УДК 621.3:539.6

НАБЛИЖЕНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ЕЛІПТИЧНОГО ТИПУ (ОГЛЯД)

В. М. Сеничак[1], Р. Й. Ріпецький[1], Є. Й. Ріпецький[1], В. В. Сеничак[2], В. Р. Ріпецький[3]

[1]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

[2]Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57

[3]Національний університет "Львівська політехніка"; м. Львів

Подається стислий огляд найпоширеніших методів наближених обчислень, що використовуються при розв'язуванні крайових задач еліптичного типу, а також пропонується спрощений варіант методу скінченних елементів – спосіб обертання симплексу.

Ключові слова: *чисельне моделювання, еліптичні рівняння, випадкові блукання, перехідна ймовірність, спосіб обертання симплексу.*

Чисельне моделювання [78] складає невід'ємну частину сучасної фундаментальної і прикладної науки, причому за своєю важливістю воно наближається до традиційних експериментальних і теоретичних методів. Витісняючи аналітичні методи, обчислювальні експерименти дають змогу розв'язувати найскладніші задачі для непростих фізичних моделей.

У своїх виступах академік О.А. Самарський підкреслював, що обчислювальний експеримент – це єдиний засіб, який може перевести науку на інтенсивний шлях розвитку. Сучасна прикладна математика готова передати найновіші комп'ютерні технології на озброєння інженерам і конструкторам, фізикам і біологам, хімікам і медикам.

За останні роки методи праці інженерів, наукових працівників і викладачів змінились докорінно. Стрімке зменшення габаритів і зниження вартості сучасних ЕОМ з одночасним розширенням їх можливостей призвело до повсюдного використання комп'ютерів в різних галузях науки і техніки. Відчутно зросла роль ПЕОМ у процесі проектування. Широке розповсюдження отримали інтерактивні програми графічного подання інформації, що дає змогу компактніше описувати геометричні і фізичні властивості об'єктів у порівнянні з класичними методами [54]. Настійніше ставляться вимоги включення в арсенал інженерів розробників сучасних машинних методів обробки інформації. Питання "Як можна сформулювати дану задачу на комп'ютері?" змушує нас поновому подивитись на старі задачі і дає можливість розглянути нові [17].

Ефективні дослідження теплових і механічних процесів у машинобудуванні, суднобудівній промисловості, авіаційних, будівельних, гідротехнічних, трубопровідних та інших важливих інженерних спорудженнях і конструкціях все більше опираються на дискретні моделі механіки деформівного твердого тіла (МДТТ), математичною основою яких є рівняння еліптичного типу.

Типовою задачею для еліптичних рівнянь є перша крайова задача (задача Діріхле), а саме: на границі деякої скінченої області *n*-вимірного простору задається неперервна функція. Потрібно знайти деяку функцію, гармонійну всередині області і яка приймає задане значення на границі [49]. Однією із найважливіших властивостей розв'язків еліптичних рівнянь є їх гладкість.

Найпростішим представником еліптичних рівнянь є рівняння Лапласа (П'єр Сімон Лаплас – видатний французький вчений 18–19 століть), який застосував його у працях з теорії тяжіння. Зазначимо принагідно, що таке ж рівняння ще раніше було відоме Л.Ейлеру.

Рівняння Лапласа зустрічається у більшості розділів прикладної математики, теоретичної фізики і сучасної техніки. Цим рівнянням характеризується гравітаційний і електричний потенціали, потенціал швидкості безвихрового потоку нестисненої рідини, температура ізотропного середовища при усталеному русі тепла.

До еліптичних рівнянь відноситься також рівняння Пуассона, яке вперше (1812) запропонував і вивчив видатний французький вчений 18-19 століть Сімеон Дені Пуассон. Він застосував це рівняння для розв'язання задач з гравітації і електростатики, а також досліджував питання теплопровідності, магнетизму, капілярності, поширення звукових хвиль і балістики. У тривимірному просторі рівняння Пуассона задовольняє потенціал об'ємних мас, розподілених з відомою густиною, а також потенціал об'ємно розподілених електричних зарядів.

На превеликий жаль, їх аналітичний розв'язок вдається знайти тільки для геометрично тривіальних областей. Наприклад, в [49] приводиться розв'язування задачі Діріхле для крута будь-якого радіуса. Розв'язок рівняння Лапласа в полярних координатах шукається у вигляді добутку двох незалежних функцій. Розв'язком є відомий інтеграл Пуассона. Інший підхід до розв'язування задачі Діріхле для круга ґрунтується на використанні функції Гріна. Зокрема, для круга будь-якого радіуса функція Гріна будується в явному вигляді. В [68] задача Діріхле в області між двома неконцентричними колами розв'язується за допомогою конформного відображення. Проте, метод конформних відображень має обмежені можливості, оскільки його можна застосувати тільки до двовимірного рівняння Лапласа, а з невеликими змінами – і до рівняння Пуассона. Зокрема, задачу кручення стержня довільного однозв'язного перерізу можна вважати повністю розв'язаною, коли визначене конформне відображення області на круг. Точний розв'язок рівняння Пуассона отримано, наприклад, в [1] для прямокутних областей методом відокремлення змінних.

Однак на практиці найчастіше доводиться мати справу з областями складної форми. Наприклад, прогнозування нафто- і газовидобутку, належить до найактуальніших завдань розробки родовищ. Першорядне значення для точності прогнозу має інформація про розподіл пластового тиску в усьому родовищі, про глибину залягання і потужність продуктивних пластів. Якщо в результаті пошуково-розвідувальних робіт визначена границя області залягання нафти і пластовий тиск на границі, то задача полягає у визначенні пластового тиску в будь-якій точці родовища. На границі області тиск звично визначається експериментальним способом, який дорого коштує, – шляхом буріння свердловин. Математично поле пластових тисків моделюється рівнянням Лапласа з граничними умовами Діріхле [76].

У цьому випадку класичні математичні методи не завжди можуть забезпечити практичне розв'язання складних інженерних задач. В інженерній практиці використовуються досить добре опрацьовані наближені методи. Це може бути метод скінчених різниць (МСР) зі спеціальним регульованим обчислювальним шаблоном для опису криволінійних границь, метод скінчених елементів (МСЕ), метод граничних елементів (МГЕ), метод контрольних об'ємів (МКО) або широко розповсюджений алгоритм методу Монте-Карло, який вимагає суттєвих затрат машинного часу і наявності спеціальної апаратури для генерації випадкових кодів із заданим розподілом ймовірностей. Застосування чисельних методів дає змогу замінити складний, трудомісткий і дорогий фізичний експеримент більш економічним математичним (чисельним) експериментом. Отже, чисельні методи надзвичайно розширюють області ефективного використання математичних моделей фізичних явищ. В умовах загальної комп'ютеризації наукових досліджень головним об'єктом при розв'язуванні інженерних задач є не класичне диференціальне рівняння в частинних похідних, а його дискретний аналог.

Подамо короткий огляд найпоширеніших методів наближених обчислень, що використовуються при розв'язуванні вищеназваних задач.

В основі МСР лежить скінченно-різницева апроксимація похідних, яка здійснюється у три етапи [11, 56, 68]. Спочатку в області, що розглядається, вводять рівномірну сітку "вузлових точок" відповідно до характеру задачі і граничних умов. Потім рівняння з частинними похідними записують в найзручнішій системі координат і, подаючи похідні в скінченно-різницевій формі, зводять його до вигляду різницевого рівняння. Одержане різницеве рівняння записують для усіх вузлів сітки і отримують систему n алгебраїчних розв'язувальних рівнянь з n невідомими. На останньому етапі отриману систему розв'язують одним із чисельних методів.

Метод скінчених елементів (7, 10, 15, 18, 20, 23, 24, 25, 26, 32, 33, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 46, 47, 52, 55, 57, 61, 63, 66, 67, 77, 87, 83] є одним із сучасних потужних обчислювальних методів в галузі автоматизації процесів конструювання двовимірних і тривимірних виробів стосовно різних об'єктів машинобудування і електротехнічної промисловості [54]. Його основна ідея полягає в тому, що будь-яку неперервну величину (наприклад, температуру, тиск чи переміщення) можна апроксимувати дискретною моделлю, яка будується на множині кусково-неперервних функцій, визначених на скінченому числі під областей. Ці підобласті називаються скінченими елементами, на які поділяється досліджувана область. Класифікація скінчених елементів може бути проведена у відповідності з порядком поліноміальних функцій цих елементів. Так, наприклад, для симплекса – найпростішого скінченого елемента у вигляді трикутника з трьома вузлами апроксимуюча функція є лінійний поліном з двома аргументами, який містить три коефіцієнти, що співпадає з кількістю вузлів (вершин) трикутника. Таким чином, в МСЕ апроксимація здійснюється на кожному скінченому елементі досліджуваної області. В результаті, як і в МСР, отримують систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих вузлових значень шуканої величини. Для цього використовують або варіаційні підходи або методи зважених нев'язок.

Слід нагадати, що в 1943 році німецький математик Ріхард Курант вперше запропонував розв'язувати задачу кручення пружного стержня довільного перерізу шляхом тріангуляції досліджуваної області, побудови інтерполяційних поліномів на кожному трикутнику і зведення задачі до системи лінійних алгебраїчних рівнянь (хоча ідея подання суцільного середовища у вигляді системи елементів скінчених розмірів була відома ще Пуассону [82]). Р. Курант отримав розв'язок за допомогою мінімізації потенціальної енергії кручення [24, 47].

У 1954 році Аргіріс і його співробітники почали публікації серії робіт, в яких розвинули деякі узагальнення лінійної теорії конструкцій. Вони подали методи дослідження дискретних конструкцій складних конфігурацій у формі, зручній для використання ЕОМ. Перший формальний виклад МСЕ разом з методом жорсткості для сукупності елементів належить Тернеру, Клафу, Мартіну і Топпу (1956 р.), котрі при дослідженні задач плоского напруженого стану використали для опису властивостей трикутного елемента рівняння класичної теорії пружності. Таким чином, рівняння Пуассона з нульовими граничними умовами відіграло видатну роль в історії розвитку найпопулярнішого сьогодні чисельного методу – методу скінчених елементів. З появою ЕОМ метод, запропонований Курантом, став бурхливо розвиватися. А в 60-их роках американські вчені дали цьому методу його теперішню назву.

Чисельні методи, що використовуються для розв'язування диференціальних рівнянь в частинних похідних, можна поділити на дві основні групи [16]. В одній з них використовується апроксимація в області (МСР, МСЕ), в іншій – апроксимація функцій на границі області (МГЕ, МКО). Перша група методів дуже популярна і широко застосовується для моделювання у техніці. Методи другої групи, область застосування яких у певній мірі обмежена, в останні роки довели свою високу ефективність і привернули увагу багатьох спеціалістів, що займаються питаннями моделювання.

Метод граничних елементів або метод граничних інтегральних рівнянь [5] з'явився останнім часом поруч з методом скінчених елементів. МГЕ поєднав метод інтегральних рівнянь з методом скінчених елементів. Таким чином, він містить в собі і аналітичний метод, і чисельний розрахунок. Границя досліджуваної області подається у вигляді скінчених елементів, а поведінка внутрішньої області описується граничними інтегральними рівняннями.

Вперше цей підхід був застосований до розв'язування задачі кручення за допомогою прямих методів теорії потенціалу [79]. Пізніше він був розповсюджений на просторові задачі. В МГЕ, на відміну від МСЕ, дискретизації підлягає тільки поверхня пружного тіла. Завдяки цьому отримується суттєво менша кількість вузлових точок і невідомих, які потрібно визначити, ніж в сітці з скінчених елементів. Достоїнством МГЕ є те, що апроксимація і розв'язки будуються тільки для поверхневих величин, тому просторова задача зводиться до розгляду поверхні, тобто розмірність задачі зменшується на одиницю. МГЕ особливо ефективний для видовжених областей і тіл, коли МСЕ неефективний із-за неможливості з необхідною точністю описати поведінку моделі при її дискретизації. Суттєвим обмеженням методу граничних елементів є те, що він придатний тільки для розв'язування лінійних задач. Хоча система алгебраїчних рівнянь в МГЕ суттєво менша, ніж в аналогічних задачах, що розв'язуються за допомогою МСЕ, матриця коефіцієнтів системи є повною і несиметричною. В підсумку можна сказати, що як МСЕ, так і МГЕ належать до найефективніших наближених чисельних методів, що використовуються при розв'язуванні задач, які моделюються рівняннями Лапласа або Пуассона. Однак обидва методи вимагають наявності високопродуктивних ЕОМ. Метод контрольних об'ємів (МКО) з'явився зовсім недавно і найбільшого поширення отримав в задачах теплообміну і динаміки рідини [48]. Творці МКО Б. Сполдінг і С. Патанкар вважають, що МСР і МСЕ можна розглядати як дві альтернативні версії МКО. Відмінність між ними обумовлено способом вибору профілів шуканої функції і виводу дискретних аналогів рівняння. В МСЕ за наближений розв'язок береться передбачувана зміна функції, що складається з вузлових значень і інтерполяційних функцій між ними. В МСР, як розв'язок, розглядають тільки вузлові значення функції і не робиться жодних явних вказівок про характер зміни функції між вузлами. В МКО використовується саме цей підхід і розв’язок шукається у вигляді набору вузлових значень. Інтерполяційні формули відіграють допоміжну роль, вони необхідні для обчислення інтегралів. Після побудови дискретного аналогу припущення про характер профілів можна не враховувати. Така точка зору дає повну свободу у використанні різних профілів для інтегрування різних членів диференціального рівняння. Основна ідея МКО проста [48, 29, 30] і піддається прямій фізичній інтерпретації. Розрахункову область поділяють на деяке число непересічних контрольних об’ємів (КО) таким чином, щоб кожна вузлова точка містилась в одному КО. Звична процедура побудови дискретного аналогу передбачає інтегрування диференціального рівняння по кожному об'єму. Для обчислення інтегралів використовуються кускові профілі, які описують зміну досліджуваної функції між вузловими точками. В результаті дискретний аналог рівняння, що містить вузлові значення досліджуваної функції, виражає закон збереження функції для скінченого КО так само, як диференціальне рівняння виражає закон збереження для нескінченно малого КО. Однією з важливих властивостей МКО є те, що в ньому закладений точний інтегральний закон збереження балансу на будь-якій групі КО. Ця властивість проявляється при довільному числі вузлів, що дає змогу отримувати досить точні розв’язки навіть на крупній сітці [30].

Чисельний метод розв’язування математичних задач за допомогою статистичного моделювання – метод Монте-Карло, з’явився у 1949 році, коли американські математики Дж. Нейман і С. Улам опублікували статтю під назвою “The Monte Carlo method” [80]. Перші статті в колишньому СРСР про метод Монте-Карло були опубліковані В. В. Чавчанідзе, Ю. А. Шрейдером і В. С. Владимировим через сім років.

Цікаво, що теоретична основа методу була відома давно [64]. Більш того, розрахунки деяких задач статистики проводились деколи з допомогою випадкових вибірок, тобто, фактично методом Монте-Карло. Однак, до появи електронно-обчислювальних машин цей метод не міг знайти широкого застосування, оскільки моделювати випадкові величини – дуже трудомістка робота. Таким чином, виникнення методу Монте-Карло, як універсального чисельного методу, стало можливим тільки завдяки появі ЕОМ. Початковий оптимізм у застосуванні методу через деякий час поступився місцем в такій же мірі необґрунтованому песимізму. Справа в тому, що класичний варіант методу Монте-Карло ефективний тільки при реалізації на швидкодіючих ЕОМ, оскільки він вимагає великої кількості статистичних спроб, які зменшують середню квадратичну похибку результату. Однак, незважаючи на труднощі застосування методу на ЕОМ середнього класу, а можливо, і завдяки їм, теорію методу вдалось вдосконалити, що суттєво підвищило ефективність методу при розв’язанні широкого кола задач науки і техніки [4, 6, 12, 19, 21, 51, 53, 62, 64, 69]. В наш час ЕОМ нового покоління створили необхідну базу для активного застосування методу Монте-Карло в інженерних розрахунках. Слід також зауважити, що на практиці метод Монте-Карло застосовують у випадках, коли не вимагається велика точність результату, оскільки в протилежному випадку доводиться проводити надто велику серію випробувань, що іноді практично нездійсненно. Відомо [13], що для збільшення точності у 10 разів, тобто отримати ще один правильний знак у результаті, треба збільшити кількість випробувань приблизно в 100 разів. Зрозуміло, що великої точності в такому випадку досягти нелегко навіть з використанням сучасної обчислювальної техніки. Однак багато практично важливих задач з достатньою точністю можна розв’язувати за допомогою методу статистичних випробувань. Стверджують, що метод Монте-Карло особливо ефективний при розв’язуванні тих задач, в яких результат потрібний з невеликою точністю (5-10%) [64]. Метод Монте-Карло дає змогу моделювати будь-який процес, на перебіг якого впливають випадкові фактори. Для багатьох математичних задач, не пов’язаних з якими-небудь випадковостями, можна придумати імовірнісну модель (і навіть не одну), що дає змогу розв’язувати ці задачі [64]. Особливо цікаво, що в деяких випадках вигідно відмовитись від моделювання істинного процесу і замість цього розглядати штучну модель. Таким чином, можна говорити про метод Монте-Карло, як про універсальний метод розв’язування математичних задач.

Вважається, що найпростіший алгоритм розв’язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа дає метод Монте-Карло [21], що ґрунтується на принципах випадкових блукань по вузлах цілочисельної решітки. Дійсно, обчислювальна процедура методу Монте-Карло дуже проста, але рандомізація обчислень вимагає достатньо продуктивної ЕОМ, обладнаної, до того ж, спеціальним пристроєм для генерування випадкових кодів. Як бачимо, розв’язування задачі Діріхле для рівняння Лапласа і Пуассона традиційними формами дискретних методів вимагає великих затрат часу та використання високопродуктивних ЕОМ. Хоча, взагалі кажучи, характерною рисою багатьох людей, які щойно освоїли роботу на ЕОМ і вражених її потужністю, є прагнення отримати, як можна більше, числових результатів керуючись наївним принципом: “чим більше інформації, тим більше користі”. Здебільшого ці люди виявляються потім приголомшеними морем цифр, причому проблема здобування корисного висновку з цього моря може стати складнішою, ніж початкова задача [3].

В наш час комп’ютеризація наукових досліджень, проектних і конструкторських робіт здійснюється шляхом широкого використання персональних ЕОМ в системах автоматизованого проектування (САПР). У зв’язку з цим виникла актуальна проблема пониження розмірності задач і прискорення обчислень. Одним із шляхів впровадження прогресивних інформаційних технологій є перехід до простіших моделей і економічніших розрахункових схем. Нові прийоми прискорених обчислень, що здатні цілеспрямовано і швидко корегувати параметри об'єкта на стадії проектування, можуть суттєво скоротити строки і вартість розробок. Тому особливої актуальності тепер набувають питання побудови спрощених моделей і розробки швидких методів обчислень.

Питання вивчення дискретних моделей нетрадиційними засобами і розробка нових способів розв'язування крайових задач особливо актуальні в попередніх, проектувальних розрахунках, коли цілком можна обійтись без складних деталізованих моделей. Образцов І. Ф., наприклад, вважає, що пониження розмірності задачі можна добитися не тільки за рахунок редукції математичних операцій, але й за рахунок побудови простіших моделей, особливо в тих випадках, коли це допускається міркуванням точності. На користь простих моделей рішуче виступає В. В. Новожилов, вважаючи, що прості моделі корисні навіть тоді, коли вони не забезпечують необхідну точність. Він пише [45], що розвиток швидкодіючих обчислювальних машин аж ніяк не повинен послаблювати інтерес до пошуку простих (“примітивних”) моделей, що тільки після попереднього грубого наближеного розв’язку задачі має зміст виконання її на ЕОМ. Він вважає також, що попередній аналіз задач важливий ще й тим, що дає змогу отримати наближену оцінку результатів. А це рівносильно значній економії машинного часу. Справа в тому, що більшість алгоритмів будуються за принципом послідовних наближень. Швидкість збіжності такого процесу, як відомо, суттєво залежить від того, наскільки вдало вибране перше наближення. У цьому відношенні ми також є прихильниками простих моделей. Однак, побудова простої моделі є зовсім не простою справою.

Пізніше з’явилось стільки різновидів скінчених методів, що була зроблена спроба створити єдину теорію цих методів. Наприклад, Зенкевич О. і Моргам К. запропонували ввести “узагальнений МСЕ”, який охоплює всі можливі варіанти дискретних апроксимацій [25]. В докторській дисертації А. Н. Хомченка [72] та кандидатській дисертації Л. І. Камаєвої [28] показано, що така єдиність може бути досягнута за рахунок імовірнісного трактування дискретних аналогів в термінах випадкових блукань.

Історично задача про випадкові блукання була поставлена як ігрова “Задача розорення гравця”. Більшість математиків минулого (Муавр, Лаплас, Лагранж, Пойа та інші) займались дослідженням цієї задачі [2, 9]. Однак, суттєвого розвитку ці дослідження досягли у зв’язку з вивченням броунівського руху, відкритого Броуном у 1827 році. З’явились спроби математично моделювати цей рух [15]. Вперше молекулярно-статистичне його тлумачення було подано лише в 1905 і в 1906 роках А. Ейнштейном і М. Смолуховським. А в 1914 році Планком і Фоккером була розглянута задача про випадкові блукання частинки по вузлах прямої (одновимірна модель), в результаті чого вперше було виявлено зв'язок між імовірністю в схемі блукання, скінченно-різницевому відношенні і умовами переходу скінченно-різницевого рівняння у диференціальне. В 1931 році Колмогоров А. Н. отримав нові результати в цьому напрямі.

У міру розвитку математичного апарату теорії ймовірностей її результати стали використовуватись в теорії диференціальних рівнянь. У 1934 році Петровським І. Г. була встановлена можливість застосування випадкових блукань по решітці для розв'язування диференціальних рівнянь в частинних похідних. А в 1940 році Курант Р., Фрідрікс К. і Леві Г. узагальнили результати Петровського І. Г. на широкий клас задач математичної фізики [35]. Питання, пов'язані з випадковими блуканнями, з різним ступенем загальності висвітлювались в книгах таких відомих математиків, як Вінер Н., Гнеденко Б. В., Хінчин А. Я., Феллер В., Гіхман І. І., Скороход А. В., Королюк В. С. та інших [12, 13, 14, 69].

Вивчення броунівського руху засобами теорії ймовірностей продовжується і в наш час. Значні результати в цьому напрямі отримали Золотарьов В. М., Ватанабе С, Ікеда Н., Хіда Т. та інші [8, 27, 71]. Дослідження цих вчених відкрили принципову можливість рандомізації обчислень з допомогою процедури блукань по вузлах цілочисельної решітки стосовно до диференціальних рівнянь за допомогою скінченно-різницевих аналогів [22], а запропонований у 1949 році Нейманом і Уламом метод Монте-Карло поклав початок практичного застосування статистичних випробувань в інженерних розрахунках [4, 6, 19, 64]. Поява цього методу, а також перших ЕОМ, відіграла велику роль в реалізації простих імовірнісних схем для чисельного розв'язування диференціальних рівнянь через скінченно-різницеві аналоги.

В останні роки з'явились і стали використовуватись нові (доволі складні) моделі випадкових блукань, котрі вимагають найдосконалішого математичного апарату. Проте, прості схеми випадкових блукань ще не вичерпали своїх пізнавальних і обчислювальних можливостей. На наш погляд, схема блукань по вузлах цілочисельної решітки (схема Бернуллі) найкраще підходить для практичних розрахунків завдяки своїй простоті і універсальності. Можна показати, що вона піддається вдосконаленню і легко охоплює інші скінченні методи [73].

Імовірнісні уявлення, що містяться в основі випадкових блукань, допомагають розвинути новий підхід до теорії скінчених методів. Цікаво відзначити, що історія розвитку науки супроводжувалась неухильним зростанням ролі імовірнісних уявлень, котрі вносять узагальнення, порядок і простоту в ті питання, де традиційний детерміністичний підхід є безсилим [14]. Теорія ймовірності, як відомо, має рідкісну властивість формувати нову мову, стиль і вигляд наукового дослідження. Запровадження у теорію скінчених елементів нових понять, зокрема, блукаючої частинки, випадкового маршруту, середньої винагороди та інших, дає змогу не тільки описати відомі факти та суттєво спростити значну кількість обчислювальних процедур, але й отримати нові результати. В дисертаціях Камаєвої Л. І. і Хомченка А. Н. [28, 72] була розвинута ймовірнісно-статистична версія МСЕ на основі встановленого зв'язку між принципами випадкових блукань і скінченно-елементними апроксимаціями. Не ускладнюючи модель випадкових блукань по решітці, а вдосконаливши її, був здійснений природний перехід від дискретної схеми до неперервної. В ланцюжку, що з'єднує перехідну ймовірність, скінченно-різницевий аналог і диференціальні рівняння замінили середню ланку на скінченно-елементний аналог. Відомо, що скінченно-елементна апроксимація досконаліша, тому скінченно-елементний аналог краще справиться зі своєю роллю, ніж скінченно-різницевий. При цьому виникає питання: чи порушаться зв'язки між ланками нового ланцюжка? Зв'язок між МСЕ і диференціальним рівнянням відомий давно. Тепер МСЕ є універсальним методом розв'язування диференціальних рівнянь [37, 43, 65]. Що ж стосується зв'язку скінченного елемента з перехідною ймовірністю у схемі випадкових блукань, то до недавнього часу про не в літературі не згадувалось. Можливо дослідники, які знали про імовірнісну інтерпретацію скінченно-елементних апроксимацій, не бачили передумов для обговорення і розвитку цього напрямку, хоча встановлення саме такого зв'язку дає змогу залучити в теорію скінчених методів нові поняття, формули і теореми ймовірнісно-статистичної теорії.

Удосконалення правил випадкових блукань дає можливість здійснити коректний перехід від блукань по вузлах цілочисельної решітки (дискретна схема) до блукань по області скінченого елемента (неперервна схема). Нові правила полягають в тому, що частинка починає блукання з будь-якої точки елемента і переходить у вузол з ймовірністю, яка залежить від положення старту частинки. В ролі перехідних ймовірностей виступають базисні функції, а скінченно-елементна апроксимація набуває форми середньої винагороди за вихід блукаючої частинки у вузол. Таке трактування випадкових блукань дає цілий ряд переваг в порівнянні з традиційними підходами. Наприклад, з'являється можливість прямої побудови базису скінченого елемента на основі геометричної ймовірності [75]. При знаходженні середньої винагороди вдається отримати точні значення ймовірностей переходу, виключивши необхідність моделювання довгих серій статистичних випробувань. Це значно зменшує об'єм обчислювальної роботи і дає змогу обійтись без спеціальної апаратури для генерування випадкових кодів. Основна перевага полягає в тому, що для чисельного розв'язання крайової задачі не вимагається нанесення сітки на розрахункову область. Граничні задачі в областях складної форми можна розв'язувати способом обертання симплексу (СОС), який поєднує в собі основні переваги МСЕ, МГЕ і плідні ідеї методу Монте-Карло. Запропонований спосіб – найефективніший при розв'язуванні задачі Діріхле для рівняння Лапласа. Він добре узгоджується з властивостями, які має лапласіан: властивість усереднення, ефект згладжування на границі [68]. Тут працює теорема про середнє гармонійної функції, яка в математиці відома давно [34, 49], але в механіці широкого застосування не знаходила.

Особливість запропонованого способу полягає в тому, що ми використовуємо лише один симплекс-елемент [28, 31, 36, 58, 59, 60, 72] з вершинами на границі області. При цьому передбачена можливість повертати його і розглядати серію "стоп-кадрів". Оскільки при повороті симплексу вузли змінюються, то відбувається накопичення граничної інформації в досліджуваній точці, а значення шуканої величини (розв'язок рівняння Лапласа) визначається як середнє арифметичне значень, отриманих для кожного положення симплексу. Слід зауважити, що кількість вузлів і їх розміщення залежить від потрібної точності і швидкості зміни функції на границі. При необхідності можна фіксувати один або два вузли, змінюючи розміщення тих, що залишилися. Спосіб обертання симплексу настільки простий, що легко піддається алгоритмізації. При цьому достатньо ресурсів мікрокалькулятора. СОС можна легко застосувати і до просторових задач (обертання тетраедра).

Для апробації СОС була розв'язана серія модельних задач. Розглянуті стаціонарні температурні задачі, в тому числі з джерелом [43, 74, 78], які описуються як рівнянням Лапласа з граничними умовами Діріхле, так і рівнянням Пуассона з нульовими умовами на границі. Температурні задачі приваблювали дослідників на протязі тривалого часу. Найвагоміші результати в цьому напрямі отримали вчені Балабух Л.І., Болотін В.В., Бурак Я.І., Григолюк Є.І, Коваленко А.Д., Коляно Ю.М., Крисько В.А, Ликов А.В., Малкін Я.Ф., Мотовиловець І.А., Піскунов В.Г., Підстригач Я.С., Титаренко А.П., Уздалєв А.І., Шабров Н.Н., Швець Р.Н., Мелан, Паркус, Патанкар, Снеддон, Сполдінг, Флетчер та інші. Наші дослідження показали, що запропонований підхід, який використовує зважене усереднення граничних вузлових значень, є ефективний, простий і доволі точний [58, 59, 60]. Крім вказаних вище достоїнств, СОС не потребує складання і розв'язування великих систем рівнянь, що є необхідним при використанні традиційних скінчених методів.

СОС можна застосовувати ефективніше, якщо для вибору розрахункових точок на границі досліджуваної області використовується гіпотеза дифузійної плями [74], яка дає змогу вказати на границі області зони найімовірнішого поглинання блукаючих частинок. Крім того, гіпотеза дифузійної плями дає можливість вибрати на границі мінімум розрахункових точок, які забезпечують найдостовірніший результат. За допомогою гіпотези дифузійної плями вдається будувати також інтервальні оцінки для шуканого розв'язку.

СОС особливо зручно використовувати в тих випадках, коли досліджується температурне поле не у цілій області, а лише в деякій її частині або в окремо взятій точці. Тоді традиційні підходи виявляються недоцільними, оскільки виконується багато зайвої роботи.

Велика увага в даній роботі приділяється питанням автоматизації розв'язання задач кручення призматичних стержнів довільного перерізу. Ці задачі складають дуже важливий розділ будівельної механіки. Теорія кручення стержнів некруглого перерізу має довгу і яскраву історію [1, 50, 70]. Багато видатних вчених займалися цим питанням. Найістотніший вклад внесли Абромян Б.Л., Арутюнян Н.Х., Бідерман В.Л., Бичков Д.В., Власов В.Г., Джанелідзе Г.Ю., Винник А.Н., Малінін Н.Н., Новожилов В.В., Пановко Я.Г., Папковим В.Ф., Тимошенко С.П., Феодосьєв В.І., Буссінеск. Вебер, Грінхіль, Гріффіц, Прандтль, Прескот, Феппль, Шміден та інші.

Як відомо, задача кручення призматичного стержня за допомогою функції напружень Прандтля зводиться до розв'язування задачі Діріхле для рівняння Пуассона з нульовими граничними умовами на контурі. Така постановка задачі дає можливість використати для знаходження функції Прандтля спрощені обчислювальні схеми. Ми розв'язали ряд модельних задач з застосуванням програми розв'язування рівняння Пуассона в довільній області методом прискорених статистичних випробувань [58, 60]. Отримані результати підтвердили ефективність цього методу, а особливо в тих випадках, коли стержень має складну форму перерізу.

Відома мембранна аналогія, встановлена Людвігом Прандтлем у 1904 році, з точки зору теорії випадкових блукань набуває тепер дифузійного тлумачення. Такий підхід допоміг уточнити характер поверхні Прандтля ("горб напружень" [1]) і отримати наближену формулу для жорсткості скручуваного стержня [31, 58]. Ця формула добре зарекомендувала себе в роботі. Вона надзвичайно проста і в той же час дає високу точність. Знаючи форму поверхні Прандтля, а також враховуючи той факт, що дотичні напруження пропорційні крутизні поверхні, для визначення дотичних напружень у будь-якій точці використовується геометричний підхід (спосіб перетинів).

У тому випадку, коли область перетину стержня має якісь особливості, наприклад, вхідні кути, "перешийки" і т.п., наш підхід, зрештою, як і традиційний, зазнає деяких труднощів. Для отримання най достовірніших результатів потрібно брати більше розрахункових точок на межі досліджуваної області, що "породжує" більшу кількість "стоп-кадрів". Можна також розглядати комбінацію різних способів поблизу тих точок, де є особливості.

Підсумовуючи сказане, зазначимо, що імовірнісні аспекти вносять вагомий вклад у розвиток та застосування скінчених методів, збагачують їх і відкривають перспективу. Зокрема, Хомченком А. Н. розвинуто імовірнісну концепцію скінчених методів на прикладі МСЕ, знайдено нові інтерпретації основних процедур, сформовано новий стиль викладу на основі ігрової термінології та розроблено принципово новий метод прискорених статистичних випробувань (типу методів Монте-Карло) для оперативного розв'язання. Крайових задач механіки деформівного твердого тіла в областях складної форми – спосіб обертання симплексу. А створення математичного та програмного забезпечення з метою комп'ютерної реалізації цих задач дає змогу ефективного використання СОС при здійсненні конкретного процесу проектування. Крім того, простота і універсальність таких програм роблять їх доступними для широкого кола користувачів.

Література

1. Арутюнян Н.Х. Кручение упругих тел / Н.Х.Арутюнян, Б.Л.Абрамян. – М.: Физ-матгиз, 1963. – 686 с.
2. Баранкевич М.М. Методы и модели случайных процессов / М.М.Баранкевич. – Львов, 1986. – 185 с.
3. Блехман И.И. Прикладная математика: предмет, логика, особенности подходов / И.И.Блехман, А.Д.Мышкис, А.Г.Пановко. – Киев: Наукова думка, 1976. – 272 с.
4. Браун Дж.В. Методы Монте-Карло / Дж.В.Браун; Под ред. Э.Ф. Бекенба-ха // Современная математика для инженеров. – М.: Изд-во иностранной литературы, 1958. – С. 275-304.
5. Бреббиа К. Применение метода граничных элементов в технике / К.Бреббиа, С.Уокер. – М.: Мир, 1982. – 248 с.
6. Бусленко Н.П. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) / Н.П.Бусленко, Д.И.Голенко. – М.: Физматгиз, 1962. – 242 с.
7. Метод конечных элементов / П.М.Варвак, И.М.Бузун, А.С.Городецкий, В.Г.Пискунов, Ю.Н.Толокнов. – К.: Вища школа, 1981. – 176 с.
8. Ватанабэ С. Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы / С.Ватанабэ, М.Икэда. – М.: Наука, 1986. – 230 с.
9. Ворошко П.П. Применение метода случайных блужданий для решения задач теории упругости / П.П.Ворошко, А.Л.Квитка, А.С.Цыбенко // Проблемы прочности. – 1973. – №4. – С. 53-57.
10. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы / Р.Галлагер. – М.: Мир, 1984 – 428 с.
11. Гельфонд А.О. Исчисление конечных разностей / А.О.Гельфонд. – М.: Наука, 1967. – 340 с.
12. Гихман И.И. Теория вероятностей и математическая статистика / И.И.Гихман, А.В.Скороход, М.И.Ядренко. – К.: Вища школа, 1979. – 408 с.
13. Гнеденко Б.В. Из истории науки о случайном / Б.В.Гнеденко. – М.: Знание, 1981. – 64 с.

14. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей / Б.В.Гнеденко. – М.: Наука, 1971. – 340 с.
15. Грин Б.Е. Обобщенные вариационные принципы в методе конечных элементов / Б.Е.Грин // Ракетная техника и космонавтика. – 1967. – №7. – С. 100-103.
16. Громадка Т. Комплексный метод граничных элементов / Т.Громадка, Ч.Лей. – М.: Мир, 1990. – 303 с.
17. Гулд Х., Тобочник Я. Компьютерное моделирование в физике: В 2-х частях. Ч.2 / Х.Гулд, Я.Тобочник; Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 400 с.
18. Деклу Ж. Метод конечных элементов / Ж.Деклу. – М.: Мир, 1976. – 95 с.
19. Елепов Б.С. Решение краевых задач методом Монте-Карло / Б.С.Елепов, А.Л.Кронберг, Г.Л.Михайлов. – Новосибирск: Наука, 1980. – 174 с.
20. Ержанов Ж.С., Керимбаев Т.Д. Метод конечных элементов в задачах механики горных пород / Ж.С.Ержанов, Т.Д.Керимбаев. – Алма-Ата: Наука, 1975. – 312 с.
21. Ермаков С.М. Статистическое моделирование / С.М.Ермаков, Г.Л.Михайлов. – М.: Наука, 1982. – 296 с.
22. Ермаков С.М. Методы моделирования дискретных случайных величин, основанные на рандомизации параметров распределений / С.М.Ермаков, Б.Б.Походзей // ЖВМ и МФ. – 1981. – Т.21, №5. – С. 1323-1326.
23. Ершов Н.Ф. Метод конечных элементов в задачах гидродинамики и гидроупругости / Н.Ф.Ершов, Г.Г.Шахверди. – Л.: Судостроение, 1984.
24. Зенкевич О.К. Метод конечных элементов: от интуиции к общности / О.К.Зенкевич // Новое в зарубежной науке. Механика. – М.: Мир, 1970. – №6. – С. 90-103.
25. Зенкевич О.К. Конечные элементы и аппроксимация / О.К.Зенкевич, К.Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
26. Зенкевич О.К., Чанг И. Метод конечных элементов в теории сооружений и в механике сплошных сред / О.К.Зенкевич, И.Чанг. – М.: Недра, 1974. – 238 с.
27. Золотарев В.М. Закон больших чисел / В.М.Золотарев. – М.: Знание, 1987. – 48 с.
28. Камаева Л.И. Дискретные модели и вероятностные методы в задачах строительной механики / Л.И.Камаева // Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. – Саратов: Сарат. политехн. ин-т, 1990. – 190 с.
29. Камаєва Л.І. Дискретні методи в задачах нафтової і газової промисловості / Л.І.Камаєва, В.М.Сеничак, А.Н.Хомченко. – Івано-Франківськ, 1993. – 8 с. Деп. в ДНТБ України 14.06.93., № 1143-Ук93.

30. Камаєва Л.І. Метод контрольних об'ємів для чисельного дослідження теплових полів підземних трубопроводів / Л.І.Камаєва, В.М.Сеничак, А.Н.Хомченко // Розвідка та розробка нафтових і газових родовищ. – Івано-Франківськ, 1993. – Вип. 30. – С. 135-139.
31. Камаєва Л.І. Розробка програмного забезпечення побудови інтервальних оцінок крутильної жорсткості для перетинів довільної форми / Л.І.Камаєва, В.М.Сеничак, А.Н.Хомченко. – Івано-Франківськ, 1994. – 13 с. – Деп. в ДНТБ України 21.06.94., N 1235-Ук94.
32. Колмогоров А.Н. Введение в теорию вероятностей / А.Н.Колмогоров, И.Г.Журбенко, А.В.Прохоров. – М.: Наука, 1982. – 160 с.
33. Коннор Дж. Метод конечных элементов в механике жидкости / Дж.Коннор, К.Бреббиа. – Л.: Судостроение, 1979. – 164 с.
34. Курант Р. Курс дифференциального и интегрального исчисления / Р.Курант. – М.: Наука, 1970. – 672 с.
35. Курант Р. О разностных уравнениях математической физики / Р.Курант, К.Фридрикс, Г.Леви // Успехи матем. наук. – 1940. – Вып. 8. – С. 125-160.
36. Лурье И.Л. Диагностика температурного поля в неконцентрическом кольце / И.Л.Лурье // Математ. моделирование: Сб. науч. тр. – К.: Ин-т математики НАНУ, 1966. – С. 160-162.
37. Марчук Г.И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г.И.Марчук, В.И.Агошков. – М.: Наука, 1981. – 416 с.
38. Метод конечных элементов в проектировании транспортных сооружений / А.С.Городецкий, В.И.Зоворицкий, А.И.Лантух-Лященко, А.О.Рассказов. – М.: Транспорт, 1981. – 143 с.
39. Метод конечных элементов в механике твердых тел / Под ред. А.С.Сахарова, И.Альтенбаха. — К.: Вища школа, 1982.
40. Метод конечных элементов в строительной механике и механике сплошных сред: Рефер. обзор заруб, лит-ры за период 1966-1970 г.г. / Сост. Баркова М.А. – Л.: Изд-во ВНИИГ, 1971.
41. Метод конечных элементов в строительной механике твердого деформируемого тела: Аннотир. библиогр. указатель отечественной лит-ры за период 1970-1976 г.г. / Сост. Докшина Г.Л., Салов П.Н. – Л.: Изд-во ВНИИГ, 1977.
42. Метод конечных элементов в строительной механике. – Горький: Изд-во ГГУ, 1975.
43. Митчелл Э. Метод конечных элементов для уравнений с частными производными / Э.Митчелл, Р.Уэйт. — М.: Мир, 1981. – 216 с.
44. Молчанов И.Н. Основы метода конечных элементов / И.Н.Молчанов, Л.Д.Николенко. – К.: Наукова думка, 1989. – 272 с.
45. Новожилов В.В. Вопросы механики сплошной среды / В.В.Новожилов. – Л.: Судостроение, 1989. – 400 с.
46. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д.Норри, Ж. де Фриз. – М.: Мир, 1981. – 304 с.

47. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж.Оден. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
48. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С.Патанкар. — М.: Энергоатомиздат, 1984.
49. Петровский И.Г. Лекции об уравнениях с частными производными / И.Г.Петровский. – М.: Изд-во технико-теоретической лит-ры, 1961. – 304 с.
50. Прочность, устойчивость, колебания: Справочник машиностроителя: В 3 т. / Под ред. Биргера И.А., Пановко Я.Г. – М.: Машиностроение, 1968. – Т.1. – 832 с.
51. Розанов Ю.А. Случайные процессы / Ю.А.Розанов. – М.: Наука, 1979. – 184 с.
52. Розин Л.Л. Современное состояние метода конечных элементов в строительной механике / Л.Л.Розин // Известия вузов. Строительство и архитектура. – 1981. – №11. – С. 41-54.
53. Сабельфельд К.К. Методы Монте-Карло в краевых задачах / К.К.Сабельфельд. – Новосибирск: Наука, 1989. – 280 с.
54. Сабоннадьер Ж.-К. Метод конечных элементов и САПР / Ж.-К.Сабоннадьер, Ж.-Л.Кулон; Пер. с франц. – М.: Мир, 1989. – 190 с.
55. Савула Я.Г. Некоторые приложения метода конечных элементов / Я.Г.Савула, Г.Л.Шинкаренко, В.Н.Вовк. – Львов: Изд-во ЛГУ, 1981. – 88 с.
56. Самарский А.Л. Теория разностных схем / А.Л.Самарский. – М.: Наука, 1977.
57. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л.Сегерлинд. – М.: Мир, 1979. – 392 с.
58. Сеничак В.М. Программа решения уравнения Пуассона в произвольной области методом ускоренных статистических испытаний / В.М.Сеничак, А.Н.Хомченко // Фонд алгоритмов и программ ИПС АН Украины. – Киев, июнь 1993. – Инв. N П6412.
59. Сеничак В.М. Комп'ютерна Діагностика температурних полів в областях складної форми. Математическое моделирование / В.М.Сеничак // Сб. науч. тр. НАН Украины. Ин-т математики. – Киев, 1996. – С. 209-212.
60. Сеничак В.М. Комп'ютерне розв'язування задач, математичною основою яких є рівняння Лапласа або Пуассона / В.М.Сеничак, Б.О.Чернов, Т.Г.Ла-винюкова // Методи та прилади контролю якості. – 2001. – №7. – С. 71-74.
61. Сильвестер П. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков / П.Сильвестер, Р.Феррари. – М.: Мир, 1986.
62. Синай Я.Г. Случайность неслучайного / Я.Г.Синай // Природа. – 1981. – №3. – С. 72-80.
63. Синицын А.П. Метод конечных элементов в динамике сооружений / А.П.Синицын. – М.: Стройиздат, 1978.

64. Соболь И.М. Метод Монте-Карло / И.М.Соболь. – М.: Наука, 1985. – 80 с.
65. Стренг Г. Теория метода конечных элементов / Г.Стренг, Дж.Фикс. – М.: Мир, 1977. – 349 с.
66. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач / Ф.Сьярле Ф. – М.: Мир, 1980. – 396 с.
67. Фадеев А.Б. Метод конечных элементов в геомеханике / А.Б.Фадеев. – М.: Недра, 1987.
68. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / С.Фарлоу. – М.: Мир, 1985. – 324 с.
69. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложение. В 2 т / В.Феллер. – М.: Мир, 1964. – Т.1. – 500 с, 1967. – Т.2. – 752 с.
70. Филин А.П. Прикладная механика твердого деформируемого тела. В 3 т / А.П.Филин. – М.: Наука, 1978. – Т.2. – 616 с.
71. Хида Т. Броуновское движение / Т.Хида. – М.: Наука, 1987. – 160 с.
72. Хомченко А.Н. Развитие и применение вероятностного моделирования в дискретных методах вычислительной математики: Дисс. … докт. техн. наук. – Ивано-Франковск: ИФГТУНГ, 1991.
73. Хомченко А.Н. Непрерывный аналог блужданий броуновской частицы / А.Н.Хомченко, Л.И.Камаева. – Ивано-Франковск, 1989. – 9 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 04.04.89. № 990.
74. Хомченко А.Н. Численный анализ задачи Дирихле для уравнения Пуассона в областях сложной формы / А.Н.Хомченко, Л.И.Камаева. – Ивано-Франковск, 1989. – 8 с. – Деп. в УкрНИИНТИ 14.11.89. № 2596.
75. Хомченко А.Н. О вероятностном построении базисных функций МКЭ / А.Н.Хомченко. – Ивано-Франковск, 1982. – 7с. – Деп. в ВИНИТИ 21.10.82, № 5264.
76. Хомченко А.Н. К задаче определения продуктивности нефтяного месторождения / А.Н.Хомченко // 2-я Всесоюз. конф. "Вскрытие нефтегазовых пластов и освоение скважин". Тез. докл. – М., 1988. – С. 278-280.
77. Шабров Н.Н. Метод конечных элементов в расчетах деталей тепловых двигателей / Н.Н.Шабров. – Л.: Машиностроение, 1983. – 212 с.
78. Шуп Т. Решение инженерных задач на ЭВМ: Практическое руководство / Т.Шуп. – М.: Мир, 1982. – 238 с.
79. Jaswon M.A. An integral equation solution of the torsion problem / M.A.Jaswon, A.R.Ponter // ProcRoy.Soc. – London, 1963. – P. 246-273.
80. Metropolis N. The Monte Carlo Method / N.Metropolis, S.Ulam // JAmer. Stat. Assoc. – 1949.– V.44. – P. 335-341.
81. Muller M.E. Some continuons Monte Carlo methods for the Dirichlet problem / M.E.Muller // Ann. of Math. Statistic. – 1956. – V.27.N3
82. Poisson M. Memoire sur l'equilibre et movement des corple solides / M.Pois- son // Paris, Met.del'Acad. – r.8, 1829.

83. Wachspress E.X. A rational finite element basis / E.X.Wachspress. – New York, Academic Press, 1975.

Стаття надійшла до редакційної колегії 18.09.2013 р.
*Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Мойсишиним В.М.***
*д.ф.-м.н., доцентом **Королем І.І.** (м. Ужгород)*

APPROXIMATE METHODS OF SOLVING FOR BOUNDARY TASKS OF ELLIPTIC TYPE

V. M. Senychak[1], R. Y. Ripetsky[1], Y. Y. Ripetsky[1], V. V. Senychak[2], V. R. Ripetsky[3]
[1]Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas; 76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15; ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua
[2]PreCarpathian National University by V. Stefanic; 76000, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko str., 57
[3]National University "Lviv polytechnic"; Lviv

Annotation. This article provides a brief overview of the most common approximate methods that can be used for solving boundary tasks of elliptic type. Also, a simplified version of the finite element method -simplex method of rotation, is proposed.

***Key words**. Numerical modelling, elliptic equations, random walks, transitional probability, simplex method of rotation.*