Механіка

УДК 539.376

СТРУКТУРА АМПЛІТУДНИХ РІВНЯНЬ НЕПРУЖНИХ П'ЄЗОЕЛЕКТРИЧНИХ ТІЛ ПРИ ГАРМОНІЧНИХ ПРОЦЕСАХ

В. Г. Карнаухов[1], В. В. Михайленко[2], О. В. Лущиков[3]
[1]Інститут механіки ім. С. Тимошенка НАН України; м. Київ
[2]Житомирський державний університет ім. І. Франка; м. Житомир
[3]Житомирський державний технологічний університет; м Житомир

Досліджується структура амплітудних визначальних рівнянь непружних п'єзоелектричних тіл при гармонічному навантаженні з використанням гіпотези одночастотності електромеханічних коливань та умови інваріантності амплітуд відносно перетворення зсуву в часі.

Ключові слова: *амплітудні визначальні рівняння, гармонічне навантаження, п'єзоелектричні тіла.*

Однією з найбільш продуктивних гіпотез в теорії нелінійних коливань є гіпотеза одночастотності [3]. У випадку стаціонарних коливань непружних п'єзоелектричних тіл [1] ця гіпотеза означає наступне: припускається, що в результаті гармонічного електромеханічного навантаження з круговою частотою ω в об'ємі п'єзоелектричного тіла встановлюється напружено-деформований і електричний стан вигляду

$$\begin{aligned} &\sigma_{ij} = \sigma'_{ij}\cos\omega t - \sigma''_{ij}\sin\omega t, \quad \varepsilon_{ij} = \varepsilon'_{ij}\cos\omega t - \varepsilon''_{ij}\sin\omega t, \\ &E_j = E'_j\cos\omega t - E''_j\sin\omega t, \quad D_j = D'_j\cos\omega t - D''_j\sin\omega t. \end{aligned} \tag{1}$$

Деякі висновки про точність розрахунків нелінійних стаціонарних коливань непружних тіл, виконаних з припущенням одночастотності, можна знайти, наприклад, в оглядовій статті [5]. Особливо точно одночастотний режим витримується при резонансних коливаннях непружних тіл.

Приймемо за незалежні змінні складові деформації ε'_{ij}, ε''_{ij} і складові вектора індукції електричного поля D'_j, D''_j. Тоді складові механічного напруження σ'_{ij}, σ''_{ij} і складові вектора напруженості електричного поля E'_j, E''_j розглядаються як тензорні і векторні функції незалежних змінних

$$\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k\right), \sigma''_{ij} = \sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k\right),$$
$$E'_j = E'_j\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k\right), E''_j = E''_j\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k\right). \quad (2)$$

При такому підході нелінійна поведінка п’єзоелектричного тіла враховується нелінійністю залежностей (2). Ці залежності повинні задовольняти умові інваріантності відносно зсуву в часі, тобто відносно заміни в (1) ωt на $\omega t + \varphi$. Цю умову можна записати в символьному матричному вигляді

$$\boldsymbol{QS}\left(\boldsymbol{\Lambda}\right) = \boldsymbol{S}\left(\boldsymbol{Q\Lambda}\right) \quad (3)$$

де $\boldsymbol{S} = \left(\sigma'_{ij}, \sigma''_{ij}, E'_k, E''_k\right)^T$, $\boldsymbol{\Lambda} = \left(\varepsilon'_{ij}, \varepsilon''_{ij}, D'_k, D''_k\right)^T$,

$$\boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}.$$

Далі вважаємо функції (2) диференційовними по ε'_{ij}, ε''_{ij}, D'_j, D''_j. Тоді шляхом виключення параметра φ рівності (3) можна записати в диференціальній формі

$$\frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial D'_k}D''_k - \frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial D''_k}D'_k + i\tilde{\sigma}_{ij} = 0,$$
$$\frac{\partial\tilde{E}_i}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial\tilde{E}_i}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial\tilde{E}_i}{\partial D'_k}D''_k - \frac{\partial\tilde{E}_i}{\partial D''_k}D'_k + i\tilde{E}_i = 0, \quad (4)$$

де введені позначення

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \sigma'_{ij} + i\sigma''_{ij}, \ \tilde{E}_k = E'_k + iE''_k, \ i = \sqrt{-1}. \quad (5)$$

Розглянемо диференціальне рівняння першого порядку

$$\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial D'_k}D''_k - \frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial D''_k}D'_k = 0, \quad (6)$$

де $\tilde{\Phi} = \Phi_1 + i\Phi_2$ - комплекснозначна функція 18 дійсних змінних $\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, D'_k, D''_k$. Записавши відповідну характеристичну систему або безпосередньою підстановкою в рівняння (6), легко переконатись, що будь-яка з величин

$$\Gamma_{ijkl} = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{kl} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{kl}, \ \Gamma_{ijk} = \varepsilon'_{ij}D'_k + \varepsilon''_{ij}D''_k,$$
$$\Gamma_{kl} = D'_k D'_l + D''_k D''_l, \quad (7)$$

$$\hat{\Gamma}_{ijkl} = \varepsilon'_{ij}\varepsilon''_{kl} - \varepsilon''_{ij}\varepsilon'_{kl}, \ \hat{\Gamma}_{ijk} = \varepsilon'_{ij}D''_k - \varepsilon''_{ij}D'_k,$$
$$\hat{\Gamma}_{kl} = D'_k D''_l - D''_k D'_l \quad (8)$$

є частинним інтегралом рівняння (6).

Величини (7) і (8) можна записати в термінах повних амплітуд і зсувів фаз

$$\Gamma_{ijkl}=\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}\,\overset{\circ}{\varepsilon}_{kl}\cos\left(\varphi^{\varepsilon}_{kl}-\varphi^{\varepsilon}_{ij}\right),\ \Gamma_{ijk}=\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}\,\overset{\circ}{D}_{k}\cos\left(\varphi^{D}_{k}-\varphi^{\varepsilon}_{ij}\right),$$
$$\Gamma_{kl}=\overset{\circ}{D}_{k}\,\overset{\circ}{D}_{l}\cos\left(\varphi^{D}_{l}-\varphi^{D}_{k}\right),\ \hat{\Gamma}_{ijkl}=\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}\,\overset{\circ}{\varepsilon}_{kl}\sin\left(\varphi^{\varepsilon}_{kl}-\varphi^{\varepsilon}_{ij}\right),\tag{9}$$
$$\hat{\Gamma}_{ijk}=\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}\,\overset{\circ}{D}_{k}\sin\left(\varphi^{D}_{k}-\varphi^{\varepsilon}_{ij}\right),\ \hat{\Gamma}_{kl}=\overset{\circ}{D}_{k}\,\overset{\circ}{D}_{l}\sin\left(\varphi^{D}_{l}-\varphi^{D}_{k}\right),$$

де

$$\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}=\sqrt{\varepsilon'^2_{ij}+\varepsilon''^2_{ij}},\ \overset{\circ}{D}_{k}=\sqrt{D'^2_{k}+D''^2_{k}},\tag{10}$$
$$\mathrm{tg}\,\varphi^{\varepsilon}_{ij}=\varepsilon''_{ij}/\varepsilon'_{ij},\ \mathrm{tg}\,\varphi^{D}_{k}=D''_{k}/D'_{k}$$

і внаслідок цього виразити через 9 амплітуд $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$, $\overset{\circ}{D}_{k}$ і 8 зсувів фаз, наприклад, $\varphi^{\varepsilon}_{ij}-\varphi^{\varepsilon}_{11}$, $\varphi^{D}_{k}-\varphi^{\varepsilon}_{11}$ (всього 17 незалежних змінних). Довільна функція цих 17 змінних є загальним розв'язком рівняння (6). Разом з тим, цей загальний розв'язок далі зручніше зображати у вигляді довільної функції

$$\tilde{\Phi}=\tilde{\Phi}\left(\Gamma_{ijkl},\Gamma_{ijk},\Gamma_{kl},\hat{\Gamma}_{ijkl},\hat{\Gamma}_{ijk},\hat{\Gamma}_{kl}\right).\tag{11}$$

Очевидно, що аргументи в (11) не є незалежними. Наприклад, легко переконатись в справедливості рівностей

$$\hat{\Gamma}_{ijkl}\hat{\Gamma}_{pqrs}=\Gamma_{ijpq}\Gamma_{klrs}-\Gamma_{ijrs}\Gamma_{klpq},$$
$$\hat{\Gamma}_{ijk}\hat{\Gamma}_{pqr}=\Gamma_{ijpq}\Gamma_{kr}-\Gamma_{ijr}\Gamma_{pqk},\tag{12}$$
$$\hat{\Gamma}_{kl}\hat{\Gamma}_{pq}=\Gamma_{kp}\Gamma_{lq}-\Gamma_{kq}\Gamma_{lp}.$$

Розглянемо співвідношення

$$\tilde{\sigma}_{ij}=\tilde{C}^{D}_{ijkl}(;)\tilde{\varepsilon}_{kl}+\tilde{h}_{kij}(;)\tilde{D}_{k},$$
$$\tilde{E}_{k}=\tilde{h}^{*}_{kij}(;)\tilde{\varepsilon}_{ij}+\tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}(;)\tilde{D}_{l},\tag{13}$$

де крім (5) використані позначення

$$\tilde{\varepsilon}_{kl}=\varepsilon'_{kl}+i\varepsilon''_{kl},\ \tilde{D}_{k}=D'_{k}+iD''_{k},$$
$$\tilde{p}=\left\{\tilde{C}^{D}_{ijkl}(;),\ \tilde{h}_{kij}(;),\ \tilde{h}^{*}_{kij}(;),\tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}(;)\right\}=p'+ip'',$$

а комплексні коефіцієнти $\tilde{C}^{D}_{ijkl}(;)$, $\tilde{h}_{kij}(;)$, $\tilde{h}^{*}_{kij}(;)$, $\tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}(;)$ є функціями компонент тензорів (7) і (8). Якщо припустити диференційовність цих функцій і підставити співвідношення (13) в рівняння (4), то легко переконатись, що ці рівняння задовольняються тотожньо. Для цього потрібно врахувати сказане про рівняння (6) і зображення його загального розв'язку у вигляді (11). Більше того, можна показати, що внаслідок довільності коефіцієнтів $\tilde{C}^{D}_{ijkl}(;)$, $\tilde{h}_{kij}(;)$, $\tilde{h}^{*}_{kij}(;)$, $\tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}(;)$ функції $\tilde{\sigma}_{ij}$ і $\tilde{E}_{k}$ (13) є загальними розв'язками рівнянь (4).

Отже, якщо деякі диференційовні функції (2) задовольняють умові інваріантності відносно перетворення зсуву в часі (3), то їх можна записати у вигляді (13). З іншого боку, приймаючи до уваги інваріантність величин (7) і (8) відносно перетворення зсуву в часі, тобто відносно заміни

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{kl} &\to \varepsilon'_{kl}\cos\varphi - \varepsilon''_{kl}\sin\varphi, \\ \varepsilon''_{kl} &\to \varepsilon'_{kl}\sin\varphi + \varepsilon''_{kl}\cos\varphi, \\ D'_k &\to D'_k\cos\varphi - D''_k\sin\varphi, \\ D''_k &\to D'_k\sin\varphi + D''_k\cos\varphi \end{aligned} \tag{14}$$

безпосередньою перевіркою переконуємось, що функції (13) задовольняють умові (3).

Таким чином, необхідною і достатньою умовою інваріантності функцій (2) відносно перетворення зсуву в часі є їх зображення у вигляді (13). При цьому, звичайно, припускається диференційованість коефіцієнтів $\tilde{C}^D_{ijkl}(;)$, $\tilde{h}_{kij}(;)$, $\tilde{h}^*_{kij}(;)$, $\tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}(;)$.

Далі виклад матеріалу спирається на наступне зауваження.

Зауваження 1. Виділимо з множини всіх можливих фізично нелінійних матеріалів клас матеріалів, нелінійні властивості яких можна вважати «симетричними» відносно знака діючих факторів. Наприклад, матеріал з кубічною нелінійністю однаково («симетрично») реагує на розтяг – стиск або, на зміну знаку електричної індукції. Якщо ж матеріалу, крім того, властива помітна квадратична нелінійність, то його реакція на подібні навантаження уже «несиметрична». Нижче розглядаються тільки матеріали виділеного класу, які будемо називати матеріалами з «симетричними нелінійними властивостями». У випадку одночастотного наближення коливань нелінійні властивості матеріалу проявляються в залежності коефіцієнтів з (13) від амплітуд і зсувів фаз незалежних змінних, а для матеріалу з «симетричними нелінійними властивостями» – від амплітуд і абсолютних величин зсувів фаз. Це означає, що величини (8) згідно з їх зображенням (9) повинні входити до числа аргументів у вигляді добутків або квадратів. Але тоді з (12) слідує, що коефіцієнти в (13) можна вважати функціями тільки величин (7). Зрозуміло, що співвідношення (13) залишаються справедливими і у випадку одночастотного наближення коливань для матеріалів з «несиметричними нелінійними властивостями». Для цього коефіцієнти цих рівнянь потрібно вважати функціями не лише величин (7), а і величин типу (8), які залежать від знака зсуву фаз. Однак такий опис коливань не буде повним без врахування постійних складових цих коливань, які можуть суттєво впливати на осцилюючі складові (1).

Таким чином, коефіцієнти в рівняннях (13) вважаємо далі функціями компонент тензорів (7): $(;) = \left(\Gamma_{ijkl}, \Gamma_{ijk}, \Gamma_{kl}\right)$.

Розглянемо питання про симетрію цих коефіцієнтів відносно перестановки індексів. Симетрія

$$\tilde{C}^D_{ijkl}(;) = \tilde{C}^D_{jikl}(;) = \tilde{C}^D_{ijlk}(;),$$
$$\tilde{h}_{kij}(;) = \tilde{h}_{kji}(;),\ \tilde{h}^*_{kij}(;) = \tilde{h}^*_{kji}(;)$$

очевидна. Що стосується симетрії

$$\tilde{C}^{D}_{ijkl}(;)=\tilde{C}^{D}_{klij}(;),\,\tilde{\beta}^{\varepsilon}_{kl}(;)=\tilde{\beta}^{\varepsilon}_{lk}(;)$$

чи рівності коефіцієнтів

$$\tilde{h}_{kij}(;)=\tilde{h}^{*}_{kij}(;)$$

то, як слідує з вищесказаного, про них нічого поки що сказати не можна. Для того щоб з'ясувати це питання, звернемося до функції дисипації [4]

$$\bar{D}=\sigma''_{ij}\varepsilon'_{ij}-\sigma'_{ij}\varepsilon''_{ij}+E''_{k}D'_{k}-E'_{k}D''_{k}. \tag{15}$$

Якщо записати вираз для цієї функції з врахуванням рівностей (4), то можна показати, що функція

$$\bar{U}=\sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij}+\sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij}+E'_{k}D'_{k}+E''_{k}D''_{k} \tag{16}$$

як функція незалежних змінних ε'_{kl}, ε''_{kl}, D'_{k}, D''_{k}, задовольняє диференціальному рівнянню (6)

$$\frac{\partial\bar{U}}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl}-\frac{\partial\bar{U}}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl}+\frac{\partial\bar{U}}{\partial D'_{k}}D''_{k}-\frac{\partial\bar{U}}{\partial D''_{k}}D'_{k}=0.$$

Цьому ж рівнянню задовольняє і функція $\bar{D}$. Для цього потрібно записати з врахуванням (4) вираз для $\bar{U}$.

Зауваження 2. Розглядувані перетворення з врахуванням рівностей (4) зручно проводити в комплексній формі, якщо ввести комплекснозначну функцію

$$\tilde{\Phi}=\tilde{\sigma}_{ij}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij}+\tilde{E}_{k}\bar{\tilde{D}}_{k} \tag{17}$$

і врахувати, що

$$\operatorname{Im}\tilde{\Phi}=\bar{D},\ \operatorname{Re}\tilde{\Phi}=\bar{U}.$$

Тоді, врахувавши в (17) рівності (4), приходимо до диференціального рівняння (6).

Функцію (16) $\bar{U}$ будемо називати функцією накопичення [4].

Так як функції дисипації і накопичення задовольняють диференціальному рівнянню (6), то для матеріалів з «симетричними» нелінійними властивостями вони, як і коефіцієнти рівнянь (13), є функціями виду

$$\bar{D}=\bar{D}\left(\Gamma_{ijkl},\Gamma_{ijk},\Gamma_{kl}\right),\ \bar{U}=\bar{U}\left(\Gamma_{ijkl},\Gamma_{ijk},\Gamma_{kl}\right). \tag{18}$$

З іншого боку, відокремлюючи в рівняннях (13) дійсні та уявні частини і використовуючи їх у співвідношеннях (15) і (16), можна записати

$$\bar{D}=\bar{D}_{1}+\bar{D}_{2},\ \bar{U}=\bar{U}_{1}-\bar{U}_{2}, \tag{19}$$

де, з врахуванням позначень (7) і (8),

$$\begin{aligned}
\bar{D}_{1}&=C^{D''}_{ijkl}(;)\Gamma_{ijkl}+\left(h''_{kij}(;)+h^{*''}_{kij}(;)\right)\Gamma_{ijk}+\beta''_{kl}(;)\Gamma_{kl},\\
\bar{D}_{2}&=C^{D'}_{ijkl}(;)\hat{\Gamma}_{ijkl}+\left(h'_{kij}(;)-h^{*'}_{kij}(;)\right)\hat{\Gamma}_{ijk}+\beta'_{kl}(;)\hat{\Gamma}_{kl},\\
\bar{U}_{1}&=C^{D'}_{ijkl}(;)\Gamma_{ijkl}+\left(h'_{kij}(;)+h^{*'}_{kij}(;)\right)\Gamma_{ijk}+\beta'_{kl}(;)\Gamma_{kl},\\
\bar{U}_{2}&=C^{D''}_{ijkl}(;)\hat{\Gamma}_{ijkl}+\left(h''_{kij}(;)-h^{*''}_{kij}(;)\right)\hat{\Gamma}_{ijk}+\beta''_{kl}(;)\hat{\Gamma}_{kl}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Зауваження 3. В результаті перетворення зсуву в часі (14) повні амплітуди деформацій $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$ і індукції електричного поля $\overset{\circ}{D}_k$ (10) не змінюються, а фази $\varphi_{ij}^{\varepsilon}$ і φ_k^D змінюються відповідно на $\varphi_{ij}^{\varepsilon}+\varphi$ і $\varphi_k^D+\varphi$. Розглянемо також перетворення незалежних змінних виду

$$\begin{aligned} \varepsilon'_{kl} &\to \varepsilon'_{kl}\cos\varphi + \varepsilon''_{kl}\sin\varphi, \\ \varepsilon''_{kl} &\to \varepsilon'_{kl}\sin\varphi - \varepsilon''_{kl}\cos\varphi, \\ D'_k &\to D'_k\cos\varphi + D''_k\sin\varphi, \\ D''_k &\to D'_k\sin\varphi - D''_k\cos\varphi. \end{aligned} \tag{21}$$

Зауважимо, що це перетворення не слідує з (14) при жодному φ. Перетворення (21) також не змінює повних амплітуд деформації $\overset{\circ}{\varepsilon}_{ij}$ і індукції електричного поля $\overset{\circ}{D}_k$. Що стосується фаз $\varphi_{ij}^{\varepsilon}$ і φ_k^D, то вони змінюються відповідно на $-\varphi_{ij}^{\varepsilon}+\varphi$ і $-\varphi_k^D+\varphi$. Оскільки величини (7) згідно (9) визначаються косинусами зсувів фаз, то вони в результаті перетворення (21) не змінюються. У цьому можна переконатись і безпосередньо, підставивши (21) в (7). Отже, функції дисипації і накопичення (18), як функції аргументів (7), інваріантні відносно перетворення (21). Те саме стосується і коефіцієнтів $C_{ijkl}^{D'}(;)$, $C_{ijkl}^{D''}(;)$, $h'_{kij}(;)$, $h''_{kij}(;)$, $h_{kij}^{*'}(;)$, $h_{kij}^{*''}(;)$, $\beta'_{kl}(;)$, $\beta''_{kl}(;)$ у співвідношеннях (20). Що стосується величин (8) $\hat{\Gamma}_{ijkl},\hat{\Gamma}_{ijk}$ і $\hat{\Gamma}_{kl}$, які фігурують в (20), то вони в результаті перетворення (21) змінюють знак на протилежний.

Згідно з викладеним, ліві частини рівностей (19) і перші доданки правих частин цих рівностей не змінюються при заміні (21), тоді як другі складові $\bar{D}_2$ і $\bar{U}_2$ правих частин змінюють знак на протилежний. Тому, вимагаючи однозначну визначеність функцій накопичення і диссипації (18) своїми аргументами, потрібно покласти

$$\bar{D}_2 = 0\,,\ \bar{U}_2 = 0 \tag{22}$$

Достатніми умовами виконання рівностей (22) є наступні умови симетрії, які постулюються додатково:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^{D'}(;) = C_{klij}^{D'}(;), h'_{kij}(;) = h_{kij}^{*'}(;), \beta'_{kl}(;) = \beta'_{lk}(;), \\ C_{ijkl}^{D''}(;) = C_{klij}^{D''}(;), h''_{kij}(;) = h_{kij}^{*''}(;), \beta''_{kl}(;) = \beta''_{lk}(;). \end{aligned} \tag{23}$$

Таким чином, ми отримаємо загальну структуру амплітудних визначальних рівнянь у вигляді

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_{ij} &= \tilde{C}_{ijkl}^{D}(;)\tilde{\varepsilon}_{kl} + \tilde{h}_{kij}(;)\tilde{D}_k, \\ \tilde{E}_k &= \tilde{h}_{kij}(;)\tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\beta}_{kl}^{\varepsilon}(;)\tilde{D}_l. \end{aligned} \tag{24}$$

Зауваження 4. У лінійному випадку коефіцієнти в рівняннях (24) сталі, а умови (23) є не лише достатніми, а й необхідними для виконання рівностей (22) і тому у лінійному випадку структура амплітудних рівнянь повністю визначається умовою їх інваріантності відносно перетворення зсуву в часі.

Аналогічні результати отримуються і у випадку інших наборів незалежних змінних. Розглянемо наприклад, довільні залежності

$$\begin{aligned} &\sigma'_{ij} = \sigma'_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, E'_k, E''_k\right), \sigma''_{ij} = \sigma''_{ij}\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, E'_k, E''_k\right), \\ &D'_j = D'_j\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, E'_k, E''_k\right), D''_j = D''_j\left(\varepsilon'_{kl}, \varepsilon''_{kl}, E'_k, E''_k\right) \end{aligned} \qquad (25)$$

і будемо вимагати щоб вони задовольняли умові інваріантності відносно перетворення зсуву в часі, яка отримується з (3) шляхом формальної заміни

$$E'_k \leftrightarrow D'_k\,,\ E''_k \leftrightarrow D''_k\,.$$

Відповідні рівності в диференціальній формі мають вигляд

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial E'_k}E''_k - \frac{\partial\tilde{\sigma}_{ij}}{\partial E''_k}E'_k + i\tilde{\sigma}_{ij} = 0, \\ &\frac{\partial\tilde{D}_j}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial\tilde{D}_j}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial_i\tilde{D}_j}{\partial E'_k}E''_k - \frac{\partial\tilde{D}_j}{\partial E''_k}E'_k + i\tilde{D}_j = 0. \end{aligned} \qquad (26)$$

Записуючи з врахуванням рівнянь (26) вираз для дисипативної функції (15), отримуємо для даного набору незалежних змінних відповідну консервативну характеристику

$$\bar{H} = \sigma'_{ij}\varepsilon'_{ij} + \sigma''_{ij}\varepsilon''_{ij} - D'_k E'_k - D''_k E''_k. \qquad (27)$$

(амплітудний аналог електричної ентальпії).

Дисипативна функція $\bar{D}$ і функція $\bar{H}$, як функції незалежних змінних ε'_{kl}, ε''_{kl}, E'_k, E''_k, задовольняють диференціальному рівнянню

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon'_{kl}}\varepsilon''_{kl} - \frac{\partial\Phi}{\partial\varepsilon''_{kl}}\varepsilon'_{kl} + \frac{\partial\Phi}{\partial E'_k}E''_k - \frac{\partial\Phi}{\partial E''_k}E'_k = 0$$

і для матеріалів з «симетричними» нелінійними властивостями є функціями аргументів

$$\bar{D} = \bar{D}\left(\Gamma_{ijkl}, \Gamma^E_{ijk}, \Gamma^E_{kl}\right),\ \bar{H} = \bar{H}\left(\Gamma_{ijkl}, \Gamma^E_{ijk}, \Gamma^E_{kl}\right),$$

де

$$\begin{aligned} &\Gamma_{ijkl} = \varepsilon'_{ij}\varepsilon'_{kl} + \varepsilon''_{ij}\varepsilon''_{kl}, \Gamma^E_{ijk} = \varepsilon'_{ij}E'_k + \varepsilon''_{ij}E''_k, \\ &\Gamma^E_{kl} = E'_k E'_l + E''_k E''_l \end{aligned} \qquad (28)$$

З а у в а ж е н н я 5. Тут також зручно проводити перетворення з використанням рівностей (26) у комплексній формі, ввівши формально комплекснозначну функцію

$$\tilde{F} = \tilde{\sigma}_{ij}\bar{\tilde{\varepsilon}}_{ij} - \tilde{D}_k\bar{\tilde{E}}_k,\ \operatorname{Im}\tilde{F} = \bar{D},\ \operatorname{Re}\tilde{F} = \bar{H}.$$

Аналогічно до викладеного вище можна показати, що необхідною і достатньою умовою інваріантності функцій (25) відносно перетворення зсуву в часі є їх зображення у вигляді

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}^{E}_{ijkl}(;)\tilde{\varepsilon}_{kl} + \tilde{e}^{*}_{kij}(;)\tilde{E}_k,$$
$$\tilde{D}_k = \tilde{e}_{kij}(;)\tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\mu}^{\varepsilon}_{kl}(;)\tilde{E}_l. \tag{29}$$

Комплексні коефіцієнти $\tilde{C}^{E}_{ijkl}(;)$, $\tilde{e}^{*}_{kij}(;)$, $\tilde{e}_{kij}(;)$, $\tilde{\mu}^{\varepsilon}_{kl}(;)$ для матеріалів з «симетричними» нелінійними властивостями є диференційовними функціями аргументів (28).

Відокремлюючи в (29) дійсні і уявні частини з врахуванням позначень

$$\tilde{p} = \left\{ \tilde{C}^{E}_{ijkl}(;),\ \tilde{e}^{*}_{kij}(;),\ \tilde{e}_{kij}(;),\ \tilde{\mu}^{\varepsilon}_{kl}(;) \right\} = p' + ip''$$

і використовуючи їх у виразі для функції дисипації $\bar{D}$ (15) і функції $\bar{H}$ (27), отримуємо

$$\bar{D} = \bar{D}_1 + \bar{D}_2,\ \bar{H} = \bar{H}_1 - \bar{H}_2,$$

де

$$\bar{D}_1 = C^{E''}_{ijkl}(;)\Gamma_{ijkl} - \left(e''_{kij}(;) - e^{*'}_{kij}(;)\right)\Gamma^{E}_{ijk} - \mu''_{kl}(;)\Gamma^{E}_{kl},$$
$$\bar{D}_2 = C^{E'}_{ijkl}(;)\left[\varepsilon'_{ij}\varepsilon''_{kl} - \varepsilon''_{ij}\varepsilon'_{kl}\right] + \left(e'_{kij}(;) + e^{*'}_{kij}(;)\right)\left[\varepsilon'_{ij}E''_k - \varepsilon''_{ij}E'_k\right] -$$
$$-\mu'_{kl}(;)\left[E'_kE''_l - E''_kE'_e\right],$$
$$\bar{H}_1 = C^{E'}_{ijkl}(;)\Gamma_{ijkl} - \left(e'_{kij}(;) - e^{*'}_{kij}(;)\right)\Gamma^{E}_{ijk} - \mu'_{kl}(;)\Gamma^{E}_{kl},$$
$$\bar{H}_2 = C^{E''}_{ijkl}(;)\left[\varepsilon'_{ij}\varepsilon''_{kl} - \varepsilon''_{ij}\varepsilon'_{kl}\right] + \left(e''_{kij}(;) + e^{*''}_{kij}(;)\right)\left[\varepsilon'_{ij}E''_k - \varepsilon''_{ij}E'_k\right] -$$
$$-\mu''_{kl}(;)\left[E'_kE''_l - E''_kE'_l\right].$$

Як і вище, вимога однозначної визначеності функцій $\bar{D}$ і $\bar{H}$ приводить до рівностей

$$\bar{D}_2 = 0,\ \bar{H}_2 = 0,$$

для виконання яких постулюються наступні умови симетрії

$$C^{E'}_{ijkl}(;) = C^{E'}_{klij}(;),\ e^{*'}_{kij}(;) = -e'_{kij}(;),\ \mu'_{kl}(;) = \mu'_{lk}(;);$$
$$C^{E''}_{ijkl}(;) = C^{E''}_{klij}(;),\ e^{*''}_{kij}(;) = -e''_{kij}(;),\ \mu''_{kl}(;) = \mu''_{lk}(;).$$

Амплітудні рівняння приймають вигляд

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \tilde{C}^{E}_{ijkl}(;)\tilde{\varepsilon}_{kl} - \tilde{e}_{kij}(;)\tilde{E}_k,$$
$$\tilde{D}_k = \tilde{e}_{kij}(;)\tilde{\varepsilon}_{ij} + \tilde{\mu}^{\varepsilon}_{kl}(;)\tilde{E}_l. \tag{30}$$

Залишається справедливим зауваження стосовно лінійної теорії.

В роботі [3] рівняння виду (24) чи (30) отримані шляхом усереднення по Гальоркіну співвідношень загальної кратноінтегральної теорії електро’вязкопружності з використанням принципу взаємності, тобто припущення про те, що ядра кратноінтегральної теорії мають таку ж симетрію відносно перестановки індексів як і відповідні коефіцієнти нелінійного електропружного середовища. На відміну від [3] амплітудні рівняння (24) і (30) даної роботи не залежать від того, яке механічне середовище розглядається: в’язкопружне, пружнопластичне чи пружнов'язкопластичне. Єдиною умовою є реалізація в даному середовищі моногармонічного стану виду (1). Тому рівняння (24) і (30) в інтерпретації даної роботи мають ширше застосування.

Література

1. Карнаухов В.Г. Электротермовязкоупругость: Механика связанных полей в элементах конструкций / В.Г.Карнаухов, И.Ф.Киричок. – К.: Наук. думка, 1988. – Т.4. – 320 с.
2. Митропольский Ю.А. Нелинейная механика. Одночастотные колебания / Ю.А.Митропольский. – К.: Ин-т. математики НАН Украины, 1997. – 344 с.
3. Михайленко В.В. Общая структура амплитудных определяющих уравненнй неупругих пьезоелектричних тел при циклических электромеханических процессах / В.В.Михайленко // Прикл. механика. – 1996. – **32**, N 12. – С. 37-42.
4. Karnaukhov V.G. Nonlinear single-frequency vibrations and dissipative heating of inelastic piezoelectric bodies / V.G.Karnaukhov, V.V.Mikhailenko // Int. Appl. Mech. – 2002. – **38**, N 5. – P. 521-547.
5. Senchenkov I.K. Modeling the thermomechanical behavior of physically nonlinear materials under monoharmonic loading / I.K.Senchenkov, V.G.Karnaukhov // Int. Appl. Mech. – 2001. – **37**, N 11. – P. 1400-1432.

Стаття надійшла до редакційної колегії 3.12.2013 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором ***Мойсишиним В.М.****,*
д.ф.-м.н., професором, чл.-кор. НАН України ***Кушніром Р.М.*** *(м. Львів)*

STRUCTURE OF AMPLITUDE CONSTITUTIVE EQUATIONS FOR NON-ELASTIC PIEZOELECTRIC SOLIDS UNDER HARMONIC LOADING

V.G. Karnaukhov[1], V.V. Mikhailenko[2], O.V. Lushchykov[3]
[1]Institut of mechanics named by S. Timoshenco NAN of Ukraine; Kyiv
[2]Zhytomyr State University named by I. Franco; Zhytomyr
[3]Zhytomyr State Technological University; Zhytomyr

In this paper the structure of amplitude constitutive equations for non-elastic piezoelectric solids under harmonic loading is analyzed under the hypotheses of one-frequency electromechanical oscillations and time-shift invariance of amplitudes.

Key words: *amplitude constitutive equations, harmonic loading, piezoelectric solids.*