Алгебра і геометрія

УДК 519.11
DOI: 10.31471/2304-7399-2022-17(64)-58-64

АЛГЕБРОЇДИ ТА КОМБІНАТОРНІ ІНТЕРПРЕТАЦІЇ

Р. А. Заторський, О. В. Махней, В. М. Пилипів
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; Україна, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57, 76018;
e-mail: roman.zatorskyi@pnu.edu.ua, oleksandr.makhnei@pnu.edu.ua, volodymyr.pylypiv@pnu.edu.ua

Розглядається побудова комбінаторно-алгебраїчної структури – множини алгебраїчних виразів, операнди яких належать деякій мультимножині M, а комутативні операції із заданим пріоритетом – деякій множині O.

Ключові слова: *алгеброїд, мультимножина, переплетення кортежів.*

Вступ

Сьогодні відомо чимало комбінаторних структур з багатьма інтерпретаціями. Значна їх частина допускає суттєві узагальнення. Так, неупорядковані розбиття натуральних чисел на натуральні доданки [1] можуть бути узагальнені до розбиттів цілих гаусових [2, 3] чи гіперкомплексних чисел. Поряд з цим неупорядковані розбиття натуральних чисел можуть інтерпретуватися як розклади степеня простого числа на множники, або як алгебраїчні вирази, побудовані при допомозі n операндів a та двох комутативних операцій із заданим пріоритетом їх виконання. Остання інтерпретація дозволяє суттєво узагальнити комбінаторну структуру множини всіх неупорядкованих розбиттів на натуральні доданки.

Робота присвячена вивченню таких комбінаторних структур.

1. Переплетення кортежів та алгеброїди.

Нехай задана мультимножина операндів

$$M = \{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \dots, a_m^{k_m}\},\ \ \sum_{i=1}^{m} k_i = n \tag{1}$$

разом із множиною $P(M)$ всіх перестановок її елементів та деяка множина бінарних комутативних операцій з наперед заданим пріоритетом

$$O = \{1,2,\dots,r\},\ \ 1 \le r \le n-1 \qquad (1)$$

разом з її декартовим степенем O^{n-1}. Нижче вважатимемо, що пріоритет операції збігається з її ідентифікатором.

Означення 1. *Переплетенням кортежів* $a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in P(M)$ і $b = (b_1, b_2, \dots, b_{n-1}) \in O^{n-1}$ назвемо кортеж

$$a \wr b = (a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}, a_n)$$

довжини $2n-1$, непарні місця якого заповнені елементами кортежу a, а парні – елементами кортежу b.

Приклад 1. Нехай

$$M = \{a^3, b^2\},\ \ O = \{1, 2, 3\},$$

тоді переплетеннями кортежів операндів

$$(a, b, a, b, a),\ \ (b, b, a, a, a),\ \ (a, b, a, b, a)$$

з відповідними кортежами операцій

$$(2, 1, 3, 2),\ \ (2, 1, 1, 2),\ \ (1, 1, 1, 1)$$

слугують кортежі

$$(a, 2, b, 1, a, 3, b, 2, a),\ \ (b, 2, b, 1, a, 1, a, 2, a),\ \ (a, 1, b, 1, a, 1, b, 1, a).$$

Якщо у мультимножині (1) задати лексикографічний порядок її елементів і $O = \{1, 2, \dots, r\}$, то кожне переплетення можна *нормалізувати*. Алгоритм нормалізації переплетення полягає у тому, що:

1. Поки переплетення містить різні операції, виконуємо: за операцією найнижчого пріоритету розбиваємо переплетення на переплетення меншої довжини та упорядковуємо їх за довжиною у незростаючому порядку.

2. Поки існують переплетення однакової довжини, виконуємо: за пріоритетом операцій упорядковуємо їх у лексикографічному порядку.

3. Операнди кожного переплетення з однаковими операціями записуємо у лексикографічному порядку.

Приклад 2. Нормалізуємо переплетення

$$a4b1c5b3b2d5a2a5d1c5b5d2b2a3c5c2d.$$

1. Розбиваємо переплетення дужками за його операцією найнижчого пріоритету:

$$(a4b1c)5(b3b2d)5(a2a)5(d1c)5(b)5(d2b2a3c)5(c2d).$$

2. Упорядковуємо дужки отриманого розбиття, розміщуючи їх зліва
направо у незростаючому за кількістю операцій порядку:

$$(d2b2a3c)5(a4b1c)5(b3b2d)5(a2a)5(d1c)5(\mathrm{c2d})5(b).$$

3. Упорядковуємо дужки з однаковою кількістю операцій у лексикографічному порядку за пріоритетом операцій:

$$\big((a2b2d)3(c)\big)5\big((b1c)4(a)\big)5\big((b2d)3(b)\big)5(c1d)5(a2a)5(\mathrm{c2d})5(b).$$

Отже, маємо:

$$a2b2d3c5b1c4a5b2d3b5c1d5a2a5c2d5b.$$

Важливими, з точки зору числа інтерпретацій, є переплетення, у яких присутні лише дві комутативні операції.

Наприклад, переплетення

$$a + b \cdot b \cdot a \cdot c + e \cdot d \cdot b \cdot c \cdot b + e \cdot a + d \cdot a$$

кортежу операндів

$$(a, b, b, a, c, e, d, b, c, b, e, a, d, a)$$

мультимножини

$$M = \{a^4, b^4, c^2, d^2\}$$

і кортежу операцій

$$(+,\cdot,\cdot,\cdot,+,\cdot,\cdot,\cdot,\cdot,+,\cdot,+,\cdot) \in O^{13}$$

можна нормалізувати до вигляду

$$b \cdot b \cdot c \cdot d \cdot e + a \cdot b \cdot b \cdot c + a \cdot d + a \cdot e + a. \qquad (2)$$

Кожному нормалізованому переплетенню з множиною двох операцій можна поставити у взаємно однозначну відповідність деяку, взагалі кажучи, нестандартну таблицю Юнга (Young A.), кожна клітинка якої містить лише один операнд.

Для встановлення такої відповідності необхідно кожному фрагменту нормалізованого переплетення, що побудований при допомозі лише операції добутку, поставити у відповідність стовпець клітинок діаграми Юнга [4].

Наприклад, нормалізованому переплетенню (3) відповідає нестандартна таблиця Юнга

e				
d	c			
c	b			
b	b	d	e	
b	a	a	a	a

Означення 2. *Алгеброїдом*, побудованим на базі мультимножини операндів (1) та множини операцій (2), назвемо множину $A_O(M)$ всіх можливих нормалізованих переплетень, які можна побудувати на цій базі операндів та операцій.

Приклад 3. Нехай

$$M = \{a^2, b^2\}, \;\; O = \{\cdot, +\},$$

тоді алгеброїд $A_O(M)$ містить 9 різних переплетень:

1. $a + a + b + b = 2a + 2b$
2. $b \cdot b + a + a = b^2 + 2a$
3. $a \cdot b + a + b = ab + a + b$
4. $a \cdot a + b + b = a^2 + 2b$
5. $a \cdot b \cdot b + a = ab^2 + a$
6. $a \cdot a + b \cdot b = a^2 b^2$
7. $a \cdot a \cdot b + b = a^2 b + b$
8. $a \cdot b + a \cdot b = 2ab$
9. $a \cdot a \cdot b \cdot b = a^2 b^2$

Зобразимо таблиці Юнга, відповідні нормалізованим переплетенням цього алгеброїда:

$$1.\ \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline a&a&b&b\\\hline\end{array}\quad 2.\ \begin{array}{|c|c|c|}\cline{1-1} b\\\hline b&a&a\\\hline\end{array}\quad 3.\ \begin{array}{|c|c|c|}\cline{1-1} b\\\hline a&a&b\\\hline\end{array}\quad 4.\ \begin{array}{|c|c|c|}\cline{1-1} a\\\hline a&b&b\\\hline\end{array}$$

$$5.\ \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} b\\\cline{1-1} b\\\hline a&a\\\hline\end{array}\quad 6.\ \begin{array}{|c|c|}\hline a&b\\\hline a&b\\\hline\end{array}\quad 7.\ \begin{array}{|c|c|}\cline{1-1} b\\\cline{1-1} a\\\hline a&b\\\hline\end{array}\quad 8.\ \begin{array}{|c|c|}\hline b&b\\\hline a&a\\\hline\end{array}\quad 9.\ \begin{array}{|c|}\hline b\\\hline b\\\hline a\\\hline a\\\hline\end{array}$$

Означення 3. Алгеброїд, у якому кожному переплетенню відповідає стандартна таблиця Юнга, назвемо *стандартним*.

Має місце наступне очевидне твердження

Твердження 1. Алгеброїди $A_{\{\cdot,+\}}(\{a^n\})$ і $A_{\{\cdot,+\}}(\{a^{n-1}, b\})$ – стандартні.

Зауважимо, що алгеброїди, побудовані на базі множини двох операцій, мають і інші інтерпретації.

У 2011 році Райнхард Цумкеллер (Reinhard Zumkeller) вивчав кількість різних розкладів на множники числа $p^m \cdot q^n$, де p і q – деякі різні прості числа. Не важко помітити, що ця кількість збігається з потужністю алгеброїда $A_{\{\cdot,+\}}(\{a^m, b^n\})$. Проілюструємо цю бієкцію на прикладі числа $12 = 2^2 \cdot 3^1$:

$$12 \leftrightarrow 2 \cdot 2 \cdot 3,$$
$$2 \cdot 6 \leftrightarrow 2 \cdot 3 + 2,$$
$$3 \cdot 4 \leftrightarrow 2 \cdot 2 + 3,$$
$$2 \cdot 2 \cdot 3 \leftrightarrow 2 + 2 + 3.$$

Також варто зауважити, що така інтерпретація може бути поширена і на натуральні числа вигляду

$$p_1^{k_1} \cdot p_2^{k_2} \cdot \ldots \cdot p_m^{k_m},\ \ k_1 + k_2 + \cdots + k_m = n,$$

де p_i, $i = 1,2, \dots, m$ – різні прості числа. Тобто існує бієкція між елементами алгеброїда

$$A_{\{\cdot,+\}}(\{p_1^{k_1}, p_2^{k_2}, \dots, p_m^{k_m}\}),$$

де $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$, та елементами множини розкладів на множники цього натурального числа.

Ще однією інтерпретацією алгеброїдів $A_{\{\cdot,+\}}(\{a^m, b^n\})$ може слугувати множина всіх розбиттів цілих гаусових чисел на невід'ємні компоненти. Її вивчали у 60-х роках минулого сторіччя Чима (Cheema M. S.) [2] та Гупта (Gupta H.) [3] (див. також [5]). Зауважимо, що цю інтерпретацію алгеброїдів також можна поширити на розбиття цілих гіперкомплексних чисел. Наприклад, одним із розбиттів гіперкомплексного числа $2 + i + 3j$ може слугувати сума

$$(0 + i + 2j) + (1 + 0i + j) + (1 + 0i + 0j).$$

Однак, автори не знаходили інтерпретацій алгеброїдів, що будуються на множині трьох і більше комутативних операцій. Взагалі, дослідження алгеброїдів на множині трьох і більше комутативних операцій є відкритою задачею.

2. Потужності алгеброїдів.

Задача побудови алгеброїдів є далеко не тривіальною. Не тривіальними є і задачі обчислення їхніх потужностей. Очевидно, що потужність алгеброїда не залежить від змісту операцій множини O та ідентифікаторів операндів, а залежить лишень від їх кількостей. Тому потужність алгеброїда

$$A_{\{1,2,\dots,r\}}(\{a_1^{k_1}, a_2^{k_2}, \dots, a_m^{k_m}\})$$

можна позначити через

$$a_r(k_1, k_2, \dots, k_m).$$

Вище, наприклад, було встановлено, що

$$a_2(2,2) = 9.$$

Очевидно, що

$$a_1(n) = 1.$$

Твердження 2.

$$a_2(n) = p(n),$$

де $p(n)$ – кількість неупорядкованих розбиттів натурального числа n на натуральні доданки.

Доведення цього твердження безпосередньо випливає з очевидної бієкції між переплетеннями цього алгеброїда та неупорядкованими розбиттями натурального числа n.

Твердження 3.

$$a_2(n,1) = \sum_{i=0}^{n} p(i),$$

де $p(i)$ – кількість неупорядкованих розбиттів натурального числа i на натуральні доданки, причому $p(0) = 1$.

Доведення. Для доведення цього твердження достатньо довести виконання рекурсії

$$a_2(q,1) = a_2(q-1,1) + p(q).$$

Маючи всі переплетення алгеброїда $a_2(q-1,1)$, можна побудувати стільки ж переплетень алгеброїда $a_2(q,1)$, домножуючи у кожному з них останній операнд b на операнд a. Решту переплетень можна отримати при допомозі алгеброїда $a_2(q)$, додаючи до останнього операнда кожного з його переплетень операнд b. Твердження доведено.

Зауважимо, що послідовність

$$a_2(n,1)_{n=0,1,2,\dots} = 1, 2, 4, 7, 12, 19, 30, 45, 67, 97, 139, 195, 272, 373, \dots$$

у Онлайн-енциклопедії цілочисельних послідовностей має код A000070. Там процитовано ряд цікавих інтерпретацій цієї числової послідовності. Зокрема Перрі (Perry J.) у 2004 році пов'язав члени цієї числової послідовності з числом спеціальних переходів від діаграм Юнга розбиттів натурального числа n до відповідних діаграм Юнга розбиттів числа $(n+1)$.

Зауважимо також, що числа

$$a_r(k_1, k_2, \dots, k_m)$$

зовсім не вивчені.

Література

1. Эндрюс Г. Теория разбиений / Г. Эндрюс. – М.: Наука, 1982. – 256 с.
2. Cheema M. S. Tables of partitions of Gaussian integers / M. S. Cheema and H. Gupta // National Institute of Sciences of India, Mathematical Tables. – 1956. – Vol. 1. – 67 p.
3. Gupta H. Tables of Partitions / H. Gupta // Royal Society Mathematical Tables. – 1958. – Vol. 4. – P. 90.
4. Young A. On quantitative substitutional analysis / A. Young // Proceedings of the London Mathematical Society. – 1934. – Vol. s2-36, Issue 1. – P. 304–368.
1. 5. Knuth D. E. The Art of Computer Programming. Vol. 4A / D. E. Knuth. – Boston: Pearson Education Inc., 2011. – 920 p.

Стаття надійшла до редакційної колегії 27.05.2022 р.

ALGEBROIDS AND COMBINATORIAL INTERPRETATIONS

R. A. Zatorskyi, O. V. Makhnei, V. M. Pylypiv
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
Ukraine, Ivano-Frankivsk, Shevchenka str., 57, 76018;
e-mail: roman.zatorskyi@pnu.edu.ua, oleksandr.makhnei@pnu.edu.ua, volodymyr.pylypiv@pnu.edu.ua

The construction of a combinatorial-algebraic structure is considered. This structure is a set of algebraic expressions. The operands of these expressions belong to some multiset M and commutative operations with a given priority belong to some set O.

Keywords: *algebroid, multiset, intertwining of tuples.*