УДК 517.944
DOI: 10.31471/2304-7399-2023-18(68)-49-53

УМОВНО-КОРЕКТНА ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИСТЕМИ КВАЗІЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ

А. І. Казмерчук
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ;
e-mail: a_kazmerchuk@ukr.net

У теорії систем квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку основними є питання розв'язності задачі Коші і обґрунтування наближених методів.

У даній роботі виділено клас систем квазілінійних рівнянь з частинними похідними першого порядку, для яких введено поняття узагальненого розв'язку задачі Коші. Також запропоновано підхід введення узагальненого розв'язку умовно-коректної задачі, пов'язаної з класичною задачею Коші. У випадку гладких початкових функцій узагальнений розв'язок принаймні локально збігається з класичним розв'язком, а у загальному випадку такий розв'язок губить гладкість і перетворюється у сингулярну функцію.

Виділено клас задач, які мають єдиний стійкий розв'язок. Отримано оцінки швидкості збіжності в наближених методах розв'язування таких задач. Наближені методи у даному підході можуть бути довільної природи, наприклад, скінченно-різницеві методи, метод згладжування або метод в'язкості. Також дано опис конструкцій побудови нескінченної кількості розв'язків для окремого класу таких задач.

Ключові слова: *системи квазілінійних рівнянь, узагальнений розв'язок, класичний розв'язок, задача Коші, наближені методи.*

1. Для квазілінійного диференціального рівняння першого порядку розглянемо задачу Коші

$$u_t^j + \varphi^j(u^j)_x + \psi^j(t, x, u^1, \dots, u^N) = 0, j = 1, \dots, n, \tag{1}$$

$$u^j\Big|_{t=0} = u_0^j(x), j = 1, \dots, n, \tag{2}$$

де

$$u = (u^1, \dots, u^n), u = u(t, x), \varphi^j(v) \in C^{2,\alpha}, \left|\frac{d\varphi^j}{dv}\right| \le K_1, \qquad \psi^j(t, x, u) =$$

$$= a^j(t, x)u + b^j(t, x) \in C^{1,\alpha}, u_0^j(x) \in L_\infty(R), j = 1, \dots, n.$$

Означення 1. *Обмежена вимірна вектор-функція* $u(t, x)$ *називається узагальненим розв'язком задачі (1),(2), якщо*

$\forall k \in R^1 \ \ \forall f(t,x) \in C^{o,\infty}\big((0,T] \times R^1\big), \ f(t,x) \geq 0$ *при кожному* $j = 1, \dots, n$ *виконуються нерівності*

$$L_j(u,k,f) = -\iint\limits_{0-\infty}^{T+\infty} \Big\{\big|u^j - k\big| f_t + sign\big(u^j - k\big)\Big(\varphi^j\big(u^j\big) - \varphi^j(k)\Big) f_x - sign\big(u^j - k\big)\psi^j(t,x,u)f\Big\} dxdt \leq 0,$$

а початкові умови (2) приймаються у сильному сенсі.

2. Зазначимо, що результати існування та єдиності розв'язку задачі (1), (2) у випадку $N = 1$ були отримані починаючи з 1950-х років в працях Олійник О. А., Кружкова С. М. та Lax P. Водночас викликає інтерес питання існування і єдності розв'язків з допомогою конструктивних методів побудови наближених розв'язків. У працях [1-4] було розглянуто як конкретні методи, так і загальний підхід, який дозволяє обґрунтовувати збіжність разом з отриманням оцінок швидкості в наближених методах. У даній роботі ми застосовуємо ці підходи при вивченні задачі Коші "назад".

3. Відтак разом з задачею (1), (2) у смузі $[0,T) \times R^1$ розглянемо задачу Коші для рівняння (1) з умовою для вектор-функції $u_T(x)$=$\big(u_T^1(x), \dots, u_T^n(x)\big)$:

$$u^j\big|_{t=0} = u_T^j(x), j = 1, \dots, n, \tag{3}$$

Означення 2. *Обмежена вимірна функція* $u(t,x)$ *називається узагальненим розв'язком задачі (1),(3), якщо*

$\forall k \in R^1 \ \ \forall f(t,x) \in C^{o,\infty}([0,T) \times R^1), \ f(t,x) \geq 0$ *при кожному* $j = 1, \dots, n$ *виконуються нерівності*

$$L_j(u,k,f) = -\iint\limits_{0-\infty}^{T+\infty} \Big\{\big|u^j - k\big| f_t + sign\big(u^j - k\big)\Big(\varphi^j\big(u^j\big) - \varphi^j(k)\Big) f_{x-} - sign\big(u^j - k\big)\psi^j(t,x,u)f\Big\} dxdt \leq 0,$$

а умови (3) приймаються у сильному сенсі.

Зазначимо, що для задачі Коші (1), (2) справджується теорема існування та єдиності розв'язку у сенсі виконання означення 1, також ця задача володіє стійкістю за початковими даними у сенсі виконання ентропійних умов ([1-4]).

У випадку задачі (1), (3) розглянемо вектор-функцію $u_T(x)$ у вигляді

$$u_T(x) = \begin{cases} u_l^j, x < 0 \\ u_r^j, x > 0 \end{cases} \tag{4}$$

Теорема 1. Нехай виконуються умови

$$\varphi^{1''}(v) > 0, \psi^j(t,x,u) = 0, u_l^1 > u_r^1, u_l^j = u_r^j = 0, j = 2, \dots, n$$

тоді задача (1),(4) має нескінченну кількість розв'язків.

Доведення. Розв'язок задачі (1), (4) будемо утворювати, використовуючи ударні хвилі

$$S^j(a,b,t_0,x_0): v(t,x) = \begin{cases} a, x - x_0 < \dfrac{\varphi^j(a) - \varphi^j(b)}{a-b}(t - t_0) \\ b, x - x_0 > \dfrac{\varphi^j(a) - \varphi^j(b)}{a-b}(t - t_0) \end{cases}$$

При цьому враховуємо, що такі ударні хвилі задовольняють означенню 2, і відтак умовам стійкості. Нехай задано набір

$$v_1, \dots, v_h: v_0 = u_l > v_1 > \dots > v_h > v_{h+1} = u_r.$$

Далі визначимо ударні хвилі $S(v_i, v_{i+1}, t_i, x_i), i = 0, .., h$. За відповідним вибором значень x_i кусково-гладкий узагальнений розв'язок задачі (1), (3) збігається з розв'язком задачі Коші для рівняння (1) з початковою функцією, для якої

$$u_0^1(x) = \begin{cases} u_l, x < x_1, \\ v_1, x_1 < x < x_2, \\ v_2, x_2 < x < x_3, \\ \dots \\ v_h, x_h < x < x_{h+1,} \\ u_r, x_{h+1} < x, \end{cases}$$

$$u_0^j(x) = 0, j = 2, \dots, n.$$

Отже, для кожного натурального h і будь-якого набору $v_1, \dots, v_h$ отримуємо свій узагальнений розв'язок задачі (1), (4). Тому принаймні з таким набором ми вже маємо нескінченну кількість розв'язків.

Теорема 2. Нехай виконуються умови

$$\varphi^{1''}(v) < 0, \psi^j(t,x,u) = 0, u_l^1 < u_r^1, u_l^j = u_r^j = 0, j = 2, \dots, n$$

тоді задача (1),(4) має нескінченну кількість розв'язків.

Доведення теореми 2 проводиться аналогічно доведенню теореми 1.

Зрозуміло, що і у випадку порушення умови опуклості для функцій потоку ми діючи аналогічним чином зможемо побудувати нескінченну кількість розв'язків. При цьому отримані функції будуть містити як ударні хвилі, так і центровані хвилі розрідження.

4.Водночас визначаємо клас задач (1), (4), що мають стійкий єдиний узагальнений розв'язок.

Теорема 3.Нехайдля задачі (1),(3) виконуються умови

$$u_T^j(x) \in C^1, u_T'(x)\varphi^{j''}(u) < 0, j = 1, \dots, n. \qquad (5)$$

Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1), (3), який у даному випадку є класичним.

Доведення. Локальний розв'язок задачі (1), (3) може бути побудовано за методом характеристик. Лінійність неоднорідностей $\psi^j(t,x,u) = a^j(t,x)u + b^j(t,x)$ забезпечує виконання принципу максимуму вздовж кожної характеристики. За виконання вхідних умов теореми характеристики в смузі $[0,T) \times R^1$ не перетинаються, тому вздовж характеристик розв'язок задачі (1), (3) визначається як розв'язок задачі Коші для відповідного звичайного рівняння з виконанням умов принципу максимуму. Тому узагальнений розв'язок у сенсі означення 2 є класичним і, як наслідок стійкий у певному класі початкових умов.

5. Наближений метод в задачі (1),(3)довільній обмеженій вектор-функції $u_0(x)$ і скалярному параметру $\varepsilon > 0$ ставить у відповідність сім'ю вектор-функцій $\{u^\varepsilon(t,x)\}$.

При цьому якщо $var\big(u_0(x)\big) < +\infty$, то

$$L_j(u^\varepsilon, k, f) \le \varepsilon \|\nabla f\|_C \underset{supp f}{var}\, u^\varepsilon(t,x),$$

тут $\|\cdot\|_C$ – норма у просторі неперервних функцій, $var(\cdot)$ – варіація у сенсі Тонеллі-Чезарі.

Ми вважатимемо також, що наближений метод стійкий за початковими даними, і що для функцій $u^\varepsilon(t,x)$ стійкими в $L_{1,loc}(R)$ є модулі неперервності $\lambda(h)$ за змінною xі $\nu_t(\tau) -$ за змінною t .

Теорема 4. *Нехай* $var\big(u_0(x)\big) < +\infty$, *і справджуються умови (5). Тоді для наближеного розв'язку* $u^\varepsilon(t,x)$ *при* $\varepsilon_{1,2} > 0$ *виконується оцінка*

$$\|u^{\varepsilon_1}(t,\cdot) - u^{\varepsilon_2}(t,\cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} \le C(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^\delta, \qquad (6)$$

де $\delta \in (0,1)$ *залежить від функцій* $\lambda(h), \nu_t(\tau)$, стала C залежить лише від наближеного методу і не залежить від δ, ε.

Теорема 5. *Нехай* $\varepsilon = O(\tau), \tau \to 0$, *і справджуються умови (5). Тоді для наближеного розв'язку* $u^\varepsilon(t,x)$ *при* $\varepsilon_{1,2} > 0$ *виконується оцінка*

$$\|u^{\varepsilon_1}(t,\cdot) - u^{\varepsilon_2}(t,\cdot)\|_{L_{1,loc}(R)} \le \mu\big((\varepsilon_1 + \varepsilon_2)\big), \qquad (7)$$

де функція $\mu(\sigma) \to 0, \sigma \to 0$ *залежить від модуля неперервності* $\lambda(\sigma)$ *в* $L_{1,loc}(R)$ *функції* $u_T(x)$ *та від модуля неперервності* $\nu_t(\tau)$ *за змінною* t, *що визначається конкретним наближеним методом*.

Зазначимо, що на основі оцінок (6), (7) ми отримаємо існування і єдиність розв'язку задачі (1), (3) незалежним чином.

Отримані результати є варіацією і узагальненням результатів робіт [1-4].

Література

1. Казмерчук А.І. До обґрунтування наближених методів розв'язання квазілінійних законів збереження з негладкими даними задачі // Вісник національного університету "Львівська політехніка", Прикладна математика. – 2000. – №411. – с. 147-151.
2. Казмерчук А.І. Задача Коші для квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку в куті //"Бъдещето въпроси от света на науката-2017", V.10, с. 111-113.

3. Казмерчук А.І. Оптимізація швидкості збіжності в методах наближеного розв'язування задачі Коші для системи квазілінийних рівнянь з частинними похідними першого порядку // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2018. – № 2(46). – с. 47-51.
4. Казмерчук А.І. В'язкісно-згладжувальний метод розв'язання задачі Коші для квазілінійного рівняння з частинними похідними першого порядку, – "Vedaavznik – 2016". – D.10. – S.98-100. Розміщена: Проблемы научной мысли. – Т.12. – №10. – 2016. – с. 098-100.

Стаття надійшла до редакційної колегії 07.11.2023 р.

CONDIONALLY CORRECT INITIAL VALUES PROBLEM FOR THE SYSTEM OF QUASILINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST ORDER

A. I. Kazmerchuk
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenka Str. 57, Ukraine;
e-mail: a_kazmerchuk@ukr.net

In the theory of systems of quasilinear partial differential equations of the first order the main questions are the solvability of initial values problem and justification of the approximate methods.

In this paper a class of systems of quasilinear partial differential equations of the first order is considered, for which the concept of a generalized solution is introduced. The approach of introducing a generalized solution of conditionally correct problem related to the classical Cauchy problem is also proposed. In the case of smooth initial functions, the generalized solution at least locally coincides with the classical solution, and in the general case, such a solution loses its smoothness and turns into a singular function.

There is a class of problems that have a unique solution. Estimates of the convergence speed in approximate methods of solving such problems have been obtained. Approximate methods in this approach can be arbitrary in nature, for example, finite-difference methods, smoothing method, or viscosity method. A description of constructions for building an infinite number of solutions for the same class of such problems is also given.

Key words: *systems of quasilinear equations, generalized solution, classical solution, Cauchy problem, approximate methods.*