

## ПОТЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ ОДНОЧАСТОТНОГО НАБЛИЖЕННЯ СТАЦІОНАРНИХ КОЛИВАНЬ НЕПРУЖНИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ТІЛ

**В. В. Михайленко<sup>1</sup>, О. В. Луциков<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Житомирський державний університет ім. І. Франка; м. Житомир

<sup>2</sup>Житомирський державний технологічний університет; м. Житомир

*Показано, що визначальні рівняння непружних фізично нелінійних п'єзоелектричних тіл при моногармонічному навантаженні у межах гіпотези одночастотності коливань можна виразити через потенціали.*

**Ключові слова:** п'єзоелектричні тіла, одночастотне наближення, амплітудні рівняння.

Припустимо, що в результаті дії гармонічного навантаження з круговою частотою  $\omega$  в п'єзоелектричному тілі встановлюється одночастотний (моногармонічний) напружено-деформований і електричний стан виду [1, 2]

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= \sigma'_{ij} \cos \omega t - \sigma''_{ij} \sin \omega t, \\ \varepsilon_{ij} &= \varepsilon'_{ij} \cos \omega t - \varepsilon''_{ij} \sin \omega t, \\ E_j &= E'_j \cos \omega t - E''_j \sin \omega t, \\ D_j &= D'_j \cos \omega t - D''_j \sin \omega t.\end{aligned}\tag{1}$$

Виберемо за незалежні змінні амплітуди  $\varepsilon'_{ij}$ ,  $\varepsilon''_{ij}$  механічної деформації і  $D'_j$ ,  $D''_j$  індукції електричного поля. Тоді амплітуди  $\sigma'_{ij}$ ,  $\sigma''_{ij}$  механічного напруження і  $E'_k$ ,  $E''_k$  напруженості електричного поля розглядаються як нелінійні функції незалежних змінних

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij} &= \sigma'_{ij}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k), \\ \sigma''_{ij} &= \sigma''_{ij}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k), \\ E'_j &= E'_j(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k), \\ E''_j &= E''_j(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k).\end{aligned}\tag{2}$$

Ці функції повинні задовольняти умову інваріантності відносно перетворення зсуву в часі, тобто відносно заміни в (1)  $\omega t$  на  $\omega t + \varphi$ . Цю умову можна записати у матричному вигляді

$$\mathcal{QS}(A) = S(QA),$$

де

$$S = (\sigma'_{ij}, \sigma''_{ij}, E'_k, E''_k)^T, \quad A = (\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}, D'_k, D''_k)^T,$$

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

Функції (2) вважаються диференційовними по  $\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k$ . Тоді шляхом виключення параметра  $\varphi$  умову інваріантності можна записати в диференціальній формі

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial \varepsilon'_{kl}} \varepsilon''_{kl} - \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial \varepsilon''_{kl}} \varepsilon'_{kl} + \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial D'_k} D''_k - \frac{\partial \tilde{\sigma}_{ij}}{\partial D''_k} D'_k + i \tilde{\sigma}_{ij} &= 0, \\ \frac{\partial \tilde{E}_i}{\partial \varepsilon'_{kl}} \varepsilon''_{kl} - \frac{\partial \tilde{E}_i}{\partial \varepsilon''_{kl}} \varepsilon'_{kl} + \frac{\partial \tilde{E}_i}{\partial D'_k} D''_k - \frac{\partial \tilde{E}_i}{\partial D''_k} D'_k + i \tilde{E}_i &= 0, \end{aligned}$$

де введені позначення

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} + i \sigma''_{ij}, \quad \tilde{E}_k = E'_k + i E''_k, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Розглянемо функції дисипації [1, 4]

$$\bar{D} = \sigma''_{ij} \varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij} \varepsilon''_{ij} + E''_k D'_k - E'_k D''_k \quad (3)$$

і накопичення

$$\bar{U} = \sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij} \varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k + E''_k D''_k. \quad (4)$$

Безпосередньою підстановкою (з врахуванням умови інваріантності) можна перевірити, що ці функції задовольняють рівнянню

$$\frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \varepsilon'_{kl}} \varepsilon''_{kl} - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial \varepsilon''_{kl}} \varepsilon'_{kl} + \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial D'_k} D''_k - \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial D''_k} D'_k = 0. \quad (5)$$

Подальший виклад спирається на наступну теорему.

**Теорема.** Нехай  $\bar{X}$  – елемент  $N$ -мірного векторного простору  $E_N$  з внутрішнім добутком  $\bar{A} \otimes \bar{B}$ ,  $\bar{Y}(\bar{X})$  – неперервно-диференційовне відображення  $E_N \rightarrow E_N$ , а  $F(\bar{X})$  – скалярна неперервно-диференційовна функція. Тоді будь-який розв'язок рівняння

$$\bar{X} \otimes \bar{Y}(\bar{X}) = F(\bar{X}) \quad (6)$$

можна подати у вигляді

$$\bar{Y}(\bar{X}) = \text{grad} \Psi(\bar{X}) + \bar{U}(\bar{X});$$

$$\Psi(\bar{X}) = \int_0^1 F(\lambda \bar{X}) \frac{d\lambda}{\lambda};$$

$$U_i(\bar{X}) = \int_0^1 \lambda X_j \left[ \frac{\partial Y_i(\lambda \bar{X})}{\partial (\lambda X_j)} - \frac{\partial Y_j(\lambda \bar{X})}{\partial (\lambda X_i)} \right] d\lambda; \quad (7)$$

$$\bar{U}(\bar{X}) \otimes \bar{X} = 0.$$

Твердження теореми перевіряється шляхом диференціювання рівності

$$\int_0^1 \bar{X} \otimes \bar{Y}(\lambda \bar{X}) d\lambda = \Psi(\bar{X}),$$

яка утворюється з (6), якщо замінити  $\bar{X}$  на  $\lambda \bar{X}$  і скористатись позначенням функції  $\Psi(\bar{X})$  з (7).

Розглянемо функції (3) і (4)

$$\sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij} \varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k - E'_k D''_k = \bar{D}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_l, D''_l), \quad (8)$$

$$\sigma'_{ij} \varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij} \varepsilon''_{ij} + E'_k D'_k + E''_k D''_k = \bar{U}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_l, D''_l). \quad (9)$$

Введемо позначення  $\bar{X} = (\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}, D'_k, D''_k)$ ,  $\bar{Y} = (\sigma''_{ij}, -\sigma'_{ij}, E''_k, -E'_k)$ . Тоді розв'язок рівняння (8) згідно з наведеною вище теоремою можна записати у вигляді

$$\begin{aligned} \sigma'_{ij} &= -\frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}} - D''_{ij}, \quad \sigma''_{ij} = \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}} + D'_{ij}, \\ E'_k &= -\frac{\partial D}{\partial D''_k} - R''_k, \quad E''_k = \frac{\partial D}{\partial D'_k} + R'_k, \end{aligned} \quad (10)$$

де функція  $D$  визначається співвідношенням

$$D = \int_0^1 \bar{D}(\lambda \varepsilon'_{ij}, \lambda \varepsilon''_{ij}, \lambda D'_k, \lambda D''_k) \frac{d\lambda}{\lambda}. \quad (11)$$

Для функцій  $D'_{ij}, D''_{ij}, R'_k, R''_k$  маємо

$$D'_{ij} \varepsilon'_{ij} + D''_{ij} \varepsilon''_{ij} + R'_k D'_k + R''_k D''_k = 0. \quad (12)$$

Підставляючи (10) в рівняння (9), отримуємо

$$\begin{aligned} D'_{ij} \varepsilon''_{ij} - D''_{ij} \varepsilon'_{ij} + R'_k D''_k - R''_k D'_k &= \\ &= \bar{U}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_l, D''_l). \end{aligned} \quad (13)$$

Тут враховано, що функція  $D$  (11), як і функція  $\bar{D}$ , задовольняє диференціальному рівнянню (5).

Введемо позначення  $\bar{X} = (\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}, D'_k, D''_k)$ ,  $\bar{Y} = (-D''_{ij}, D'_{ij}, -R''_k, R'_k)$ . Застосувавши знову наведену вище теорему, приходимо до розв'язку рівняння (13)

$$\begin{aligned} D'_{ij} &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}} + g''_{ij}, \quad D''_{ij} = -\frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} - g'_{ij}, \\ R'_k &= \frac{\partial U}{\partial D''_k} + g''_k, \quad R''_k = -\frac{\partial U}{\partial D'_k} - g'_k. \end{aligned} \quad (14)$$

Функція  $U$  визначається співвідношенням

$$U = \int_0^1 \bar{U}(\lambda \varepsilon'_{ij}, \lambda \varepsilon''_{ij}, \lambda D'_k, \lambda D''_k) \frac{d\lambda}{\lambda}$$

і тому також задовольняє диференціальне рівняння (5).

Об'єднуючи (10) і (11), отримуємо сумісний розв'язок системи рівнянь (8) і (9) у вигляді

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij} &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}} + g'_{ij}, \quad \sigma''_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}} + g''_{ij}, \\ E'_k &= \frac{\partial U}{\partial D'_k} - \frac{\partial D}{\partial D''_k} + g'_k, \quad E''_k = \frac{\partial U}{\partial D''_k} + \frac{\partial D}{\partial D'_k} + g''_k.\end{aligned}\quad (15)$$

Функції  $g'_{ij}$ ,  $g''_{ij}$ ,  $g'_k$ ,  $g''_k$  задовольняють умовам

$$\begin{aligned}g'_{ij}\varepsilon'_{ij} + g''_{ij}\varepsilon''_{ij} + g'_k D'_k + g''_k D''_k &= 0, \\ g''_{ij}\varepsilon'_{ij} - g'_{ij}\varepsilon''_{ij} + g''_k D'_k - g'_k D''_k &= 0,\end{aligned}\quad (16)$$

причому перша з них є наслідком теореми, застосованої до рівняння (13), а друга – наслідком рівнянь (13), (14) і (5).

Підставимо рівняння (15) у (8) і (9), враховуючи при цьому рівності (5) і (16). В результаті отримаємо вирази для функцій дисипації  $\bar{D}$  і накопичення  $\bar{U}$  через потенціали відповідно  $D$  і  $U$

$$\begin{aligned}\bar{D} &= \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}} \varepsilon'_{ij} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}} \varepsilon''_{ij} + \frac{\partial D}{\partial D'_k} D'_k + \frac{\partial D}{\partial D''_k} D''_k, \\ \bar{U} &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} \varepsilon'_{ij} + \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}} \varepsilon''_{ij} + \frac{\partial U}{\partial D'_k} D'_k + \frac{\partial U}{\partial D''_k} D''_k.\end{aligned}$$

Таким чином, умови (16) призводять до того, що функції  $g'_{ij}$ ,  $g''_{ij}$ ,  $g'_k$ ,  $g''_k$  в рівняннях (15) не дають ніякого внеску ні в функцію дисипації, ні в функцію накопичення. Skorиставшись третім із співвідношень (7) і умовами інваріантності відносно перетворення зсуву в часі в диференціальній формі, можна показати, що достатніми умовами рівностей

$$g'_{ij} = 0, \quad g''_{ij} = 0, \quad g'_k = 0, \quad g''_k = 0$$

і тим самим зображення амплітудних рівнянь в потенціалах

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij} &= \frac{\partial U}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \quad \sigma''_{ij} = \frac{\partial U}{\partial \varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}}, \\ E'_k &= \frac{\partial U}{\partial D'_k} - \frac{\partial D}{\partial D''_k}, \quad E''_k = \frac{\partial U}{\partial D''_k} + \frac{\partial D}{\partial D'_k}\end{aligned}\quad (17)$$

є такі умови симетрії

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \varepsilon'_{kl}} - \frac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial \varepsilon''_{kl}} &= \frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial \sigma''_{kl}}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \\ \frac{\partial E'_k}{\partial D'_l} - \frac{\partial E''_k}{\partial D''_l} &= \frac{\partial E'_l}{\partial D'_k} - \frac{\partial E''_l}{\partial D''_k}, \\ \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial D'_k} - \frac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial D''_k} &= \frac{\partial E'_k}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial E''_k}{\partial \varepsilon''_{ij}}.\end{aligned}\quad (18)$$

Диференціюючи рівності (17), легко переконатися, що ці умови є і необхідними.

Подібним чином можна отримати аналогічні результати для інших наборів незалежних змінних. Відповідна консервативна характеристика знаходиться шляхом розписування виразу для функції дисипації з використанням відповідних умов інваріантності відносно перетворення зсуву в часі в диференціальній формі. Наприклад, у випадку залежностей

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij} &= \sigma'_{ij}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, E'_k, E''_k), \\ \sigma''_{ij} &= \sigma''_{ij}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, E'_k, E''_k), \\ D'_j &= D'_j(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, E'_k, E''_k), \\ D''_j &= D''_j(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, E'_k, E''_k)\end{aligned}\quad (19)$$

розв'язок системи рівнянь

$$\begin{aligned}\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij} - \sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij} + D'_k E''_k - D''_k E'_k &= \bar{D}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, E'_l, E''_l), \\ \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} - D'_k E'_k - D''_k E''_k &= \bar{H}(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, E'_l, E''_l)\end{aligned}$$

однозначно визначений і зображується у вигляді

$$\begin{aligned}\sigma'_{ij} &= \frac{\partial H}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \quad \sigma''_{ij} = \frac{\partial H}{\partial \varepsilon''_{ij}} + \frac{\partial D}{\partial \varepsilon'_{ij}}, \\ D'_k &= -\frac{\partial H}{\partial E'_k} + \frac{\partial D}{\partial E''_k}, \quad D''_k = -\frac{\partial H}{\partial E''_k} - \frac{\partial D}{\partial E'_k}\end{aligned}\quad (21)$$

тоді і тільки тоді, коли виконуються такі умови симетрії:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \varepsilon'_{kl}} - \frac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial \varepsilon''_{kl}} &= \frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial \sigma''_{kl}}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \\ \frac{\partial D'_k}{\partial E'_l} - \frac{\partial D''_k}{\partial E''_l} &= \frac{\partial D'_l}{\partial E'_k} - \frac{\partial D''_l}{\partial E''_k}, \\ \frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial E'_k} - \frac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial E''_k} &= -\left( \frac{\partial D'_k}{\partial \varepsilon'_{ij}} - \frac{\partial D''_k}{\partial \varepsilon''_{ij}} \right),\end{aligned}\quad (22)$$

при цьому

$$\begin{aligned}H &= \int_0^1 \bar{H}(\lambda \varepsilon'_{ij}, \lambda \varepsilon''_{ij}, \lambda E'_k, \lambda E''_k) \frac{d\lambda}{\lambda}, \\ D &= \int_0^1 \bar{D}(\lambda \varepsilon'_{ij}, \lambda \varepsilon''_{ij}, \lambda E'_k, \lambda E''_k) \frac{d\lambda}{\lambda}.\end{aligned}$$

У загальному випадку розв'язок системи рівнянь (20) містить складові, аналогічні функціям  $g'_{ij}$ ,  $g''_{ij}$ ,  $g'_k$ ,  $g''_k$  в рівняннях (15). Однак вони також не дають ніякого внеску в дисипативну  $\bar{D}$  і консервативну  $\bar{H}$  характеристики. Сказати що-небудь більше про ці функції, як і про функції  $g'_{ij}$ ,  $g''_{ij}$ ,  $g'_k$ ,  $g''_k$  з (15), не можна.

Якщо амплітудні рівняння отримані в результаті усереднення за Гальоркінім (перша інтерпретація амплітудних рівнянь [5]) яких-небудь загальних визначальних рівнянь, умова інваріантності амплітуд

відносно зсуву в часі виконується автоматично. При цьому виникає питання про виконання умов симетрії типу (18) і (22). Якщо в якості загальних виступають кратноінтегральні співвідношення електров'язкопружності, для ядер яких постулюється «принцип взаємності», рівності (18) або (22) виконуються [3]. Більше того, мають місце сильніші рівності, наприклад

$$\frac{\partial \sigma'_{ij}}{\partial \varepsilon'_{kl}} = \frac{\partial \sigma'_{kl}}{\partial \varepsilon'_{ij}}, \quad \frac{\partial \sigma''_{ij}}{\partial \varepsilon''_{kl}} = \frac{\partial \sigma''_{kl}}{\partial \varepsilon''_{ij}},$$

які є достатніми, але не необхідними для рівностей (18). Отже умови симетрії (18) допускають ширший клас амплітудних залежностей, що виражаються через потенціали, ніж припущення про виконання «принципу взаємності» для ядер загальної кратноінтегральної теорії електров'язкопружності.

У загальному випадку питання про симетрію типу (18) або (22), як і питання про виконання «принципу взаємності», залишається відкритим. Незважаючи на це, будь-які амплітудні рівняння, отримані в результаті усереднення по Гальборкіну загальних рівнянь, допускають виділення потенціальної частини. Решта членів цих рівнянь типу функцій  $g'_{ij}$ ,  $g''_{ij}$ ,  $g'_k$ ,  $g''_k$  в (15) не будуть впливати на дисипацію та накопичення і тому, як це робиться в подібних випадках в класичній континуальній механіці, можуть бути відкинуті.

У лінійному випадку рівняння (17) і (21) є точними.

Наведені результати отримано незалежно від типу матеріальної симетрії середовища. При їх використанні для середовищ з конкретною симетрією можна виходити з тих чи інших зображень скалярних функцій тензорних аргументів в рівняннях (17) і (21). Це дозволяє конкретизувати амплітудні рівняння безпосередньо за результатами експериментів на гармонічне навантаження.

Якщо покласти

$$\tilde{U} = U + iD,$$

то рівняння (17) можна записати в комплексному вигляді

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varepsilon'_{ij}} + i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial \varepsilon''_{ij}}, \quad \tilde{E}_k = \frac{\partial \tilde{U}}{\partial D'_k} + i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial D''_k}.$$

Аналогічне співвідношення можна отримати для рівнянь (21).

### Література

1. Карнаухов В.Г. Электротермовязкоупругость: Механика связанных полей в элементах конструкций / В.Г.Карнаухов, И.Ф.Киричок. – Киев: Наук. думка, 1988. – Т.4. – 320 с.
2. Митропольский Ю.А. Нелинейная механика. Одночастотные колебания / Ю.А.Митропольский. – К.: Ин-т математики НАН Украины, 1997. – 344 с.

3. Михайленко В.В. О потенциальности определяющих уравнений для неупругих пьезоэлектрических материалов при моногармонических воздействиях / В.В.Михайленко // Прикл. механика. – 1997. – **33**, №6. – С. 49-51.
4. Karnaukhov V.G. Nonlinear single-frequency vibrations and dissipative heating of inelastic piezoelectric bodies / V.G.Karnaukhov, V.V.Mikhailenko // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 5. – P. 521-547.
5. Senchenkov I.K. Thermomechanical behaviour of nonlinear viscoelastic materials under harmonic loading / I.K.Senchenkov, V.G.Karnaukhov // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 11. – P. 1400-1432.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 3.12.2013 р.  
Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.**,  
д.ф.-м.н., професором **Кушніром Р.М.** (м. Київ)*

## POTENTIAL EQUATIONS OF ONE-FREQUENCY APPROACH TO STATIONARY OSCILLATIONS OF INELASTIC PIEZOELECTRIC SOLIDS

**V.V. Mikhailenko<sup>1</sup>, O.V. Lushchikov<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Zhytomyr State University named by I. Franco; Zhytomyr

<sup>2</sup>Zhytomyr State Technological University; Zhytomyr

*This paper proposes a proof of possibility to express constitutive equations of physically nonlinear piezoelectric solids under monoharmonic loading in potentials in case of one-frequency oscillations.*

**Key words:** *piezoelectric solids, monoharmonic approach, amplitude equations.*