

ДОСЛІДЖЕННЯ СТІЙКОСТІ КОНВЕКТИВНОГО РУХУ З ПАРНИМ ПРОФІЛЕМ ШВИДКОСТІ

В. В. Негрич, Я. М. Дем'янчук, Г. Я. Процюк

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
e-mail: trans@nung.edu.ua*

Досліджується гідродинамічна стійкість в'язкої нестисливої рідини розміщеної між вертикальними паралельними поверхнями. Розглядалася вільна конвекція з парним профілем швидкості. Для дослідження використовується варіаційний принцип нерівноважної термодинаміки – метод локального потенціалу. Визначається критичне значення критерія Грасгофа, в залежності від числа Прандтля та значення хвильового числа, при якому відбувається перехід від простої до складної дисипативної структури. Також враховувався кут нахилу шару по відношенню до гравітаційного поля. Представлений метод розрахунків з використанням тільки однієї пробної функції дозволяє отримати порівнянні результати з кінетичним методом, що використовує складні пробні функції.

Ключові слова: *конвективний рух рідини, локальний потенціал, дисипативні структури, критерій Грасгофа, критерій Прандтля.*

Вступ

В практичних умовах процеси доцільно проводити в високо інтенсивному стаціонарному режимі. Тому їх проводять в умовах далеких від рівноважних, в нелінійній області залежності потоків від термодинамічних сил. В цьому випадку проявляється велика різноманітність станів. Зі збільшенням величини сил, які накладаються на систему, в ній відбуваються зміни, нагромадження яких призводить до швидкої перебудови режиму протікання незворотніх процесів; ці зміни викликають нестійкість у вигляді просторових дисипативних структур.

Не зважаючи на велику різноманітність стаціонарних станів, форм нестійкості і дисипативних структур в нерівноважних умовах, їх об'єднують деякі спільні закономірності поведінки систем віддалених від рівноваги, які добре вписуються в фундаментальну теорію необоротних процесів.

Аналіз сучасних досягнень розвитку досліджуваної проблеми

На відміну від звичайної проблеми Бенарда конвективний рух рідини, яка міститься між двома вертикальними площинами, відбувається за нескінченно малої різниці температур. В такій системі, при деяких критичних значеннях градієнта температури настає вторинна конвенція

яка проявляється в переході одного типу ламінарного руху в інший, або безпосередньо в турбулентний.

Мета роботи

Методом локального потенціалу вивчається границя стійкості ламінарної течії рідини з парним профілем швидкості.

Виклад основного матеріалу дослідження

В ролі прикладу вільної конвекції з парним профілем швидкості може служити система з внутрішнім джерелом теплоти [1]. Таким джерелом може бути хімічна реакція, Джоулева теплота і інші. Дослідимо методом локального потенціалу гідродинамічну нестійкість такої системи. Нехай шар нестисливої в'язкої рідини розміщено в каналі, протилежні грані якого паралельні і підтримуються при постійній і однаковій температурі, довжина каналу в багато разів перевищує відстань між цими гранями і, відповідно, рух рідини в середній частині каналу можна приймати плоско-паралельним. Кут нахилу шару по відношенню до гравітаційного поля довільний.

Рівняння збереження для такої системи в векторній формі запишеться [2]:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} + (V\nabla)V &= -\frac{1}{\rho}\nabla\rho + \nu\nabla^2V + g\beta T_j, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + V \cdot \nabla T &= \lambda\nabla^2T + \frac{Q}{\rho \cdot C_p},\end{aligned}\quad (1)$$

тут λ – коефіцієнт теплопровідності, Q – потужність внутрішніх джерел теплоти.

Ця система рівнянь може бути представлена в безрозмірній векторній формі

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial t} + Gr(V\nabla)V &= -\nabla\rho + \nabla^2V + T_j, \\ \frac{\partial T}{\partial t} + Gr(V\nabla)T &= \frac{1}{Pr}\nabla^2T,\end{aligned}\quad (2)$$

де $Gr = \frac{g\rho qh^2}{2\nu}$ і $Pr = \frac{\nu}{\lambda}$ числа Грасгофа і Прандтля. Використовуються

наступні одиниці: h – довжини; $\frac{h^2}{\nu}$ – часу; $\frac{qh^4g\beta}{2\nu}$ – швидкості; $\frac{qh^2}{2}$ –

температури; $\frac{\rho g\beta h^3}{2}$ – тиску.

Рівняння допускають наступні стаціонарні рішення для швидкості і температури [1]:

$$v_s = \frac{\cos\alpha}{60}(1 - 6x^2 + 5x^4) \quad (3)$$

$$T_s = 1 - x^2 \quad (4)$$

Запишемо систему рівнянь (1) в збуреному вигляді

$$\frac{\partial v}{\partial t} + Gr[(v\nabla)v_s + (v_s\nabla)v] = -\nabla p + \nabla^2 v + T_j,$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + Gr[v\nabla T_s + v_s\nabla T] = \frac{1}{Pr} \nabla^2 T. \quad (5)$$

Проекції цих рівнянь на координатні осі мають вид

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_x - v_s \frac{\partial v_x}{\partial z} Gr - T \sin \alpha,$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)v_z - \left(v_x \frac{\partial v_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial v_z}{\partial z}\right) Gr + T \cos \alpha, \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) T \frac{1}{Pr} - \left(v_x \frac{\partial T_s}{\partial x} + v_s \frac{\partial T}{\partial z}\right).$$

Система рівнянь (6) використовується для отримання локального потенціалу. Кожне з рівнянь цієї системи домножуємо на відповідні прирости, додаємо, їх і враховуючи що

$$-\frac{\partial v_x}{\partial t} \delta v_x = -\frac{\partial v_x^o}{\partial t} \delta v_x - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\delta v_x)^2,$$

$$-\frac{\partial v_z}{\partial t} \delta v_z = -\frac{\partial v_z^o}{\partial t} \delta v_z - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\delta v_z)^2,$$

$$-\frac{\partial T}{\partial t} \delta T = -\frac{\partial T^o}{\partial t} \delta T - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\delta T)^2,$$

після інтегрування частинами отриманого виразу маємо:

$$L = \int_{-1}^1 \left(\begin{aligned} & \frac{\partial v_x^o}{\partial t} v_x + \frac{\partial v_z^o}{\partial t} v_z + \frac{\partial T^o}{\partial t} T + \frac{\partial p^o}{\partial x} v_x + \frac{\partial p}{\partial z} v_z - \\ & - \frac{\partial^2 v_x^o}{\partial x^2} v_x - T^o v_z \cos \alpha - \frac{\partial^2 v_x^o}{\partial z^2} v_x + T^o v_x \sin \alpha - \\ & - \frac{\partial^2 v_z^o}{\partial x^2} v_z - \frac{\partial^2 v_z^o}{\partial z^2} v_z + v_x^o \frac{\partial v_x}{\partial x} v_z Gr + v_s \frac{\partial v_z^o}{\partial z} v_z Gr - \\ & - \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T^o}{\partial x^2} T - \frac{1}{Pr} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} T' + v_x^o \frac{\partial T_s}{\partial x} T Gr + v_s \frac{\partial T^o}{\partial z} T Gr + \\ & + v_s \frac{\partial T^o}{\partial z} T Gr \end{aligned} \right) dx. \quad (7)$$

Використовуючи збурення в формі

$$\left. \begin{aligned} u' &= Ge^{ikz} e^{\sigma t}, & u'^0 &= G^0 e^{ikz} e^{\sigma^0 t}, \\ w' &= \frac{i}{k} \frac{dG}{dx} e^{ikz} e^{\sigma t}, & w'^0 &= \frac{i}{k} \frac{dG_0}{dx} e^{ikz} e^{\sigma^0 t}, \\ T' &= \theta e^{ikz} e^{\sigma t}, & T'^0 &= \theta^0 e^{ikz} e^{\sigma^0 t}, \\ p' &= \eta e^{ikz} e^{\sigma t}, & p'^0 &= \eta^0 e^{ikz} e^{\sigma^0 t} \end{aligned} \right\}$$

і пробні функції

$$\left. \begin{aligned} G &= A_1(1-x^2)^2 + A_2 x(1-x^2)^2, \\ \theta &= B_1(1-x^2)(5-x^2) + B_2 x(1-x^2)(7-3x^2), \\ G^0 &= A_1^0(1-x^2)^2 + A_2^0 x(1-x^2)^2, \\ \theta^0 &= B_1^0(1-x^2)(5-x^2) + B_2^0 x(1-x^2)(7-3x^2) \end{aligned} \right\}$$

локальний потенціал прийме вид

$$\begin{aligned} L &= \frac{256}{315} i \lambda A_1 A_1^0 + \frac{256}{3465} i \lambda A_2 A_2^0 + \frac{7936}{315} B_1 B_1^0 + \frac{1280}{231} i \lambda B_2^0 B_2 + \frac{256 i \lambda}{105 k^2} A_1 A_1^0 + \\ &+ \frac{256 i \lambda}{315 k^2} A_2^0 A_2 + \frac{1}{k^2} \frac{384}{15} A_1^0 A_1 + \frac{1}{k^2} \frac{384}{21} A_2^0 A_2 + \frac{512}{315} A_2^0 A_2 - \frac{i}{k} \frac{1024}{23100} Gr A_1 A_1^0 \times \\ &\times \cos \alpha + \frac{i}{k} \frac{3072}{270270} Gr A_2 A_2^0 \cos \alpha - \frac{i}{k} \frac{6144}{623700} Gr A_1^0 A_1 \cos \alpha + \frac{i}{k} \frac{2048}{900900} Gr A_2 A_2^0 \times \\ &\times \cos \alpha - \frac{i}{k} \frac{128}{35} A_1 B_2^0 \cos \alpha + \frac{i}{k} \frac{512}{315} A_2 B_1 \cos \alpha + \frac{512}{105} A_1^0 A_1 + k^2 \frac{256}{315} A_1^0 A_1 + \quad (8) \\ &+ k^2 \frac{256}{3465} A_2^0 A_2 + \frac{4096}{540540} ik Gr A_1 A_1^0 \cos \alpha + \frac{1408}{315} A_1 B_1^0 \sin \alpha + \frac{2176}{3465} A_2 B_2^0 \times \\ &\times \sin \alpha + \frac{1}{Pr} \frac{1920}{35} B_2^0 B_2 + \frac{1}{Pr} \frac{6528}{105} B_1^0 B_1 + \frac{k^2 6 k^2}{315 Pr} B_1^0 B_1 + \frac{1280 k^2}{231 Pr} B_2^0 B_2 - \frac{3328}{3465} \times \\ &\times Gr A_2^0 B_1 - \frac{4352}{3465} Gr A_1 B_1 + \frac{2048}{11700} ik Gr B_1 B_1^0 \cos \alpha - \frac{19456}{2702700} ik Gr B_2^0 B_2 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Сталі $A_1, A_1^0, A_2, A_2^0, B_1, B_1^0, B_2, B_2^0$ вибираємо так, щоб виконувалися умови

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial L}{\partial A_1} \right)_{A_2, A_1^0, B_1, B_2, B_2^0, A_2^0, B_1^0} &= 0, & \left(\frac{\partial L}{\partial A_2} \right)_{A_1, A_1^0, B_1, B_1^0, B_2, B_2^0, A_2^0} &= 0, \\ \left(\frac{\partial L}{\partial B_1} \right)_{A_1, A_1^0, A_2, A_2^0, B_1^0, B_2, B_2^0} &= 0, & \left(\frac{\partial L}{\partial B_2} \right)_{A_1, A_1^0, B_1, B_1^0, A_2, B_2^0, A_2^0} &= 0. \end{aligned} \right\} (9)$$

Звідси за використання додаткових умов

$$A_1^0 = A_1; \quad B_1^0 = B_1; \quad A_2^0 = A_2; \quad B_2^0 = B_2$$

одержуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial A_1} &= (4,8760 + 25,6000 \frac{1}{k^2} + 0,8126k^2 - 0,0541 \frac{i}{k} Gr \cos \alpha + 0,0075ikGr \times \\ &\times \cos \alpha + 0,8126\lambda + 2,4380 \frac{i\lambda}{k^2}) A_1 + 4,4698B_1 \sin \alpha - 3,6571 \frac{i}{k} B_2 \cos \alpha, \\ \frac{\partial L}{\partial A_2} &= (1,6252 + 18,2857 \frac{1}{k^2} + 0,0738k^2 + \frac{1}{k^2} 0,8126\lambda + 0,0739i\lambda + \\ &+ 0,0033 \frac{i}{k} Gr \cos \alpha) A_2 + 1,6253 \frac{i}{k} B_1 \cos \alpha + 0,6279B_2 \sin \alpha; \\ \frac{\partial L}{\partial B_1} &= -0,9604GrA_2 + \left(\begin{array}{l} 62,1714 \frac{1}{Pr} + 25,1936 \frac{k^2}{Pr} + 0,1750ikGr \cos \alpha + \\ + 25,1936i\lambda \end{array} \right) B_1; \\ \frac{\partial L}{\partial B_2} &= -1,2559GrA_1 + \left(\begin{array}{l} 54,8571 \frac{1}{Pr} + 5,5411 \frac{k^2}{Pr} - 0,0144ikGr \cos \alpha + \\ + 5,5411i\lambda \end{array} \right) B_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Для існування нетривіальних розв'язків цієї системи рівнянь необхідно, щоб

$$\begin{vmatrix} A_{11} + i\lambda B_{11} + & 0 & F_{13} \sin \alpha & D_{14} ik \cos \alpha \\ + ikC_{11} Gr \cos \alpha & & & \\ 0 & A_{22} + i\lambda B_{22} + & F_{23} ik \cos \alpha & D_{24} \sin \alpha \\ & + ikC_{22} Gr \cos \alpha & & \\ 0 & d_{22} Gr & a_{11} + b_{11} i\lambda + & 0 \\ & & + s_{11} ikGr \cos \alpha & \\ d_{11} Gr & 0 & 0 & a_{22} + b_{22} i\lambda + \\ & & & + s_{22} ikGr \cos \alpha \end{vmatrix} = 0, \quad (11)$$

де

$$\begin{aligned} A_{11} &= 4,8760k^2 + 25,6 + 0,8126k^4; & A_{22} &= 0,0739k^4 + 1,6252k^2 + 18,2857; \\ B_{11} &= 0,8126k^2 + 2,4380; & B_{22} &= 0,8126 + 0,0739k^2; \\ C_{11} &= 0,0075k^2 - 0,0541; & a_{11} &= \frac{1}{Pr} (62,1714 + 25,1936k^2); \\ d_{11} &= -1,2559; & C_{22} &= 0,0053; F_{13} = 4,4698k^2; b_{11} = 25,1936; \\ a_{22} &= \frac{1}{Pr} (54,8571 + 5,5411k^2); & D_{24} &= 0,6279k^2; \\ b_{22} &= 5,5411; & S_{11} &= 0,1750; & S_{22} &= 0,0144. \end{aligned}$$

Приврівнюючи визначник, до нуля, отримуємо характеристичне рівняння

$$\begin{aligned}
& E_{40}Gr^4 \cos^4 \alpha + E_{30}Gr^3 \cos^3 \alpha + E_{13}i\lambda^3 Gr \cos \alpha + E_{04}\lambda^4 + \\
& + E_{20}Gr^2 \cos^2 \alpha + E_{11}\lambda Gr \cos \alpha + E'_{20}Gr^2 \sin^2 \alpha + E_{02}i\lambda^2 + E_{00} + \quad (12) \\
& + i \left(N_{30}Gr^3 \cos^3 \alpha + N_{03}\lambda^3 + N_{12}\lambda^2 Gr \cos \alpha + \right. \\
& \left. + N_{21}i\lambda Gr^2 \cos^2 \alpha + N_{10}Gr \cos \alpha + N_{01}\lambda \right) = 0.
\end{aligned}$$

Коефіцієнти $E_{40}, E_{30}, E_{13}, E_{04}, E_{20}, E_{11}, E'_{20}, E_{02}, E_{00}, N_{30}, N_{03}, N_{12}, N_{21}, N_{10}, N_{01}$ визначаються за наступними залежностями:

$$\begin{aligned}
E_{40} &= K^4 C_{22} S_{11} S_{22} C_{11}; \quad E_{04} = B_{22} b_{11} b_{22} B_{11}; \\
L_{31} &= K^3 (C_{22} S_{11} S_{22} B_{11} + C_{22} S_{11} b_{22} C_{11} + b_{11} C_{22} S_{22} C_{11} + S_{11} B_{22} S_{22} C_{11}); \\
E_{22} &= K^2 \left(C_{22} S_{11} b_{22} B_{11} + b_{11} C_{22} S_{22} B_{11} + S_{11} B_{22} S_{22} B_{11} + B_{22} b_{11} S_{22} C_{11} + \right. \\
& \left. + b_{11} b_{22} C_{22} C_{11} + S_{11} B_{22} b_{22} C_{11} \right); \\
E_{11} &= -K \left(b_{11} C_{22} a_{22} A_{11} + S_{11} B_{22} a_{22} A_{11} + B_{22} a_{11} S_{22} A_{11} + A_{22} b_{11} S_{22} A_{11} + \right. \\
& \left. + C_{22} a_{11} b_{22} A_{11} + A_{22} S_{11} b_{22} A_{11} + C_{22} a_{11} a_{22} B_{11} + A_{22} S_{11} a_{22} B_{11} + \right. \\
& \left. + S_{22} A_{22} a_{11} B_{11} + B_{22} a_{11} a_{22} C_{11} + A_{22} b_{11} a_{22} C_{11} + A_{22} b_{22} a_{11} C_{11} - \right. \\
& \left. - d_{11} A_{11} F_{23} b_{22} - F_{23} a_{22} d_{11} B_{11} + B_{22} a_{11} D_{14} d_{22} + A_{22} b_{11} D_{14} d_{22} \right); \\
E_{20} &= -K^2 \left(C_{22} a_{22} S_{11} A_{11} + C_{22} a_{11} S_{22} A_{11} + A_{22} S_{11} A_{11} S_{22} - d_{11} F_{23} a_{22} C_{11} + \right. \\
& \left. + C_{22} a_{11} a_{22} C_{11} + A_{22} S_{11} a_{22} C_{11} + S_{22} A_{22} a_{11} C_{11} - d_{11} F_{23} S_{22} A_{11} + \right. \\
& \left. + d_{11} F_{23} D_{14} d_{22} \right); \\
E_{02} &= - \left(B_{11} b_{11} a_{22} A_{11} + B_{22} a_{11} b_{22} A_{11} + A_{22} b_{11} b_{22} A_{11} + B_{22} a_{11} a_{22} B_{11} + \right. \\
& \left. + A_{22} b_{11} a_{22} B_{11} + A_{22} b_{22} a_{11} B_{11} \right); \\
E_{13} &= K (B_{22} b_{11} S_{22} B_{11} + b_{11} b_{22} C_{22} B_{11} + S_{11} B_{22} b_{22} B_{11} + B_{22} b_{11} b_{22} C_{11}); \\
E'_{20} &= -F_{13} D_{24} d_{11} d_{22}; \quad L_{00} = A_{11} a_{11} a_{22} A_{22}; \\
N_{01} &= B_{22} A_{11} a_{11} a_{22} + A_{22} A_{11} b_{11} a_{22} + A_{22} A_{11} b_{22} a_{11} + A_{22} B_{11} a_{11} a_{22}; \\
N_{10} &= K \left(C_{22} a_{11} a_{22} A_{11} + A_{22} S_{11} A_{11} a_{22} + S_{22} A_{22} a_{11} A_{11} - d_{11} F_{23} a_{22} A_{11} + \right. \\
& \left. + A_{22} a_{11} a_{22} C_{11} - A_{22} a_{11} D_{14} d_{22} \right); \\
N_{03} &= -(B_{22} A_{11} b_{11} b_{22} + B_{22} B_{11} b_{11} a_{22} + B_{22} B_{11} a_{11} b_{22} + A_{22} b_{11} b_{22} B_{11}); \\
N_{21} &= -K^2 \left(C_{22} S_{11} b_{22} A_{11} + b_{11} C_{22} S_{22} A_{11} + S_{11} B_{22} S_{22} A_{11} + C_{22} a_{22} S_{11} B_{11} + \right. \\
& \left. + C_{22} a_{11} S_{22} B_{11} + A_{22} S_{11} S_{22} B_{11} - d_{11} F_{23} S_{22} B_{11} + b_{11} C_{22} a_{22} C_{11} + \right. \\
& \left. + S_{11} B_{22} a_{22} C_{11} + B_{22} a_{11} S_{22} C_{11} + A_{22} b_{11} S_{22} C_{11} + C_{22} a_{11} b_{22} C_{11} + \right. \\
& \left. + A_{22} S_{11} b_{22} C_{11} - d_{11} F_{23} b_{22} C_{11} - b_{11} C_{22} D_{14} d_{22} + B_{22} S_{11} D_{14} d_{22} \right); \\
N_{30} &= -K^3 \left(C_{22} S_{11} S_{22} A_{11} + C_{22} a_{22} S_{11} C_{11} + C_{22} a_{11} S_{22} C_{11} + \right. \\
& \left. + A_{22} S_{11} S_{22} C_{11} + d_{11} F_{23} S_{22} C_{11} - C_{22} S_{11} D_{14} d_{22} \right); \\
N_{22} &= K^2 F_{23} D_{14} d_{11} d_{22}.
\end{aligned}$$

Прирівнюючи до нуля окремо дійсну і уявні частини цього рівняння, маємо:

$$E_{40}Gr^4 \cos^4 \alpha + E_{30}Gr^3 \cos^3 \alpha + E_{13}i\lambda^3 Gr \cos \alpha + E_{04}\lambda^4 + E_{20}Gr^2 \cos^2 \alpha + E_{11}\lambda Gr \cos \alpha + E'_{20} \sin^2 \alpha + E_{02}i\lambda^2 + E_{00} = 0, \quad (13)$$

$$N_{30}Gr^3 \cos^3 \alpha + N_{03}\lambda^3 + N_{12}\lambda^2 Gr \cos \alpha + N_{21}i\lambda Gr^2 \cos^2 \alpha + N_{10}Gr \cos \alpha + N_{01}\lambda = 0. \quad (14)$$

Розв'язок цієї нелінійної системи алгебраїчних рівнянь дозволяє визначити границю стійкості конвективного руху рідини в широкому інтервалі зміни кута α і числа Прандтля Pr . Покажемо, що навіть обмежившись лише однією парною пробною функцією для швидкості і однією непарною для температури отримаємо цілком задовільний результат аж до $\alpha = 50^\circ$. Задамось, наприклад, для швидкості і температури наступними функціями

$$G_1 = A_1(1-x^2)^2; \quad v_1 = B_1x(1-x^2)(7-3x^2). \quad (15)$$

Для цього випадку характеристичне рівняння набуде вигляду

$$A_{11}a_{11} + \lambda(A_{11}b_{22} + B_{11}a_{22}) + ikGr\lambda \cos \alpha(S_{22}A_{11} + a_{22}C_{11}) + \lambda^2 b_{22}B_{11} + ikGr \cos \alpha(S_{22}B_{11} + b_{22}C_{11} - d_{11}D_{14}) + k^2 C_{11}S_{22}Gr^2 \cos^2 \alpha = 0. \quad (16)$$

Прирівнюючи до нуля дійсну і уявну частини характеристичного рівняння маємо систему рівнянь

$$\left. \begin{aligned} A_{11}a_{22} - B_{11}b_{22}\lambda^2 - \lambda Gr \cos \alpha(C_{11}a_{22} + S_{22}A_{11}) - k^2 S_{22}C_{11}Gr^2 \cos^2 \alpha = 0, \\ (B_{11}a_{22} + b_{22}A_{11})\lambda + kGr \cos \alpha(B_{11}S_{22} + b_{22}C_{11}) - d_{11}D_{14}Gr \cos \alpha = 0. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Виключивши з цієї системи λ , отримаємо рівняння, яке дозволяє визначити критичне число Грасгофа як функцію хвильового числа і числа Прандтля

$$k^2 Gr^2 \cos^2 \alpha \left[\begin{aligned} & B_{11}b_{22} \frac{(A_{22}S_{22} + a_{22}C_{11} - d_{22}D_{14})^2}{(B_{11}a_{22} + b_{22}A_{11})^2} + \\ & + (C_{11}b_{22} + S_{22}B_{11}) \frac{-A_{11}S_{22} - a_{22}C_{11} + d_{22}D_{14}}{B_{11}a_{22} + b_{22}A_{11}} \end{aligned} \right] - A_{11}a_{22} = 0. \quad (18)$$

Розв'язання рівняння (18) проводилося для різних значень хвильового числа (k) 0,2–3, чисел Прандтля від 1 до 13 з кроком 3 і кута нахилу α шару до напрямку гравітаційного поля до 50° через кожні 10° .

Рівняння (18) в координатах $Gr - k$ представляє нейтральну криву, яка розділяє площину на області стійкого і нестійкого конвективного руху (рис. 1-6). За певних значень хвильового числа на нейтральній кривій в залежності від числа Прандтля і кута нахилу появляється більш або менш виражений максимум.

Фізичні властивості рідини, які визначають величину числа Прандтля і орієнтація шару в гравітаційному полі істотним чином впливають

на вид нейтральної кривої. При значенні числа Прандтля рівному одиниці крива має чітко виражений мінімум (рис. 1-3). Зі збільшенням Pr мінімум на нейтральній кривій стає все більш розмитим. Вплив кута нахилу на вид нейтральної кривої для значень Pr 1, 10 і 16 показано на рис. 1-3. Зі зміною кута нахилу шару малов'язкої рідини границя стійкості змінюються в широких межах, але вид кривої зберігається (рис. 4). При переході до більш в'язких рідин зміна кута нахилу впливає більш відчутно. Так при $Pr = 1$, якщо відхилення від шару від вертикалі складає 50° , критичне число Грасгофа збільшується на 450, а при $Pr = 16$ – тільки на 80. Вплив кута нахилу на границю стійкості конвективного руху стає більш відчутним при віддаленні від вертикалі.

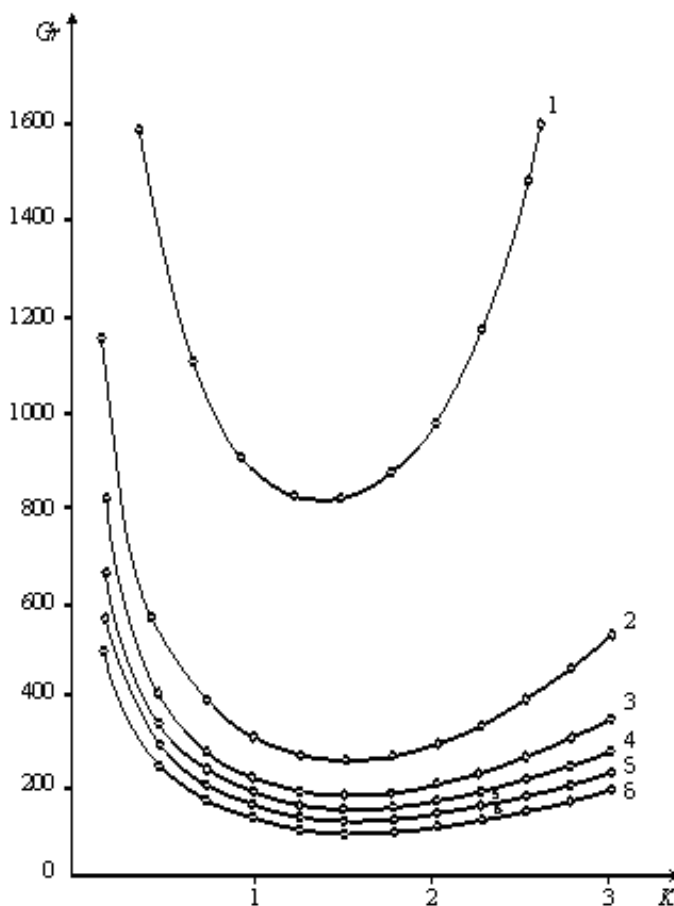


Рис. 1. Нейтральна крива для вертикального шару при різних значеннях числа Прандтля: крива 1 при $Pr = 1$; 2 – 4; 3 – 7; 4 – 10; 5 – 13; 6 – 16. Система з внутрішніми джерелами теплоти.

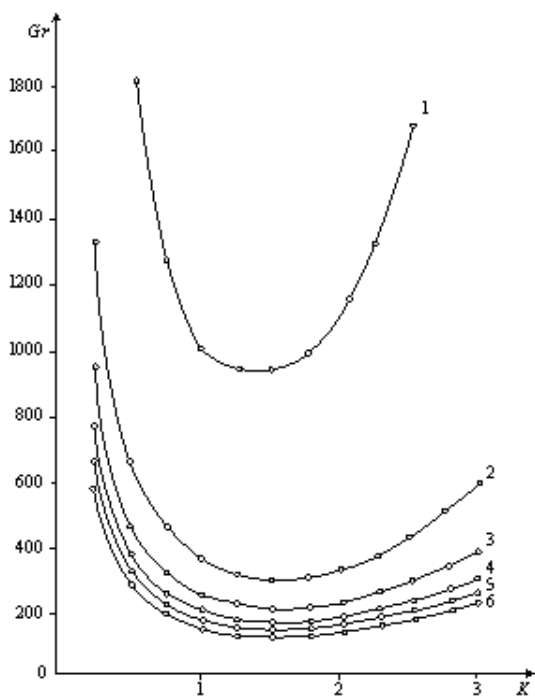


Рис. 2. Вплив Pr на залежність $Gr - K$ при $\alpha = 30$: крива 1 при $Pr = 1$; 2 – 4; 3 – 7; 4 – 10; 5 – 13; 6 – 16. Профіль швидкості парний

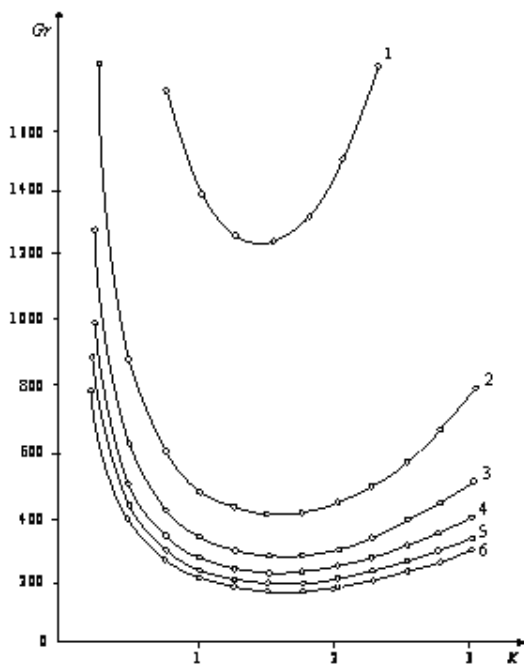


Рис. 3. Залежність $Gr - K$ для різних Pr : крива 1 при $Pr = 1$; 2 – 4; 3 – 7; 4 – 10; 5 – 13; 6 – 16. Профіль швидкості парний

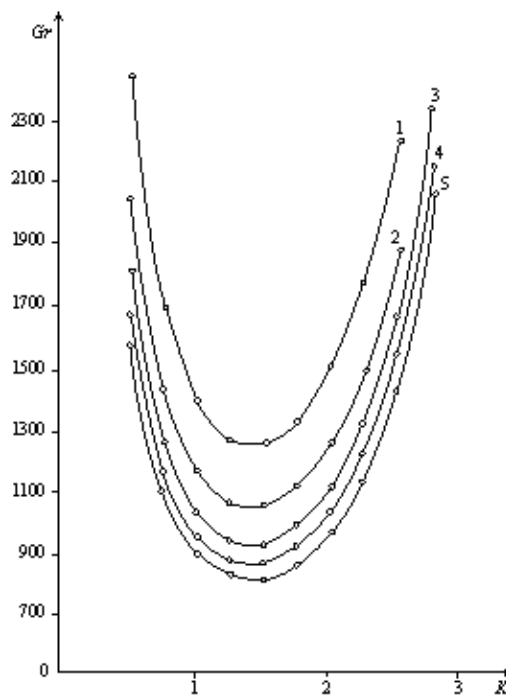


Рис. 4. Нейтральна крива для різних значень кута нахилу α : 1 – 50° ; 2 – 40° ; 3 – 30° ; 4 – 20° ; 5 – 0° . $Pr = 1$. Розподіл температури параболічний

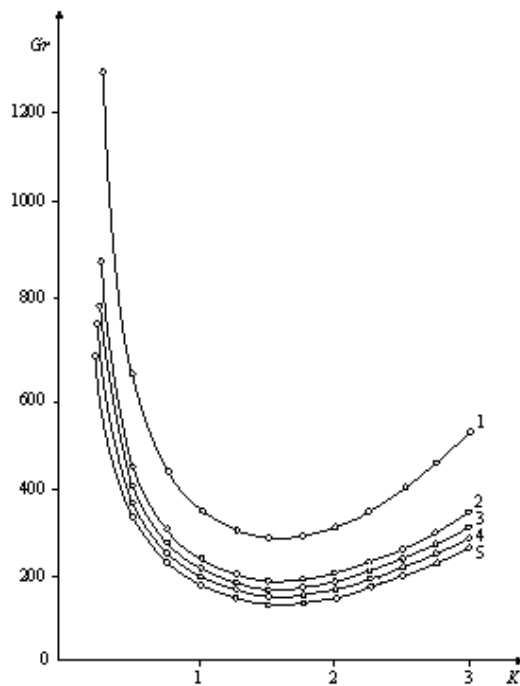


Рис. 5. Вплив кута нахилу α на залежність $Gr - K$: 1 – 50° ; 2 – 40° ; 3 – 30° ; 4 – 20° ; 5 – 0° . $Pr = 10$. Система з внутрішніми джерелами теплоти

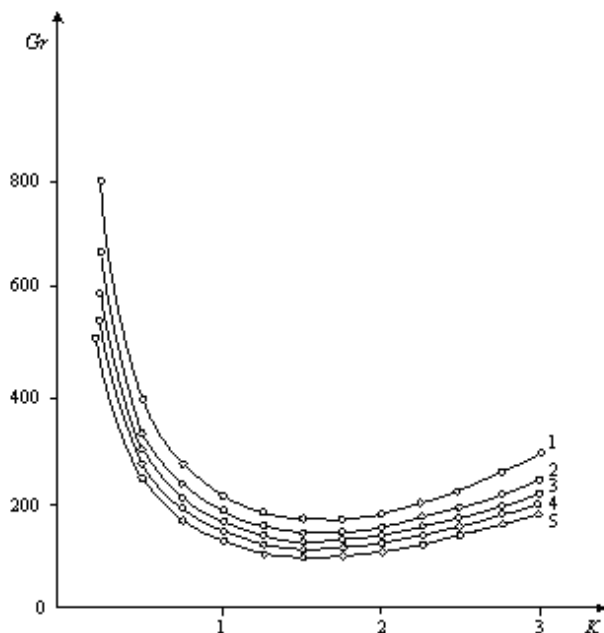


Рис. 6. Залежність $Gr - K$ для різних значень кута α : 1 – 50° ; 2 – 40° ; 3 – 30° ; 4 – 20° ; 5 – 0° . $Pr = 16$. Профіль швидкості парний

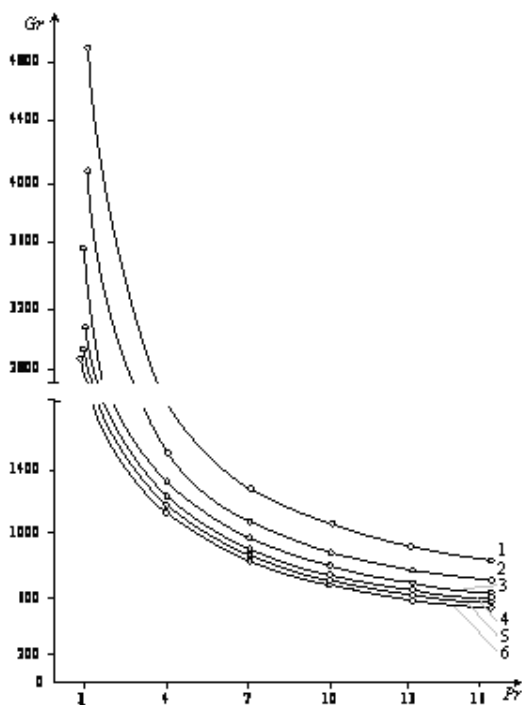


Рис. 7. Криві $Gr - Pr$ для різних значень α : 1 – 50° ; 2 – 40° ; 3 – 30° ; 4 – 20° ; 5 – 10° ; 6 – 0° ; $K = 0,25$. Розподіл температури параболічний

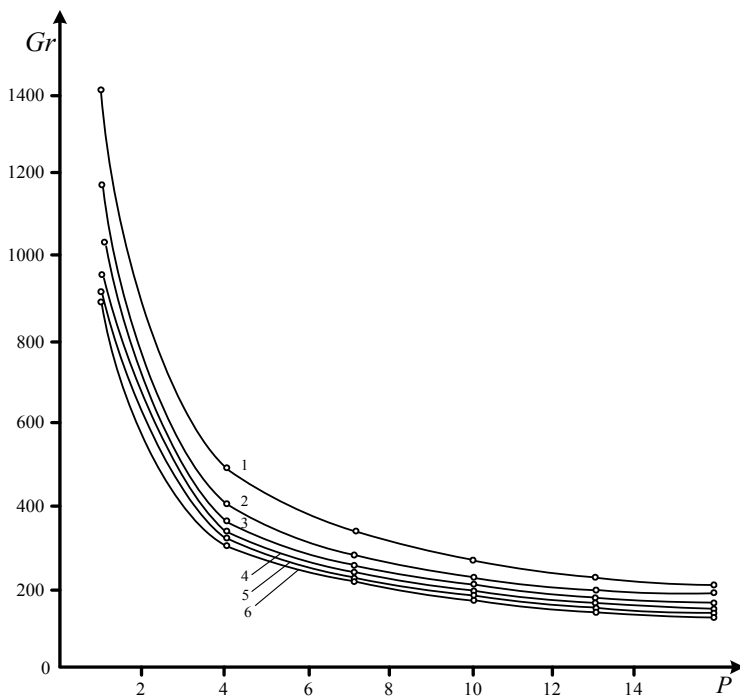


Рис. 8. Залежність кута нахилу α на залежність $Gr - Pr$: 1 – 50° ; 2 – 40° ; 3 – 30° ; 4 – 20° ; 5 – 10° ; 6 – 0° ; $K = 1$. Профіль швидкості парний

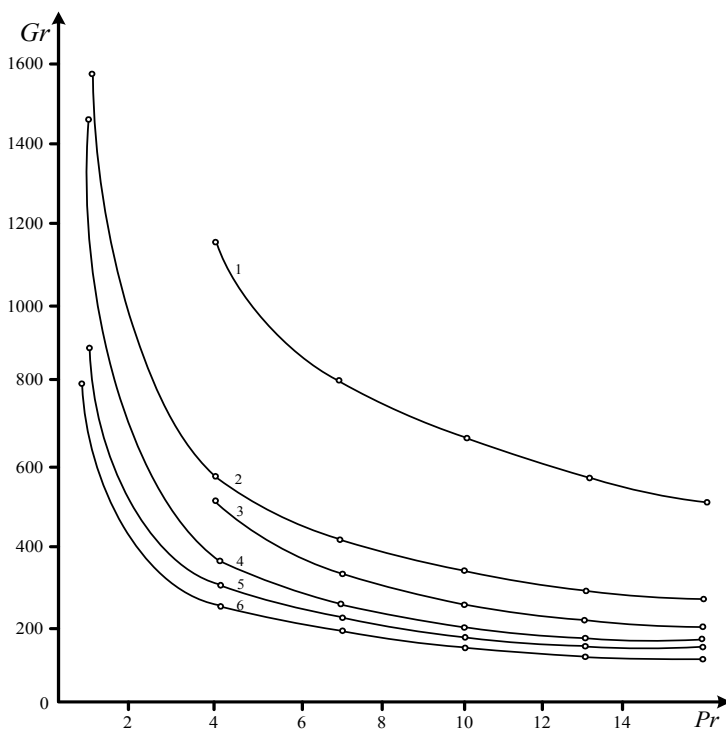


Рис. 9. Залежність $Gr - Pr$ для різних значень K : 1 – 0,25; 2 – 0,5; 3 – 3; 4 – 2,5; 5 – 1; 6 – 1,5. Система з внутрішніми джерелами теплоти

Значення мінімального числа Грасгофа в залежності від числа Прандтля для шести його значень наведено в табл. 1.

Таблиця 1. Мінімальні критичні числа Грасгофа в залежності від кута нахилу шару і числа Прандтля

α°	0	10	20	30	40	50
Pr = 1						
Gr	810,90	823,44	862,98	936,39	1058,60	1261,21
K_m	1,45	1,45	1,45	1,45	1,45	1,45
Pr = 4						
Gr	265,18	269,27	282,20	306,20	346,17	412,55
K_m	1,53	1,52	1,53	1,53	1,53	1,53
Pr = 7						
Gr	182,92	185,74	194,56	211,22	238,79	284,58
K_m	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55
Pr = 10						
Gr	147,02	149,29	156,45	169,76	192,92	228,72
K_m	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55
Pr = 13						
Gr	126,07	128,01	134,16	145,57	164,57	196,13
K_m	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55
Pr = 16						
Gr	112,01	113,73	119,20	129,33	146,22	179,25
K_m	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55	1,55

З табл. 1 випливає, що кут нахилу і число Прандтля суттєво впливають на мінімальне критичне значення числа Грасгофа. Залежність мінімального числа Грасгофа від числа Прандтля носить антибатний характер, в той час як вплив кута нахилу на границю стійкості симбатно. Хвильове число малочутливе до зміни кута нахилу шару і числа Прандтля. Вплив числа Прандтля на границю стійкості виявляється суттєвий в області малих значень, а при значеннях Pr , які наближаються до $16 \cdot Gr$, зміни незначні (рис. 7-8). На рис. 9 представлено залежність $Gr - Pr$ для значень хвильового числа в інтервалі 0,25–3 при вертикальному розміщенні шару. Вплив хвильового числа на вид $Gr - Pr$ кривої проявляється наступним чином: зі збільшенням до критичного значення крива зміщується вниз, при подальшому збільшенні хвильового числа – вгору.

Висновки

Методом локального потенціалу знайдено границю стійкості вільного конвективного руху відносно стоячих збурень нестисливої в'язкої

рідини з парним профілем швидкості, обумовленим зовнішнім температурним градієнтом перпендикулярним до напрямку гравітаційного поля.

Результати отримані з використанням тільки однієї пробної функції для швидкості і температури достатньо добре узгоджуються з даними, отриманими кінетичним методом з використанням складних пробних функцій [1].

Література

1. Mass Transfer / G.Z.Gerchuni, E.M.Zhukhovitsky, A.A.Yakimov, Int.J.Heat. – 17,717 (1974).
2. Гершуни Г.З. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости / Г.З.Гершуни, И.М.Жуховицкий. – М.: Наука, 1972. – 392 с.
3. Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика / В.Г.Левич. – М.: Изд-во АН СССР, 1952. – 132 с.
4. Гленсдорф П. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуаций / П.Гленсдорф, И.Пригожин.
5. Стратонович Р.Л. Нелинейная неравновесная термодинамика / Р.Л.Стратонович. – М.: Наука, 1985. – 480 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 10.12.2013 р.

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**, д.ф.-м.н., професором, чл.-кор. НАН України **Кушніром Р.М.** (м. Львів),*

RESEARCH OF FIRMNESS OF CONVECTIV MOTION WITH PARNIM TYPE OF SPEED

V. V. Negrych, Y.M. Dem'yanchuk, G. Y. Protsiuk

Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;

76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;

e-mail: trans@nung.edu.ua

We investigate the hydrodynamic stability of viscous incompressible fluid located between vertical parallel surfaces . Considered free convection with an even velocity profiles . For research use variational principle of non-equilibrium thermodynamics – the method of local potential. Determine the critical Grashof criterion , depending on the Prandtl number and value of the wave number at which the transition from simple to complex dissipative structures. Also take into account the angle of the layer with respect to the gravitational field. The method of calculation using only one test feature provides comparable results with the kinetic method , using complex test functions.

Key words: *convective fluid motion, the local potential, dissipative structures, criteria Grashof , Prandtl number.*