

УДК 539.3

СКРУТ ПРИЗМАТИЧНОГО СТРИЖНЯ З ПОЗДОВЖНИМИ ТРІЩИНАМИ**Я. В. Чумаченко**

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: [e-mail: fiveua@ya.ru](mailto:fiveua@ya.ru)

В роботі отримано розв'язок задачі про скрут прямокутного призматичного стрижня, який має довільно орієнтовані поздовжні тріщини. Функція напруження знаходиться у вигляді суми деяких гармонічних функцій і частинного розв'язку рівняння Пуассона. Кожна функція-доданок пов'язана з окремою ланкою граничного контуру і подається у вигляді косинус-розвинень, які записані у відповідній локальній системі еліптичних координат. Для різних частинних конфігурацій наведено розраховані значення жорсткості стрижня, а також дотичних напружень в точках граничного контуру.

Ключові слова: призматичний стрижень, поздовжні тріщини, еліптична система координат, жорсткість стрижня.

Поперечний переріз стрижня показаний на рис. 1, а. Передбачається наявність декількох поздовжніх тріщин, розташованих та орієнтованих довільно, що дозволяє моделювати реальні конфігурації, які можуть зустрітися в застосуваннях. Відзначимо, що довільність геометрії перерізу і наявність гострих вхідних кутів ускладнює дослідження такого об'єкту як за допомогою аналітичних [1], так і традиційних чисельних методів [2, 3]. У даній роботі ефективний розв'язок задачі скруту отримано на основі підходу [4], який враховує специфіку кусково-лінійних границь.

Як відомо [5], функція напруження при скруті $U(x, y)$ задовольняє рівнянню Пуассона

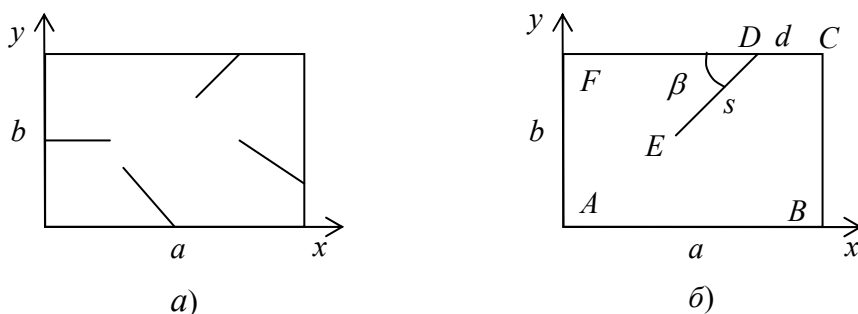


Рис. 1. Поперечні перерізи стрижня

$$\nabla^2 U = -2 \quad (1)$$

і граничній умові

$$U|_L = 0, \quad (2)$$

де L – контур поперечного перерізу, включаючи тріщини. Розв’язок рівняння (1) будемо шукати у вигляді

$$U = u - (x^2 + y^2)/2. \quad (3)$$

Тут u – деяка гармонічна функція (спряжена функція скруту), яка підлягає визначенню.

Кожній ланці контуру L поставимо у відповідність систему локальних прямокутних координат (x_i, y_i) , де i – номер ланки. Початок відліку системи розташуємо в центрі ланки і направимо вісь y_i в область визначення функції u . Орієнтацію системи координат оберемо так, щоб $\hat{x}_i \times \hat{y}_i = \hat{z}$, де $\hat{x}_i, \hat{y}_i, \hat{z}$ – відповідні орти. За допомогою співвідношень

$$x_i = f_i ch \xi_i \cos \eta_i, \quad y_i = f_i sh \xi_i \sin \eta_i \quad (4)$$

(f_i – половина довжини ланки) введемо також локальні еліптичні координати (ξ_i, η_i) і будемо розглядати в подальшому кожен ланку контуру як вироджений еліпс $\xi_i = 0$. Тоді [4]

$$u = \sum_{i=1}^N u_i + \tilde{C}, \quad (5)$$

$$u_i = D_0^i \xi_i + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^i e^{-n\xi_i} \cos n\eta_i \quad (6)$$

де N – кількість ланок контуру. Стала \tilde{C} і коефіцієнти розкладу D_n^i підлягають визначенню, при цьому

$$\sum_{i=1}^N D_0^i = 0 \quad (7)$$

Відзначимо, що всюди поза межами контуру $\xi_i > 0$, $i = \overline{1, N}$. Можна також показати, що коли функція U описує розв’язок розглянутої крайової задачі, то $D_n^i = O(1/n^{2+\alpha})$, $\alpha > 0$. Це означає, що формули (3), (5), (6) ефективно представляють функцію напруження як всередині області визначення, так і на її границі.

Опустимо точку спостереження на i -ту ланку. Тоді, згідно (2), (3), (5) і (6),

$$\sum_{n=1}^{\infty} D_n^i \cos n\eta_i + \sum_{j \neq i} \left[D_0^j \xi_j + \sum_{n=1}^{\infty} D_n^j e^{-n\xi_j} \cos n\eta_j \right]_{\xi_j=0} + \tilde{C} = \left[\frac{x^2 + y^2}{2} \right]_{\xi_j=0}. \quad (8)$$

Проектуючи отриману рівність на ортогональний функціональний базис $\{1, \cos n\eta_i\}_{n=1}^{\infty}$, $\eta_i \in (0, \pi)$, після нескладних перетворень отримаємо

$$\sum_{j \neq i} \sum_{n=0}^{\infty} a_{on}^{ij} D_n^j + 2\tilde{C} = C_0^i, \quad (9)$$

$$D_m^i + \sum_{j \neq i} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}^{ij} D_n^j = C_m^i, \quad m = \overline{1, \infty}, \quad i = \overline{1, N} \quad (10)$$

Тут

$$a_{m0}^{ij} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \xi_j \Big|_{\xi_i=0} \cos m\eta_i d\eta_i \quad (11)$$

$$a_{mn}^{ij} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [e^{-n\xi_j} \cos n\eta_j]_{\xi_i=0} \cos m\eta_i d\eta_i \quad (12)$$

$$C_m^i = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [x^2 + y^2]_{\xi_i=0} \cos m\eta_i d\eta_i \quad (13)$$

Рівності (9) і (10) утворюють нескінчену систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих \tilde{C} та D_n^i , яка замикається рівністю (7). Розв'язок системи знаходимо методом усікання.

Визначивши коефіцієнти розкладу, ми зможемо розрахувати технічні характеристики стрижня. Нижче в ролі таких вибрано безрозмірні

величини $k_1 = \frac{C}{Gab^3} = \frac{2}{ab^3} \iint_{\Omega} Ud\Omega$ і $\tau = \frac{|\tau_{iz}|}{G\theta b} c = \frac{1}{b} \left| \frac{\partial U}{\partial n} \right|$, де C – жорсткість стрижня при скруті, G – модуль зсуву матеріалу стрижня, θ – кут скруту на одиницю довжини волокон стрижня, τ_{iz} – дотичне напруження в точках граничного контуру, Ω – поперечний переріз стрижня і n – нормаль до контуру. Розроблений обчислювальний алгоритм було протестовано для різних конфігурацій поперечного перерізу. В кожному конкретному випадку спостерігалась збіжність чисельного розв'язку до деякого значення, яке не залежить від способу усікання застосованих рядів. В табл. 1 приведено дані, які характеризують швидкість збіжності обчислювального процесу. Розглядається геометрія, вказана на рис.1, б, при $b/a=1$, $d/a=0,5$ і $\beta=45^\circ$. Параметр M є верхньою границею індексу суми n у формулі (6) після усікання. В даному випадку він береться однаковим для всіх ланок. Величина τ_1 співпадає зі значенням τ в точці $x = a/2$, $y = 0$. З таблиці виходить, що для забезпечення достатньої для практики точності в розкладі (6) достатньо взяти лише декілька перших доданків. Також видно, що наявність трі-

щини не позначається на швидкості збіжності. Аналогічна ситуація спостерігається і для інших співвідносин a/b .

Таблиця 1. Результати розрахунків

| M | k_1 | | τ_1 | |
|-----------|---------|-------------|----------|-------------|
| | $s = 0$ | $s/b = 0,5$ | $s = 0$ | $s/b = 0,5$ |
| 1 | 0,2393 | 0,1508 | 0,487 | 0,473 |
| 2 | 0,2332 | 0,1505 | 0,434 | 0,402 |
| 3 | 0,1443 | 0,1108 | 0,673 | 0,645 |
| 4 | 0,1405 | 0,1101 | 0,663 | 0,630 |
| 5 | 0,1406 | 0,1099 | 0,677 | 0,643 |
| 10 | 0,1406 | 0,1099 | 0,676 | 0,641 |
| 20 | 0,1406 | 0,1099 | 0,675 | 0,641 |
| Точно [5] | 0,1406 | – | 0,675 | – |

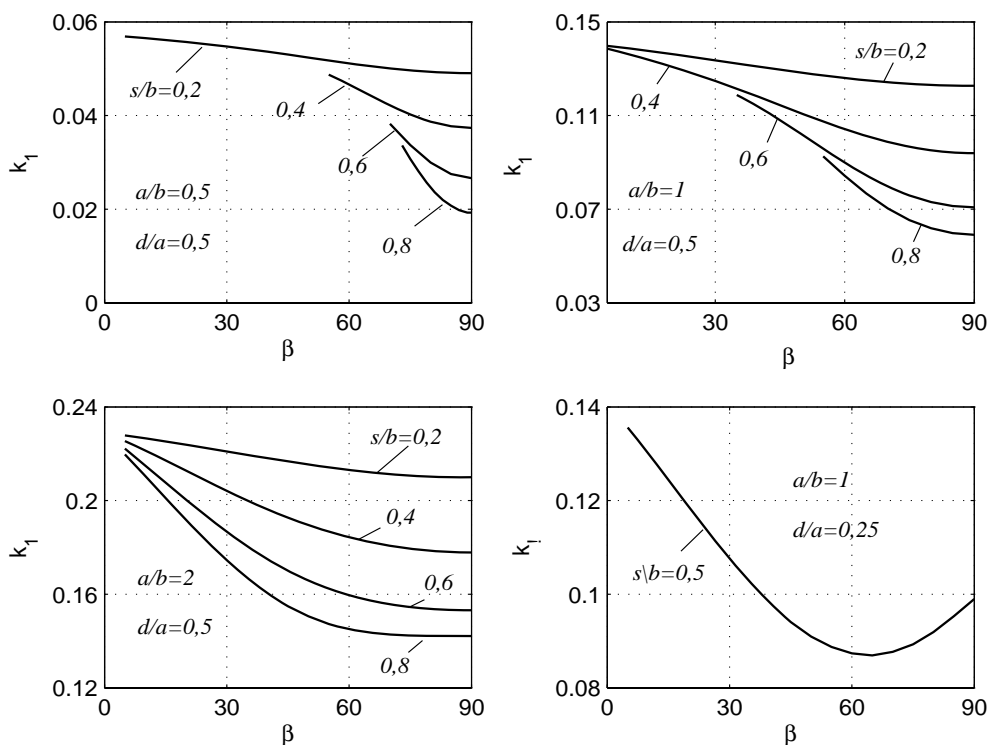


Рис. 2. Розрахові залежності параметра k_1

В табл. 2 включено результати розрахунку значень k_1 у випадку тріщини, орієнтованої перпендикулярно стороні прямокутника ($a/b = 1, d/a = 0,5$). Для порівняння наведено дані, які є середньо арифметичним двох наближень, отриманих в [5]. Хоча й спостерігається деяка відмінність, результати близькі, що підтверджує достовірність проведених розрахунків.

Таблиця 2. Результати розрахунку значень k_1

| s/b | 0,75 | 0,5 | 0,25 | 0 |
|----------------------|--------|--------|--------|--------|
| Запропонований метод | 0,0608 | 0,0811 | 0,1155 | 0,1406 |
| [5] | 0,0615 | 0,0800 | 0,1175 | 0,1406 |

На рис. 2 наведені розраховані залежності параметра k_1 від довжини тріщини s і кута її нахилу β коли $a/b = 0,5$; 1 і 2. Видно, що для розташованої по центру тріщини жорсткість завжди мінімальна при $\beta = 90^\circ$. У випадку тріщини, посунутої в бік кутової точки ($d/a = 0,25$), жорсткість досягає мінімуму при $\beta < 90^\circ$.

На рис. 3 наведено отриманий розподіл дотичних напружень у поперечному перерізі стрижня з похилою тріщиною

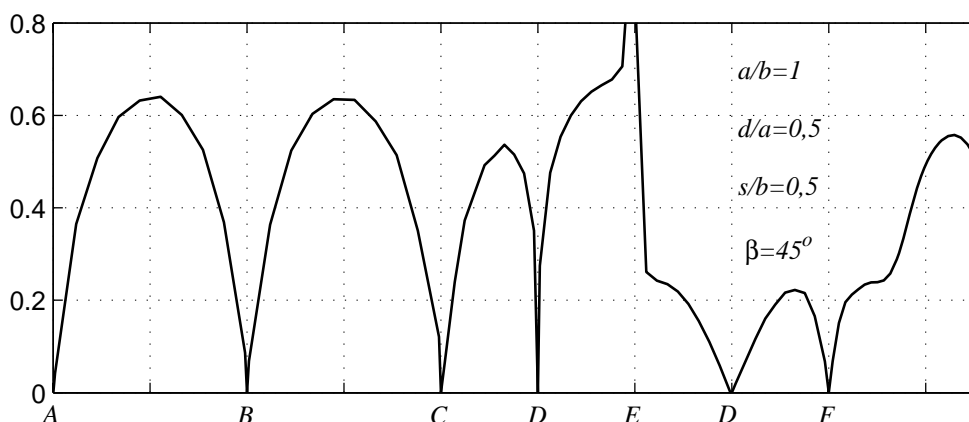


Рис. 3. Розподіл дотичних напружень у поперечному перерізі стрижня з похилою тріщиною

Разроблений алгоритм застосовувався також для розрахунку характеристик більш складних конфігурацій. Зокрема встановлено, що у випадку поперечного перерізу, вказаного на рис. 1,а, $k_1 = 0,1166$. Тут $a/b = 5/3$ і усі чотири тріщини мають однакову довжину $s = b/3$. Три з них нахилені під кутом 45° . Верхня тріщина посунута від правої вершини чотирикутника на величину $0,34a$, а права тріщина знаходиться від нижньої вершини на $b/3$.

Література

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И.Мусхелишвили. – М.: Наука, 1966.
2. Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем / А.А.Самарский. – М.: Наука, 1971. – 552 с.

3. Бребия К. Применение метода граничных элементов в технике / К.Бребия, С.Уокер. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
4. Чумаченко Я.В. Возможное решение уравнения Пуассона в многоугольных областях / Я.В.Чумаченко // Вісник Дніпропетровського університету. Фізика. Радіоелектроніка. – 1998. – №4. – С. 88-92.
5. Арутюнян Н.Х. Кручение упругих тел / Н.Х.Арутюнян, Б.Л.Абрамян. – М.: Физматгиз, 1963. – 688 с.

Стаття постуила в редакційну колегію 10.12.2012 р.

*Рекомендовано до друку д. т. н., професором **Мойсишиним В.М.**,
д.ф.-м.н., професором **Михайленком В.В** (м. Житомир)*

TORSION OF PRISMATIC CORE WITH LONGITUDINAL CRACS

Ya. Chumachenko

*Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: fiveua@ya.ru*

The paper presents a solution of the torsion problem for a rectangular prismatic bar with arbitrarily oriented longitudinal cracks. The stress function is found in the form of a sum of harmonic functions and a particular solution of the Poisson equation. Each component of the sum is associated with an individual segment of the boundary and is represented by a cosine development written in the respective local elliptic coordinates.

The calculated values of the torsional rigidity and the tangential stress are given for several particular configurations.

Key words: *prismatic core, longitudinal cracs, elliptic coordinate system, the rigidity of the rod.*