УДК 517.53
DOI: 10.31471/2304-7399-2023-18(68)-18-24

СТРУКТУРИ МНОЖИН БОРЕЛЕВИХ ТА ПІКАРОВИХ ВИНЯТКОВИХ ВЕКТОРІВ АНАЛІТИЧНИХ КРИВИХ

Я. І. Савчук
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; тел. (03422) 42123, e-mail: ysavchukua@gmail.com

Раніше отримано опис структури множин пікарових та борелевих виняткових векторів для трансцендентної p-вимірної цілої кривої з лінійно незалежними компонентами без спільних нулів. Було доведено, що множина борелевих виняткових векторів разом з нульовим вектором є скінченним об'єднанням підпросторів розмірності не вище p-1 з p-вимірного комплексного евклідового простору. До того ж сума розмірностей усіх цих підпросторів не перевищує p і будь-який попарний перетин цих підпросторів містить лише нульовий вектор. Таку саму структуру має і множина пікарових виняткових векторів. Для цілої кривої нецілого або нульового порядку множина борелевих виняткових векторів разом з нульовим вектором є одним підпростором розмірності не вище p-1, чого не можна стверджувати про множину пікарових виняткових векторів цілої кривої нецілого порядку. Достатність, в деякій мірі, цих результатів підтверджується відповідними прикладами. В даній роботі показано, що наведені результати щодо структури множини борелевих та пікарових виняткових векторів для цілих кривих можна перенести на випадок аналітичних в крузі кривих. Також побудовано аналітичну в крузі криву, що підтверджує, в деякій мірі, достатність отриманих результатів. Однак, не вдалося з'ясувати, чи переноситься відповідний результат на випадок аналітичних кривих нецілого або нульового порядку.

Ключові слова: *ціла крива, аналітична в крузі крива, пікаровий винятковий вектор, борелевий винятковий вектор*

В пропонованій статті використовуються основні результати теорії цілих та аналітичних кривих, а також позначення, використані в [1] та [2].

Векторну функцію $\vec{H}(z) = \left(h_1(z), h_2(z), \dots, h_p(z)\right)$ називатимемо *аналітичною в крузі кривою*, якщо кожна з її компонент $h_j(z)$ є аналітичною в цьому крузі функцією. Не зменшуючи загальності, можемо вважати круг одиничним $K = \{z \in C: |z| < 1\}$.

Розглядатимемо аналітичні криві $\vec{H}$ з лінійно незалежними компонентами і без спільних нулів, і такі, що

$$\overline{\lim_{r\to 1}} \frac{T(r,\vec{H})}{-\ln(1-r)} = +\infty \tag{1}$$

де *характеристика росту* визначається рівністю

$$T(r,\vec{H}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\|\vec{H}(re^{i\varphi})\|\, d\varphi.$$

Для ненульового вектора $\vec{a}_j = (a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jp}) \in C^p$ позначимо через $n(r,\vec{a}_j,\vec{H})$ кількість нулів, з врахуванням їх кратності, функції $\vec{H}(z)\vec{a}_j = h_1(z)\bar{a}_{j1} + h_2(z)\bar{a}_{j2}, \dots + h_p(z)\bar{a}_{jp}$ в крузі $\{z \in C: |z| < r\}$. Відповідно $N(r,\vec{a}_j,\vec{H}) = n(0,\vec{a}_j,\vec{H})\ln r + \int_0^r \frac{n(t,\vec{a}_j,\vec{H})-n(0,\vec{a}_j,\vec{H})}{t}dt$.

Виконуються перша та друга основні теореми Неванлінни (див.[1]). Зокрема, друга основна теорема стверджує, що для довільної допустимої в C^p системи векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_k$ виконується

$$(k-p)T(r,\vec{H}) \le \sum_{j=1}^{k} N(r,\vec{a}_j,\vec{H}) + Q(r,\vec{H}), \tag{2}$$

де

$$Q(r,\vec{H}) = O\{\ln T(r,\vec{H}) - \ln(1-r)\}, \tag{3}$$

при $r \to 1$ зовні множини E, такої, що

$$\int_E \frac{dr}{1-r} < +\infty. \tag{4}$$

Вектор $\vec{a} \in C^p \backslash \{\vec{0}\}$ називається *пікаровим* винятковим для аналітичної в K кривої $\vec{H}$, якщо функція $\vec{H}(z)\vec{a}$ має скінченну кількість нулів в K. Якщо категорія росту $N(r,\vec{a},\vec{H})$ нижча за категорію росту $T(r,\vec{H})$, то $\vec{a}$ називається *борелевим* винятковим вектором. Зрозуміло, що $P(\vec{H}) \subset B(\vec{H})$, де через $P(\vec{H})$ та $B(\vec{H})$ позначено відповідно множини пікарових та борелевих виняткових векторів для кривої $\vec{H}$.

В роботах [3] та [4]отримано певні результати щодо множини винятких векторів в розумінні Неванлінни для аналітичних в крузі кривих.

В роботі [5] показано, що довільна допустима система борелевих виняткових векторів для трансцендентної цілої кривої $\vec{G}: C \to C^p$ не може мати більше ніж p векторів. Отримано аналогічний результат для аналітичних кривих.

Теорема 1. *Для довільної аналітичної кривої* $\vec{H}: K \to C^p$, *для якої виконується (1), будь-яка допустима система борелевих виняткових векторів містить не більше* p *векторів.*

Д о в е д е н н я. Припустимо, що існує аналітична крива $\vec{H}: K \to C^p$, яка має $(p+1)$ допустимих борелевих виняткових векторів $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_{p+1}$. Тоді з (2) отримуємо при $k = p+1$:

$$T(r,\vec{H}) \le \sum_{j=1}^{p+1} N(r,\vec{a}_j,\vec{H}) + Q(r,\vec{H}). \tag{5}$$

Якщо крива $\vec{H}$ нескінченного порядку, то $N(r,\vec{a}_j,\vec{H})$, $j = 1,2,\dots,p+1$, мають скінченний порядок, бо їхня категорія росту нижча за категорію росту $T(r,\vec{H})$, отже, існує така стала $C < \infty$, що при

$r \geq r_0$ виконується $\sum_{j=1}^{p+1} N(r, \vec{a}_j, \vec{H}) \leq (1-r)^{-C}$. Тоді зовні деякої множини $E \subset (0;1)$, яка задовольняє (4), виконується

$$T(r,\vec{H}) \leq (1-r)^{-C} + O\{ln\, T(r,\vec{H}) - ln(1-r)\} \leq (1-r)^{-C} + \\ + \frac{1}{2} T(r,\vec{H}) + O(1),$$

звідки

$$T(r,\vec{H}) \leq 2(1-r)^{-C} + O(1). \qquad (6)$$

Позначимо $\int_E \frac{dr}{1-r} = L$. Якщо $r \in E$, то існує точка $r' \in [r, 1-(1-r)e^{-2L}]$, така, що $r' \notin E$. Тоді

$$T(r,\vec{H}) \leq T(r',\vec{H}) \leq 2(1-r')^{-C} + O(1) \leq 2\left((1-r)e^{-2L}\right)^{-C} + \\ + O(1) = 2e^{2L\cdot C}(1-r)^{-C} + O(1), \qquad (7)$$

якщо r достатньо близьке до 1. Отже, ми отримали, що $T(r,\vec{H})$ має скінченний порядок і тим самим прийшли до протиріччя.

Аналогічно приходимо до протиріччя у інших випадках щодо категорії росту $T(r,\vec{H})$. Розглянемо, наприклад, випадок, коли аналітична крива $\vec{H}$ має скінченний порядок $\rho > 0$ і нормальний тип. В такому випадку кожна з функцій $N(r,\vec{a}_j,\vec{H})$, $j = 1,2,\ldots,p+1$ має порядок або менший за ρ або рівний ρ і мінімальний тип. Тому для довільного $\varepsilon > 0$ при всіх r, достатньо близьких до 1, виконуються нерівності $N(r,\vec{a}_j,\vec{H}) < \frac{\varepsilon}{p+1}(1-r)^{-\rho}$, $j = 1,2,\ldots,p+1$, звідки $\sum_{j=1}^{p+1} N(r,\vec{a}_j,\vec{H}) < < \varepsilon(1-r)^{-\rho}$. Тоді із (5), враховуючи (3), отримуємо, що при усіх r достатньо близьких до 1, зовні деякої множини $E \subset (0;1)$, яка задовольняє (4), виконується

$$T(r,\vec{H}) \leq \varepsilon(1-r)^{-\rho} + O\{ln\, T(r,\vec{H}) - ln(1-r)\} \leq \varepsilon(1-r)^{-\rho} + \\ + \frac{1}{2} T(r,\vec{H}) + O(1),$$

тому $T(r,\vec{H}) \leq 2\varepsilon(1-r)^{-\rho} + O(1)$. Якщо ж існує якесь $r \in E$ близьке до 1, то, міркуючи аналогічно як ми отримували (7) із (6), отримаємо $T(r,\vec{H}) \leq 2\varepsilon e^{2L\cdot C}(1-r)^{-\rho} + O(1)$. Це означає, що $\vec{H}$ має мінімальний тип, що протирічить припущенню.

Очевидно, доведена теорема справджується і для випадку пікарових виняткових векторів.

Теорему 1 покращити не можна. Щоб переконатись в цьому, досить розглянути векторну функцію

$$\vec{H}(z) = \left(1, z, \ldots, z^{n-2}, e^{\frac{1}{1-z}}\right), \qquad (8)$$

компоненти якої лінійно незалежні та не мають спільних нулів, а також аналітичні в C за винятком $z_0 = 1$ (остання компонента). Отже, ця векторна функція є аналітичною кривою в $C\backslash\{1\}$, зокрема і в K. Легко переконатись, що ця аналітична в K крива має перший порядок і нормальний тип. Для довільного ненульового вектора

$$\vec{a} \in B_1 = \{\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_{p-1}, 0): b_j \in C, j = \overline{1, p-1}\}$$

функція $\vec{H}(z) \cdot \vec{a}$ є многочленом, тому $n(r, \vec{a}, \vec{H}) = O(1)$, тобто усі вектори із $B_1 \backslash \{\vec{0}\}$ будуть пікаровими, а, отже, й борелевими для аналітичної кривої $\vec{H}: K \to C^p$ вигляду (8). Також винятковими пікаровими, а, отже, й борелевими, будуть усі вектори виду $\vec{a} = (0,0, \dots, 0, \alpha)$, $\alpha \neq 0$, бо для кожного з них $n(r, \vec{a}, \vec{H}) = 0$. Зауважимо, що B_1 – підпростір розмірності $(p-1)$ із C^p. Очевидно, p векторів $\vec{e}_1 = (1,0, \dots, 0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0, \dots, 0)$, …, $\vec{e}_p = (0,0, \dots, 0,1)$ є ортонормованим базисом в C^p іутворюють допустиму систему в C^p. Кожен з них є пікаровим, а, отже, й борелевим для аналітичної кривої $\vec{H}: K \to C^p$ виду (8).

В роботі [6] описано структуру множин борелевих та пікарових виняткових векторів цілої кривої. Нам вдалось показати, що ці результати можна перенести на випадок аналітичних в крузі кривих. Зокрема, справедлива

Теорема 2. *Для довільної аналітичної кривої* $\vec{H}: K \to C^p$, *для якої* $\overline{\lim_{r \to 1}} \frac{T(r, \vec{H})}{-\ln(1-r)} = +\infty$, *множину її борелевих виняткових векторів в об'єднанні з нульовим вектором можна подати у вигляді об'єднання підпросторів* $B_1, B_2, \dots, B_m$ *із* C^p *розмірності* $\leq p-1$, *причому* $B_i \cap B_j = \{\vec{0}\}$ *для всіх* i, $j = \overline{1, m}$, $i \neq j$ *та*

$$\dim B_1 + \dim B_2 + \dots + \dim B_m = \dim B,$$

де B *– підпростір із* C^p, *утворений як лінійна оболонка усіх базисних векторів з* $B_1, B_2, \dots, B_m$.

Зауважимо, що не виключений випадок, коли $B = C^p$ (наприклад, для аналітичної кривої виду (8)).

Аналогічно описується і структура пікарових виняткових векторів.

Теорема3. *Для довільної аналітичної кривої* $\vec{H}: K \to C^p$, *для якої* $\overline{\lim_{r \to 1}} \frac{T(r, \vec{H})}{-\ln(1-r)} = +\infty$, *множину її пікарових виняткових векторів в об'єднанні з нульовим вектором можна подати у вигляді об'єднання підпросторів* $A_1, A_2, \dots, A_m$ *із* C^p *розмірності* $\leq p-1$, *причому* $A_i \cap A_j = \{\vec{0}\}$ *для всіх* $i, j = \overline{1, m}$, $i \neq j$ *та*

$$\dim A_1 + \dim A_2 + \dots + \dim A_m = \dim A,$$

де A *– підпростір із* C^p, *утворений як лінійна оболонка усіх базисних векторів з* $A_1, A_2, \dots, A_m$.

Зрозуміло, що, оскільки $P(\vec{H}) \subset B(\vec{H})$, маємо $\bigcup_{j=1}^{m} A_j \subset \bigcup_{i=1}^{u} B_i$.

Для доведення теорем 2 та 3 досить провести міркування, аналогічні при доведенні леми 1 та теореми 2 в [6].

Розглянемо приклад, який, в деякій мірі, підтверджує достатність теорем 2 та 3.

Приклад. Розглянемо аналітичну в K криву ($n \in N$)

$$\vec{H}(z) = \left(1, z, \dots, z^{p_1-1}, e^{\frac{1}{(1-z)^n}}, ze^{\frac{1}{(1-z)^n}}, \dots, z^{p_2-1}e^{\frac{1}{(1-z)^n}}, \dots,\right.$$
$$\left. e^{\frac{m-1}{(1-z)^n}}, ze^{\frac{m-1}{(1-z)^n}}, \dots, z^{p_m-1}e^{\frac{m-1}{(1-z)^n}}\right), \qquad (9)$$
$$p_1 + p_2 + \dots + p_m = p, m \geq 2.$$

Очевидно, ця крива без спільних нулів з лінійно незалежними компонентами $h_{js}(z) = z^{s-1}e^{\frac{j-1}{(1-z)^n}}$ порядку n нормального типу.

Позначимо через $\vec{e}_{js}$ вектор із C^p, у якого компонента з номером $p_1 + p_2 + \dots + p_{j-1} + s$ дорівнює 1, а усі інші компоненти нулі. Зрозуміло, що $\vec{H}(z)\vec{e}_{js} = h_{js}(z)$. Нехай A_j – підпростір із C^p, який є лінійною оболонкою векторів $\vec{e}_{j1}, \vec{e}_{j2}, \dots, \vec{e}_{jp_j}$. Очевидно, $dim\, A_j = p_j$ і $dim\, A_1 + dim\, A_2 + \dots + dim\, A_m = p$.

Для довільного ненульового вектора $\vec{a}_j = \alpha_1\vec{e}_{j1} + \alpha_2\vec{e}_{j2} + \dots + \alpha_{p_j}\vec{e}_{jp_j} \in A_j$ маємо

$$\vec{H}(z)\vec{a}_j = \alpha_1 h_{j1}(z) + \alpha_2 h_{j2}(z) + \dots + \alpha_{p_j} h_{jp_j} =$$
$$= \left(\alpha_1 + \alpha_2 z + \dots + \alpha_{p_j} z^{p_j-1}\right) e^{\frac{j-1}{(1-z)^n}} \not\equiv 0,$$

отже, $n\left(r, \vec{a}_j, \vec{H}\right) \leq p_j$, і $\vec{a}_j$ є пікаровим і, тим більше, борелевим винятковим вектором для розглядуваної аналітичної кривої.

Таким чином, ми показали, що

$$\bigcup_{j=1}^{m} A_j \subset P\left(\vec{H}\right) \cup \left\{\vec{0}\right\}. \qquad (10)$$

Розглянемо тепер довільний вектор $\vec{a} \in C^p$, $\vec{a} \notin \bigcup_{j=1}^{m} A_j$. Увесь набір векторів $\vec{e}_{js}$ утворює базис в C^p, тому $\vec{a}$ можна подати як лінійну комбінацію цих векторів. В цій лінійній комбінації залишимо тільки ненульові доданки. Матимемо: $\vec{a} = \beta_1\vec{e}_{j_1s_1} + \beta_2\vec{e}_{j_2s_2} + \dots + \beta_k\vec{e}_{j_ks_k}$, де усі $\beta_l \neq 0,\ k \leq p,\ 1 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k \leq m$, причому обов'язково $j_1 < j_k$, бо в протилежному випадку було б $\vec{a} \in A_{j_1}$.

Очевидно, для лінійно незалежних функцій $h_{j_1s_1}(z), h_{j_2s_2}(z), \dots,$ $h_{j_ks_k}(z)$ спільним нулем може бути хіба що число 0. Позначимо через r його кратність. Тоді векторна функція

$$\vec{H}_k(z) = \left(h_{j_1s_1}(z), h_{j_2s_2}(z), \dots, h_{j_ks_k}(z)\right) z^{-r}$$

буде k-вимірною аналітичною в K кривою без спільних нулів. Зрозуміло, що порядок і тип її не перевищують порядок і тип кривої $\vec{H}(z)$. Також вони не нижчі за порядок і тип мероморфної в K функції

$$\frac{h_{j_ks_k}(z)}{h_{j_1s_1}(z)} = \frac{z^{s_k-1}e^{\frac{j_k-1}{(1-z)^n}}}{z^{s_1-1}e^{\frac{j_1-1}{(1-z)^n}}} = z^{s_k-s_1}e^{\frac{j_k-j_1}{(1-z)^n}},$$

яка, очевидно, має порядок n і нормальний тип. Отже, $\vec{H}_k(z)$ – аналітична в K крива порядку n нормального типу.

Вектори $\vec{e}_1 = (1,0,\dots,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0,\dots,0)$, … , $\vec{e}_k = (0,0,\dots,0,1)$ та $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k)$ утворюють допустиму в C^k систему векторів, бо усі $\beta_l \neq 0$. Зрозуміло, що кожний з векторів $\vec{e}_l$ є пікаровим і, тим більше, борелевим винятковим для $\vec{H}_k(z)$, бо

$$\vec{H}_k(z)\vec{e}_l = z^{-r} h_{j_l s_l}(z) = z^{s_l - r - 1} e^{\frac{j_l - 1}{(1-z)^n}}.$$

Відповідно до теореми 1 вектор $\vec{b}$ не може бути борелевим винятковим для $\vec{H}_k$, отже, $N(r, \vec{b}, \vec{H}_k)$ має ту саму категорію росту, що й $T(r, \vec{H}_k)$, тобто є порядку n нормального типу. З очевидної рівності $\vec{H}_k(z)\vec{b} = z^{-r}\vec{H}(z)\vec{a}$ робимо висновок, що вектор $\vec{a} \notin \bigcup_{j=1}^{m} A_j$ не може бути борелевим і, тим більше, пікаровим винятковим для $\vec{H}$.

Враховуючи (10), ми показали, що для цілої кривої вигляду (9) виконується

$$P(\vec{H}) \cup \{\vec{0}\} = B(\vec{H}) \cup \{\vec{0}\} = \bigcup_{j=1}^{m} A_j .$$

Література

1. Weyl H., Weyl J. Meromorphic functions and analytic curves. – Prinseton: Prinseton Univ. Press, 1943. – 531 p.
2. Петренко В.П. Целые кривые. Х.: Вища школа, 1984. – 136 с.
3. Savchuk Ya.I., Structure of the set of defect vectors of entire and analytic curves of finite order, Ukr. Math. J., 37 (1985), №5, 494–499.
4. Savchuk Ya.I., Inverse problem of the theory of distribution of the values of entire and analytic curves, Journal of Soviet Mathematics, 48 (1990), №2, 220–231.
5. A.I. Bandura, Ya.I. Savchuk, Structure of the set of Borel exceptional vectors for entire curves, Matematychni Studii 53 (1), 41-47. doi: 10.30970/ms.53.1.41-47.
6. Ya.I. Savchuk, A.I. Bandura, Structure of the set of Borel exceptional vectors for entire curves. II Mat. Stud. (2021), Vol. 55 (2), 137-145. doi: 10.30970/ms.55.2.137-145.

Стаття надійшла до редакційної колегії 13.11.2023 р.

STRUCTURES OF THE SETS OF BOREL AND PICARD EXCEPTIONAL VECTORS OF ANALYTIC CURVES

Ya. I. Savchuk
Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivsk, 15 Karpatska street;
e-mail: ysavchukua@gmail.com

Previously, we have described the structure of the sets of Picard and Borel exceptional vectors for a transcendental p-dimensional integer curve *with linearly independent components without common zeros. It was proved that the set of Borel exceptional vectors together with the zero vector is a finite union of subspaces of dimension not higher than p-1 of a p-dimensional complex Euclidean space. In addition, the sum of the dimensions of all these subspaces does not exceed p and any pairwise intersection of these subspaces contains only the zero vector. The set of Picard exceptional vectors has the same structure. For an integer curve of non-integer or zero order, the set of Borel exceptional vectors together with the zero vector is a single subspace of dimension no higher than p-1, which is not the case for the set of Picard exceptional vectors of an integer curve of non-integer order. The sufficiency of these results is confirmed to some extent by the corresponding examples. In this paper we show that the above results on the structure of the set of Borel and Picard exceptional vectors for integer curves can be transferred to the case of analytic curves in the circle. We have also constructed an analytic curve in the circle, which confirms, to some extent, the sufficiency of the results. However, it was not possible to find out whether the corresponding result is transferred to the case of analytic curves of non-integer or zero order.*

Keywrods: *entire curve, analytic curve in the unit disc, the Picard exceptional vector, the Borel exceptional vector.*