УДК 539.3

РОЗПОДІЛ НАПРУЖЕНЬ У ПІВПЛОЩИНІ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ ПРИ ДІЇ ПОСТІЙНОЇ ПОПЕРЕЧНОЇ СИЛИ

О. М. Пономаренко[1], І. В. Цідило[2]

[1]Львівський національний аграрний університет; 80381, Львівська обл., Жовківський р-н, м. Дубляни, вул. Володимира Великого, 1; тел. +380 (32) 224-23-35; e-mail: e-mail: lnau@mail.lviv.ua

[2]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; e-mail: tm@nung.edu.ua

В роботі дано аналітичний розв'язок задачі теорії пружності з визначення концентрації напружень у півплощині з круговим отвором при дії постійної поперечної сили. Використано біполярні координати та функцію напружень Ері для загального плоского напруженого стану

Ключові слова: *біполярні координати, напружений стан, концентрація напружень*

Постановка проблеми. В аграрному та транспортному машинобудуванні під час проектування машин широке застосування знаходять пружні деталі у вигляді тонких пластин, які послаблюються різними вирізами. У разі завантаження таких деталей зовнішніми зусиллями поблизу отворів виникає концентрація напружень, яка може несприятливо вплинути на міцність деталі. Напруження по контурах отворів розподіляються досить нерівномірно: є малі ділянки, що зазнають дії високих напружень. Саме ці ділянки є такими, де з'являються крихкі тріщини або пластичні деформації, розвиток яких може призвести до руйнування даної конструкції.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Значну кількість задач по дослідженню концентрації напружень поблизу отворів різної форми розв'язано М.І. Мусхелішвілі [1] та його учнями і послідовниками методом функції комплексної змінної. Дослідження концентрації напружень цим же методом проведено Г.М. Савиним [2] та його учнями.

Широкий спектр досліджень концентрації напружень у біполярних координатах для ізотропних пластин провів Я.С. Уфлянд [3; 4]. Надзвичайно практичні питання розподілу напружень у стрижнях і пластинах із концентраторами напружень у вигляді отворів, виточок розглянуто у роботах Р. Петерсона [5], Р.Р. Мавлютова [6], С.П. Тимошенко і Дж. Гудьєра [7].

Постановка завдання. Метою даного дослідження є розв'язання задачі про концентрацію напружень у тонкій ізотропній півплощині з круговим отвором при дії постійної поперечної сили. Результати цього дослідження мають прикладне значення при проектуванні деталей у вигляді тонких пластин із вирізами у транспортному та аграрному машинобудуванні.

Виклад основного матеріалу. Нехай пружна консольна пластина з круговим отвором радіуса r перебуває під дією постійної сили Q, прикладеному на її вільному кінці. Систему координат виберемо таким чином, щоб вісь OY проходила по прямолінійному краю, а вісь OX – перпендикулярно до нього (рис. 1).

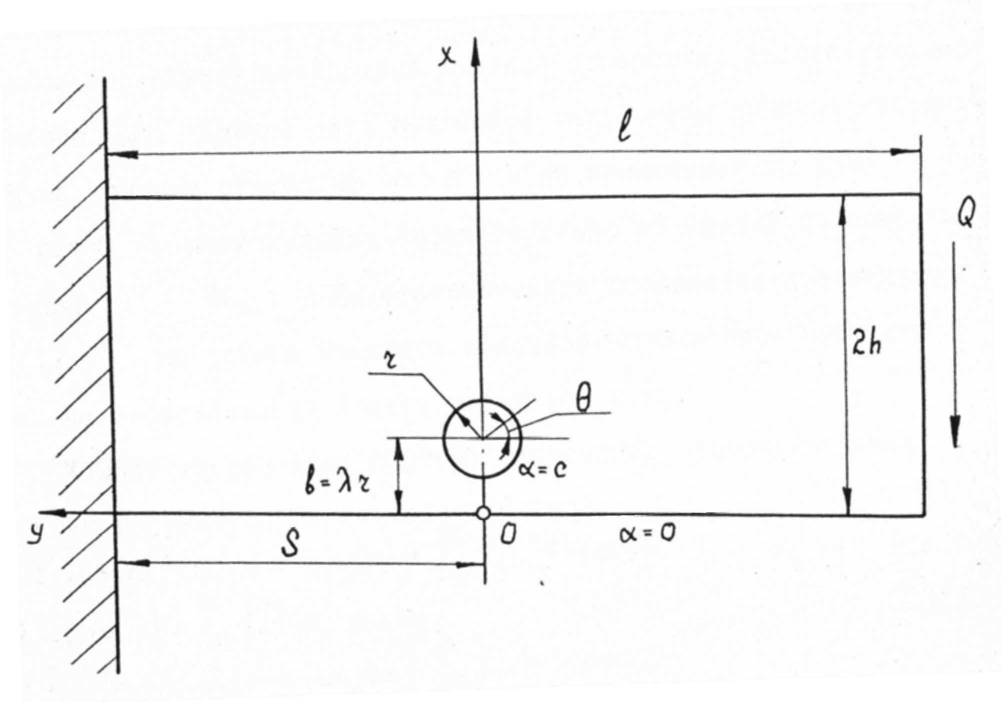

Рис.1. Схема навантаження пластини

Центр отвору міститься на віддалі S від защемленого кінця пластини і на віддалі b від початку системи координат. Приймаючи пластину за півплощину, що перебуває під дією постійної поперечної сили, визначимо в ній напружений стан.

Виходимо з основної функції напружень, яка дає розв'язок задачі про згин півплощини без отвору постійною поперечною силою [2]. До функції напружень, що відповідає цьому напруженому стану, підберемо другу функцію, яка дає якраз такий напружений стан, який створюється при наявності отворів. Оскільки контур отвору вільний від зовнішніх навантажень, то в точках, що лежать на цьому контурі, напруження в пластині без отвору і додаткові напруження повинні взаємно знищуватись.

При розв'язанні використаємо біполярні координати α, β, які зв'язані з прямокутними координатами x, y наступними залежностями:

$$xg = sh\alpha, \quad yg = \sin\beta, \tag{1}$$

де $ga = ch\alpha - \cos\beta$.

Для розв’язання задачі необхідно знайти функцію, що задовольняє граничні умови:

$$\sigma_\alpha\big|_{\alpha=0} = \tau_{\alpha\beta}\big|_{\alpha=0} = 0, \tag{2}$$

$$\sigma_\alpha\big|_{\alpha=c} = \tau_{\alpha\beta}\big|_{\alpha=c} = 0,$$

і забезпечує задану систему напружень на безмежності.

Функція напружень, що дає картину основного напруженого стану, має вигляд:

$$U_0(x, y) = \sum_{i=1}^{4} U_{0,i}, \tag{3}$$

причому

$$U_{0,1} = k_1 x^3,$$

$$U_{0,2} = k_2 x^3 y,$$

$$U_{0,3} = k_3 x^2,$$

$$U_{0,4} = k_4 x^2,$$

а сталі k_i записуються так:

$$k_1 = \frac{Q}{6I}(l - S), \quad k_2 = \frac{Q}{6I}, \quad k_3 = \frac{Qh(l - S)}{2I}, \quad k_4 = -\frac{Qh}{2I}. \tag{4}$$

Повну функцію напружень подамо у вигляді:

$$U(x, y) = \sum_{i=1}^{4} \left(U_{0,i} + k_i U_{1,i}\right), \tag{5}$$

де функції $U_{1,i}$ є невідомими бігармонічними функціями, які відповідають додатковому напруженому стану, що виникає внаслідок наявності отвору. Додаткові функції $U_{1,i}$ повинні бути підібрані так, щоб знімати напруження на контурі отвору $\alpha = c$ і на прямолінійному краю $\alpha = 0$, які виникають відповідно від кожної з основних функцій $U_{0,i}$. На безмежності додаткові функції $U_{1,i}$ не повинні змінювати основний напружений стан, тобто на безмежності повинні дорівнювати нулю.

Виходячи з основних функцій напружень, додаткові функції напружень будемо шукати у вигляді:

$$gU_{1,1}(\alpha, \beta) = G_1(ch\alpha - \cos\beta)\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,1}(\alpha)\cos n\beta, \tag{6}$$

$$gU_{1,2}(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,2}(\alpha)\sin n\beta,$$

$$gU_{1,3}(\alpha, \beta) = G_3(ch\alpha - \cos\beta)\alpha + \sum_{n=1}^{\infty} f_{n,3}(\alpha)\cos n\beta,$$

$$gU_{1,4}(\alpha,\beta)=\sum_{n=1}^{\infty}f_{n,4}(\alpha)\sin n\beta ,$$

де введено позначення:

$$f_{n,i}(\alpha)=A_{n,i}ch(n+1)\alpha+B_{n,i}ch(n-1)\alpha+C_{n,i}ch(n+1)\alpha+D_{n,i}ch(n-1)\alpha . \quad (7)$$

З перших двох граничних умов (2) отримаємо:

$$(n+1)C_{n,i}+(n-1)D_{n,i}=0 ,$$
$$A_{n,i}+B_{n,i}=0 , \quad (i=1,2,3,4) . \quad (8)$$

Звідси маємо:

$$C_{n,i}=-\frac{n-1}{n+1}B_{n,i} , \qquad A_{n,i}=-B_{n,i} . \quad (9)$$

Вводячи позначення:

$$E_{n,i}=-\frac{D_{n,i}}{n+1}, \qquad C_{n,i}=E_{n,i}(n-1), \quad (10)$$

для функцій $f_{n,i}(\alpha)$ отримаємо згідно (7), (10):

$$f_{n,i}(\alpha)=f_{n,i}[ch(n+1)\alpha+ch(n-1)\alpha]+E_{n,i}[(n-1)sh(n+1)\alpha-(n+1)sh(n-1)\alpha].$$

Розкладаючи функцію $U_{0,i}$ в ряди Фур'є і задовільняючи останні дві граничні умови (2), прирівнюючи коефіцієнти при відповідних значеннях синусів і косинусів, після перетворень отримаємо систему, в результаті розв'язування якої маємо:

$$\begin{cases} A_{1,1}=-\dfrac{6cthc}{sh4c}, \qquad A_{1,2}=0, \\ A_{1,3}=\dfrac{e^{-2c}}{2ch2c}, \quad A_{1,4}=-\dfrac{e^{-2c}}{sh2c}, \\ G_1=-\dfrac{6cthc}{sh2c}, \quad G_3=-\dfrac{1}{sh2c}; \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} A_{n,1}\times\Delta=-n(n^2-1)sh^2c, \\ A_{n,2}\times\Delta=-n^2(n^2-1)sh^2c, \\ A_{n,3}\times\Delta=-\dfrac{1}{2}\left(n^2sh^2-nshcchc+ne^{-nc}shnc\right), \\ A_{n,4}\times\Delta=-\left(n^3sh^2-n^2shcchc+ne^{-nc}shnc\right); \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} E_{n,1}\times\Delta=\left(n^2sh^2c+nshcchc+e^{-nc}shnc\right), \\ E_{n,2}\times\Delta=-\dfrac{1}{2}\left(n^3sh^2c+n^2shcchc+ne^{-nc}shnc\right), \\ E_{n,3}\times\Delta=\dfrac{1}{2}nsh^2c, \\ E_{n,4}\times\Delta=n^2sh^2c; \end{cases} \quad (14)$$

де $\Delta=sh^2nc-n^2sh^2c$.

Для напружень на контурі отвору отримаємо:

$$\sigma_\beta\Big|_{\alpha=c} = \sum_{i=1}^{4}\sigma_{\beta,i}\,, \tag{15}$$

де

$$\sigma_{\beta,1} = \frac{Q}{3I}(L-S)2shc(chc-\cos\beta)\left[-\frac{G}{ch2c}(cthc+\cos\beta)+\right.$$
$$\left.+\sum_{n=2}^{\infty}\left(n^2-1\right)\left(4n+\frac{\left(1-e^{-3nc}+4n^2sh^2c\right)n}{sh^2nc-n^2sh^2c}\right)e^{-nc}shc\cos n\beta\right], \tag{16}$$

$$\sigma_{\beta,2} = \frac{Q}{3I}r^2sh^2c(chc-\cos\beta)\sum_{n=2}^{\infty}n^2\left(n^2-1\right)shce^{-nc}\times$$
$$\left\{-2+\frac{e^{-2nc}-4n^2sh^2c-1}{2\left(sh^2nc-n^2sh^2c\right)}\right\}\sin n\beta, \tag{17}$$

$$\sigma_{\beta,3} = \frac{2Q}{I}(L-S)h(chc-\cos\beta)\left\{-\frac{shc}{2ch2c}+thce^{-2c}\cos\beta+\right.$$
$$+2\sum_{n=2}^{\infty}\left[nshc-chc+\frac{1}{4\left(sh^2nc-n^2sh^2c\right)}\left(3nshc+e^{-3nc}-chc+\right.\right. \tag{18}$$
$$\left.\left.+4n^3sh^3c-4n^2sh^2cchc\right)e^{-nc}\cos n\beta\right\},$$

$$\sigma_{\beta,4} = \frac{Q}{I}rhshc(chc-\cos\beta)\left\{-2thce^{-2c}\sin\beta+4e^{-2c}\sin\beta+\right.$$
$$+\sum_{n=2}^{\infty}n^2e^{-nc}\left[4nshc-4chc+\frac{1}{sh^2nc-n^2sh^2c}\left(3nshc+e^{-3nc}-chc+\right.\right. \tag{19}$$
$$\left.\left.+4n^3sh^3c-4n^2sh^2cchc\right)\sin n\beta\right\}.$$

Для напружень, що виникають на прямолінійному краю, будемо мати:

$$\sigma_\beta\Big|_{\alpha=0} = \sum_{i=0}^{4}\sigma_{\beta,i}\,, \tag{20}$$

$$\sigma_{\beta,1} = \frac{2}{3}\frac{Q(L-S)}{I}rshc(1-\cos\beta)+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^2\left(n^2-1\right)sh^2c}{sh^2nc-n^2sh^2c}\cos n\beta, \tag{21}$$

$$\sigma_{\beta,2} = \frac{2Q}{3I}r^2sh^2c(1-\cos\beta)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3\left(n^2-1\right)sh^2c}{sh^2nc-n^2sh^2c}\sin n\beta, \tag{22}$$

$$\sigma_{\beta,3}=\frac{2Q(L-S)h}{I}\left\{1-(1-\cos\beta)\sum_{n=2}^{\infty}\left(n^3sh^2c-n^2shc\,chc+nshnce^{-nc}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\cos n\beta}{sh^2nc-n^2sh^2c}\right\},\qquad(23)$$

$$\sigma_{\beta,4}=\frac{2Qhrshc}{I}\left\{1-(1-\cos\beta)\sum_{n=2}^{\infty}2n^2\left(n^2sh^2c-nshc\,chc+shnce^{-nc}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\frac{\sin n\beta}{sh^2nc-n^2sh^2c}\right\}.\qquad(24)$$

Напруження на контурі отвору подано в табл. 1 в припущенні, що висота $2h=8r$, довжина $L=10h$, тобто довжина в п'ять разів перевищує її висоту, $S=\frac{1}{4}$, тобто центр отвору міститься на віддалі однієї четвертої довжини пластини від защемленого краю $b=\lambda r=1{,}5r$; величина $k=\frac{Qh^2}{I}$.

Таблиця 1. Напруження на контурі отвору

$\theta°$	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°	105°	120°	135°	150°	165°	180°
$\sigma_\beta\big\|_k$	-0,01	-0,52	0,92	1,94	3,25	4,05	3,76	2,11	0,01	-1,94	-2,70	1,86	4,80

Висновки. Розрахунки показують, що максимальне значення напруження на контурі отвору набагато перевищує максимальне значення напруження на прямолінійному краю. У випадку параметрів, використаних при складанні таблиці 1, напруження на прямолінійному краю в точці 0 має значення $[\sigma_\beta]_0=\frac{2{,}21Qh^2}{I}$.

Література

1. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И.Мусхелишвили. – М.: Наука, 1996. – 707 с.
2. Савин Г.Н. Распределение напряжений около отверстий / Г.Н.Савин. – К.: Наук. думка, 1968. – 887 с.
3. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости / Я.С.Уфлянд. – Л.: Наука, 1968. – 402 с.
4. Уфлянд Я.С. Биполярные координаты в теории упругости / Я.С.Уфлянд. – М.; Л.: Гостехиздат, 1950. – 232 с.
5. Петерсон Р. Коэффициенты концентрации напряжений. Графики и формулы для расчета конструктивных елементов на прочность / Р.Петерсон [пер. з англ.]. – М.: Мир, 1977. – 302 с.

6. Мавлютов Р.Р. Концентрация напряжений в елементах авиационных конструкций / Р.Р.Мавлютов. – М.: Наука, 1981. – 140 с.
7. Тимошенко С.П. Теория упругости / С.П.Тимошенко, Дж.Гудьер. – М.: Наука, 1989. – 560 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 26.09.2013 р.
*Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Векериком В.І.**, д.ф.-м.н., професором **Сулимом Г.Т.** (м. Львів)*

DISTRIBUTION OF STRESSES IN AN SEMI-INFINITE PLATE WITH CIRCULAR HOLE UNDER ACT CONSTANT DIAMETRICAL FORCE

O. Ponomarenko[1], I. Tsidylo[2]
[1]Lviv national agrarian university; 80381, Lviv region, Zovkva district, t. Dybljany, V. Velykogo str., 1; ph../fax +380 (32) 224-23-35; e-mail: lnau@mail.lviv.ua
[2]Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas; 76019, Ivano-Frankivs'k, Carpats'ka str., 15; e-mail: tm@nung.edu.ua

The problem of stresses concentration in an semi-infinite plate with circular hole under act constant diametrical force is considered. The analysis is developed on the basis of the Airy's stresses functions in generalized plane stresses and by applying bipolar coordinates.

***Key words:** bipolar coordinates, strain state, concentration of stresses.*