivano-Frankivs'k, Karpatska Str. 5, ph: +380(342) 727131; e-mail: tymkiv_if@ukr.net

The conditions of correct solvability in the Sobolev spaces of the conjugation problem with local multipoint conditions and periodic conditions for higher order mixed hyperbolic type equations is obtained.It has been proved that these conditions fulfill for almost all (with respect to the Lebesgue measure) vectors made up of the nodes of multipoint conditions.

***Key words**: mixed equation, hyperbolic equation,conjugation conditions, multipoint conditions, small denominator, Lebesgue measure*