

УДК 621.95.01

DOI: 10.31471/2304-7399-2022-17(64)-133-141

## СТІЙКІСТЬ МАХОВИЧНОГО ДВИГУНА В КАРДАНОВОМУ ПІДВІСІ

**І. В. Цідило, К. І. Цідило**

*Відокремлений структурний підрозділ "Буриштинський енергетичний фаховий коледж Івано-Франківського національного технічного університету нафти і газу*

*Пропонується математична модель маховичного двигуна в кардановому підвісі, а також дослідження стійкості його руху. Розглядається механічна система з екологічно чистим джерелом енергії у виді маховика в кардановому підвісі, встановленого на вібраційній основі. Така модель механічних систем займає в деякому сенсі проміжне місце між гіроскопом і маховиком, що обертається в жорстко закріплених опорах.*

*У даний час маємо великий досвід дослідження стійкості і коливань нелінійних систем, описаних нелінійними диференціальними рівняннями. Однак використання математичної теорії стійкості до конкретних задач продовжує залишатися актуальною задачею.*

*Задача про стійкість запропонованої механічної системи розглядається з допомогою другого методу Ляпунова, що застосовується до визначено-додатних функцій, які характеризують повільну еволюцію процесу. Складено рівняння руху і досліджено вплив нелінійних членів у рівняннях руху на стійкість.*

*Досліджено стійкість механічної системи при початкових збуреннях та зроблено висновки щодо поведінки її руху.*

**Ключові слова:** *маховичний двигун, кардановий підвіс, гібридний двигун, вібростійкість, стійкість, еволюція процесу, амортизатор, коефіцієнт демпфування, нутація, прецесія, осцилятори, дисипативні члени, фазовий простір.*

### 1. Вступ

Запропоноване дослідження присвячене механічним системам з екологічно чистими джерелами енергії. До такого виду механічних систем відноситься маховичний двигун – прилад, який має високу питому потужність, виділяє енергію безпосередньо у вигляді механічного обертання, швидко заряджається і надійний в роботі. Такі двигуни широко застосовуються в техніці, в тому числі і на транспортних засобах, які працюють у вибухонебезпечних кар'єрах, шахтах, нафтогазових промислах тощо.

Ведуться розробки транспортних засобів з гібридним двигуном (двигун внутрішнього згоряння – маховик). Застосуванню таких двигу-

нів в різних областях машинобудування присвячені роботи Н. В. Гулія [2], Г. Ю. Дзюби [4], М. А. Павловського, А. В. Збруцького [3] та ін.

Актуальним є оцінка їх придатності. Питання вібростійкості при дослідженні динамічних властивостей таких роторних віброуючих гіроскопів є одним із основних.

**Мета дослідження.** Метою роботи є створення математичної моделі для теоретичного дослідження стійкості механічних систем маховичного двигуна встановленого на амортизаторах.

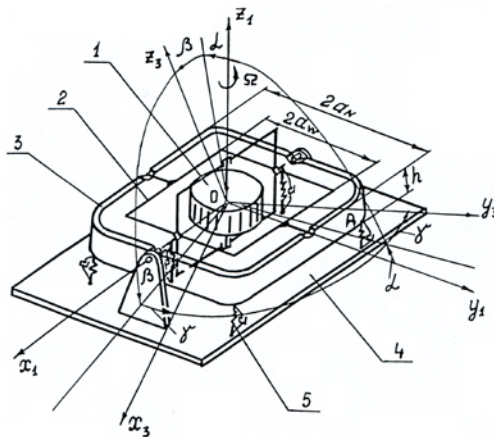
## 2. Опис досліджуваної механічної системи та рівняння її руху

Досліджується стійкість механічної системи показаної на рис. 1, яка являє собою швидкообертальний маховик у кардановому підвісі на віброуючій основі.

Задача про стійкість розглядається з допомогою другого методу Ляпунова, що застосовується до визначено-додатних функцій, характеризуючи повільну еволюцію процесу. Складемо рівняння руху і дослідимо вплив нелінійних членів в рівняннях руху на стійкість.

Введені такі системи координат:  $Ox_1z_1$  – жорстко зв’язану з основою;  $Ox_iy_iz_i$  – жорстко зв’язані при  $i = 1$  із зовнішньою рамкою (корпусом); при  $i = 2$  із внутрішньою рамкою, інерцію якої нехтуємо; при  $i = 3$  із маховиком. Осі координат є головними центральними осями. Під час руху взаємне розміщення осей визначається трьома кардановими кутами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Рух основи задається кутовою швидкістю  $\omega_x$ . Кінетичну енергію запишемо у вигляді

$$2T = I_{x_1} \omega_{x_1}^2 + I_{x_3} \omega_{x_3}^2 + I_{y_3} \omega_{y_3}^2 + I_{z_3} \omega_{z_3}^2. \quad (1)$$



1 – маховик; 2 – внутрішня рамка; 3 – зовнішня рамка; 4 – віброуюча основа; 5 – пружний елемент (амортизатор).

Рис. 1. Схема розміщення маховика в кардановому підвісі на віброуючій основі

Надалі моменти інерції маховика  $I_{x_3}$ ,  $I_{y_3}$ ,  $I_{z_3}$  прийнемо рівними  $I_{x_3} = I_{y_3} = I_{z_3} = I$ . Проекції кутових швидкостей на рухомі осі виражені через карданові кути і їх похідні наступним чином:

$$\begin{aligned}\omega_{x_1} &= \omega_x + \dot{\alpha}; \\ \omega_{x_3} &= \omega_x \cos \beta \cos \gamma + \dot{\alpha} \cos \beta \cos \gamma + \dot{\beta} \sin \gamma; \\ \omega_{y_3} &= -\omega_x \cos \beta \sin \gamma - \dot{\alpha} \cos \beta \sin \gamma + \dot{\beta} \cos \gamma; \\ \omega_{z_3} &= \omega_x \sin \beta + \dot{\alpha} \sin \beta + \dot{\gamma}.\end{aligned}\quad (2)$$

Кінетичну енергію системи, враховуючи (2) представимо у вигляді

$$\begin{aligned}2T &= I_{x_1} (\dot{\alpha} + \omega_x)^2 + I_{z_3} (\dot{\alpha}^2 \cos^2 \beta + 2\dot{\alpha}\omega_x \cos^2 \beta + \\ &+ \omega_x^2 \cos^2 \beta + \dot{\beta}^2) + I (\dot{\alpha}^2 \sin^2 \beta + 2\dot{\alpha}\omega_x \sin^2 \beta + \\ &+ 2\dot{\alpha}\dot{\gamma} \sin \beta + \omega_x^2 \sin^2 \beta + 2\omega_x \dot{\gamma} \sin \beta + \dot{\gamma}^2).\end{aligned}\quad (3)$$

Розглянемо елементи амортизаторів, які умовно подано пружинками. Зауважимо, що переміщення точки кріплення в напрямку перпендикулярному осі елемента не впливає на величину його реакції [5]. При повороті на кут  $\alpha$  переміщення точки кріплення зовнішнього амортизатора до корпусу в проекції на вісь  $Oz$  буде дорівнювати

$$S_{N_z} = h \left[ \frac{\sin(\alpha_c + \alpha)}{\sin \alpha_c} - 1 \right], \quad (4)$$

де  $\alpha_c = \arctg\left(\frac{h}{a_N}\right)$ ;  $h$ ,  $a_N$  – координати точки кріплення А амортизатора.

Переміщення точки кріплення внутрішнього амортизатора до внутрішньої рамки в проекції на вісь  $Oz$  при повороті на кут  $\beta$  дорівнює

$$S_{W_z} = a_W \sin \beta. \quad (5)$$

Потенціальна енергія пружної деформації елементів запишеться так:

$$\Pi = 2c_N h^2 \left[ \frac{\sin(\alpha_c + \alpha)}{\sin \alpha_c} - 1 \right]^2 + c_W a_W^2 \sin^2 \beta, \quad (6)$$

де  $c_N$ ,  $c_W$  – жорсткості відповідно зовнішнього і внутрішнього елементів.

Обмежимося функцією Релея, що враховує деформацію пружних елементів

$$\Phi = 2 \frac{b_N h^2}{\sin^2 \alpha_c} \dot{\alpha}^2 \cos^2(\alpha_c + \alpha) + b_W a_W^2 \dot{\beta}^2 \cos^2 \beta, \quad (7)$$

де  $b_N$ ,  $b_W$  – коефіцієнти демпфування відповідно зовнішнього і внутрішнього елементів.

Нехай момент сил відносно осі обертання маховика такий, що маховик обертається відносно своєї осі з постійною швидкістю. Складемо рівняння Лагранжа другого роду, використовуючи (1), (2), (3), (4), (5), (6), (7) і враховуючи, що  $\dot{\gamma} = \Omega$

$$\begin{aligned} & (I \sin^2 \beta + I_3 \cos^2 \beta + I_{x_1}) \ddot{\alpha} + (I - I_3) \dot{\alpha} \dot{\beta} \sin 2\beta + \\ & + I\Omega \dot{\beta} \cos \beta + I_{x_1} \dot{\omega}_x + I_3 \dot{\omega}_x \cos^2 \beta + (I - I_3) \dot{\beta} \omega_x \times \\ & \times \sin 2\beta + I \dot{\omega}_x \sin^2 \beta = -\frac{4c_N h^2}{\sin \alpha_c} \left[ \frac{\sin(\alpha_c + \alpha)}{\sin \alpha_c} - 1 \right] \times \\ & \times \cos(\alpha_c + \alpha) - \frac{4b_N h^2}{\sin^2 \alpha_c} \dot{\alpha} \cos^2(\alpha_c + \alpha); \\ & I_3 \ddot{\beta} - \frac{I - I_3}{2} \dot{\alpha}^2 \sin 2\beta - (I - I_3) \dot{\alpha} \omega_x \sin 2\beta - \\ & - \frac{I - I_3}{2} \omega_x^2 \sin 2\beta - I \omega_x \Omega \cos \beta - I \dot{\alpha} \Omega \cos \beta = \\ & = -c_W a_W^2 \sin 2\beta - 2b_W a_W^2 \dot{\beta} \cos^2 \beta. \end{aligned} \quad (8)$$

Розклавши тригонометричні функції в системі (8) в степеневий ряд в околі нуля і обмежимося кубічними членами. Запишемо систему у формі Коші вводячи позначення

$$x_1 = \alpha; \quad x_2 = \dot{\alpha}; \quad x_3 = \beta; \quad x_4 = \dot{\beta}.$$

$$\dot{x}_1 = x_2;$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 = & -\frac{4c_N a_N^2}{I_3 + I_{x_1}} x_1 - \frac{4b_N a_N^2}{I_3 + I_{x_1}} x_2 - \frac{I\Omega}{I_3 + I_{x_1}} x_4 + \frac{6c_N h^2 \operatorname{ctg} \alpha_c}{I_3 + I_{x_1}} x_1^2 + \\ & + \frac{8b_N h^2 \operatorname{ctg} \alpha_c}{I_3 + I_{x_1}} x_1 x_2 + \frac{2c_N h^2}{3(I_3 + I_{x_1})} (4 \operatorname{ctg}^2 \alpha_c - 3) x_1^3 + \\ & + \frac{4b_N a_N^2}{I_3 + I_{x_1}} x^2 x_2 + \frac{4b_N h^2}{I_3 + I_{x_1}} \left( \frac{I - I_3}{I_3 + I_{x_1}} \operatorname{ctg}^2 \alpha_c + 1 \right) x_2 x_3 + \\ & + \frac{4c_N a_N^2 (I - I_3)}{(I_3 + I_{x_1})^2} x_1 x_3^2 + \frac{I\Omega}{I_3 + I_{x_1}} \left( \frac{1}{2} + \frac{I - I_3}{I_3 + I_{x_1}} \right) x_3^2 x_4 - \\ & - 2 \frac{I - I_3}{I_3 + I_{x_1}} x_2 x_3 x_4 - \dot{\omega}_x - \frac{2(I - I_3)}{I_3 + I_{x_1}} \omega_x x_3 x_4; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\dot{x}_3 = x_4;$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 = & \frac{-2c_w a^2}{I_3} x_3 - \frac{2b_w a_w^2}{I_3} x_4 + \frac{I\Omega}{I_3} x_2 + \frac{4c_w a_w^2}{3I_3} x_3^3 + \\ & + \frac{2b_w a_w^2}{I_3} x_3^2 x_4 - \frac{I\Omega}{2I_3} x_2 x_3^2 + \frac{I-I_3}{I_3} x_2^2 x_3 + \frac{I\Omega}{I_3} \omega_x + \\ & + \frac{I-I_3}{I_3} \omega_x^2 x_3 + \frac{2(I-I_3)}{I_3} \omega_x x_2 x_3 - \frac{I\Omega}{2I_3} \omega_x x_3^2. \end{aligned}$$

В подальшому параметри системи (9) можна рахувати безрозмірними, якщо ввести безрозмірні (з ризикою зверху) величини, наприклад, таким чином [6]

$$\begin{aligned} \bar{b}_N = \frac{b_N a_N^2}{(\Omega I)}; \quad \bar{b}_W = \frac{b_W a_N^2}{(\Omega I)}; \quad \bar{c}_N = \frac{c_N a_N^2}{(I\Omega^2)}; \quad \bar{c}_W = \frac{c_W a_N^2}{(I\Omega^2)}; \quad \bar{I}_3 = \frac{I_3}{I}; \quad \bar{I}_{x_1} = \frac{I_{x_1}}{I}; \\ \bar{a}_W = \frac{a_W}{a_N}; \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\Omega}; \quad \bar{a}_N = \frac{a_N}{a_N}; \quad \bar{I} = \frac{I}{I}. \end{aligned}$$

Систему (9) можна записати в загальному вигляді так:

$$\dot{x}^\sigma = a_\kappa^\sigma x^\kappa + X^\sigma(t, x), \quad \kappa, \sigma = 1, \dots, 4. \quad (10)$$

### 3. Аналіз руху на основі рівнянь руху

Проаналізуємо зміну частот системи (9) або (10) залежно від параметрів. Коливання маховика в амортизаторах є сильно взаємозв'язаними, про що свідчать складові в системі (8)  $I\Omega\dot{\beta}\cos\beta$ ,  $I\Omega\dot{\alpha}\cos\beta$ . Цей зв'язок посилюється із збільшенням кутової швидкості  $\Omega$  і конструктивно пояснюється тим, що осі зовнішньої і внутрішньої рамок лежать в одній площині.

Виділяючи із системи (9) рівняння лінійного наближення бачимо, що маємо два сильно зв'язаних осцилятори, на які діє збурення віброуючої основи. Щоб проаналізувати залежність частот від параметрів  $\Omega$ ,  $c_N$ ,  $c_W$  прийmemo  $c_N = c_W = c$ . Виключимо із рівнянь дисипативні члени, тоді частоти визначаються як корені бікватратного рівняння

$$\lambda^4 + \lambda^2 (a_1^2 + a_3^4 + a_4^2 a_2^4) + a_1^2 a_3^4 = 0, \quad (11)$$

де всі  $a_\kappa^i$  додатні.

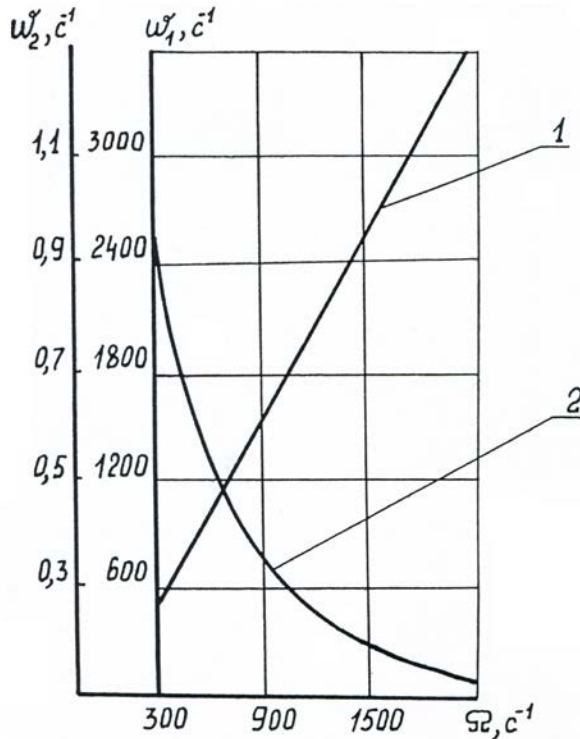
Із рівнянь (11) і системи (9) видно, що необертаючий маховик ( $\Omega=0$ ) має дві низькі частоти. Із збільшенням  $\Omega$  коефіцієнти  $a_4^2$ ,  $a_2^4$  в (11) збільшуються; одна частота із збільшенням  $\Omega$  зростає, а друга зменшується. Можна вважати, беручи до уваги теорію К. Магнуса [8], швидкі коливання з частотою  $\omega_1$  – нутацією, повільні з частотою  $\omega_2$  – прецесією. Для реального об'єкту частоти утворені жорсткістю амортизаторів, нижче частоти нутації. На рис. 2 побудовано графік поведінки

частот  $\omega_1$  і  $\omega_2$  із збільшенням кутової швидкості  $\Omega$  при наступних значеннях решти параметрів:

$$I = 450 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad I_s = 225 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad I_{x_1} = 50 \text{ кг} \cdot \text{м}^2;$$

$$a_N = a_W = 0,5 \text{ м}; \quad h = 0,2 \text{ м}; \quad c_N = c_W = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/м};$$

$$b_N = b_W = 50 \text{ кг/с}; \quad \omega_{xa} = 0,001 \text{ с}^{-1}.$$



крива 1 характеризує ріст частоти нутації  $\omega_1$ ; крива 2 характеризує зменшення частоти прецесії  $\omega_2$  залежно від збільшення кутової швидкості  $\Omega$  ротора.

Рис. 2. Залежність частот від кутової швидкості робота  $\Omega$

Із виразу (11) видно, що із збільшенням жорсткості амортизаторів нутація слабо росте, так при встановленні маховика в кардановому підвісі без амортизаторів частота нутації зменшується на малу величину.

#### 4. Стійкість маховика при початкових збуреннях

Збурений рух описується рівнянням

$$\dot{x}^\sigma = a_\kappa^\sigma x^\kappa + X^\sigma(x), \quad \sigma, \kappa = 1, \dots, 2n; \quad (12)$$

де  $X^\sigma = G_{kj}^\sigma x^k x^j x^p$ ,  $\sigma, \kappa, j, p = 1, \dots, 4$ ;

$G_{kj}^\sigma$  – визначено у рівняннях руху (9).

У змінних  $\rho$ ,  $\theta$  рівняння збуреного руху мають вигляд:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}^j &= \operatorname{Re}\lambda_j \rho^j + m_\sigma^j(\theta_j) X^\sigma(\rho, \theta); \\ \dot{\theta}^j &= \operatorname{Im}\lambda_j + \frac{K_\sigma^j(\theta_j) X^\sigma(\rho, \theta)}{\rho^j}, \quad j=1, 2; \quad \sigma=1, \dots, 4, \end{aligned} \quad (13)$$

де  $m_\sigma^j$ ,  $K_\sigma^j$  приймають значення:  $m_\sigma^j = \operatorname{Re}\beta_\sigma^j \cos \theta_j + \operatorname{Im}\beta_\sigma^j \sin \theta_j$ ;  $K_\sigma^j = \operatorname{Im}\beta_\sigma^j \cos \theta_j - \operatorname{Re}\beta_\sigma^j \sin \theta_j$ .

Оскільки в даній системі є слабка дисипація, то враховуючи ідею методу усереднення Н. Н. Боголюбова і Ю. А. Митропольського [1], можна розкласти змінні в системі (13) і записати еволюційне рівняння у вигляді

$$\dot{\tilde{\rho}}^i = \tilde{R}^i(\tilde{\rho}), \quad i=1, 2, \quad (14)$$

$$\text{де } \tilde{R}^i = \operatorname{Re}(\lambda_i) \tilde{\rho}^i + \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} m_\sigma^i(\theta_i) X^\sigma(\rho, \theta) d\theta_1 \dots d\theta_n.$$

Для побудови області стійкості у фазовому просторі достатньо скористуватися критеріями стійкості для векторної функції А. А. Мартинюка і Н. В. Нікітіної [7], представленого у вигляді нерівностей

$$\tilde{R}(\tilde{\rho}) < 0. \quad (15)$$

Область стійкості у просторі повільних змінних має вигляд еліпса

$$\frac{\rho^1 \rho^1}{-\operatorname{Re}\lambda^1/T_{111}^1} + \frac{\rho^2 \rho^2}{-\operatorname{Re}\lambda^1/T_{221}^1} \leq 1, \quad (16)$$

який у фазовому просторі  $R^4$  має вигляд гіпереліпсоїда

$$x^T C_x^1 \leq 1, \quad (17)$$

$$\text{де } C_{ik}^1 = -\frac{A_{ik}^{11}}{(\operatorname{Re}\lambda^1/T_{111}^1)} - \frac{A_{ik}^{22}}{(\operatorname{Re}\lambda^1/T_{221}^1)};$$

$$A_{ik}^{aa} = \operatorname{Re}\beta_i^a \operatorname{Re}\beta_\kappa^a + \operatorname{Im}\beta_i^a \operatorname{Im}\beta_\kappa^a, \quad i, \kappa = 1, \dots, 4.$$

На основі числового аналізу можна зробити висновок, що для кутів  $\alpha$ ,  $\beta$  та їх швидкостей  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  отримаємо порівняно великі величини. Значення величин  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $\dot{\beta}$  за областю стійкості (17) може визвати нестійкий рух.

### Висновки

1. Приведено математичний опис руху маховика в амортизованому кардановому підвісі на віброуючій основі.

2. Складені еволюційні рівняння в формулах, які дозволяють стандартизувати визначення коефіцієнтів рівнянь з допомогою комп'ютерної техніки.

3. За допомогою еволюційних рівнянь, змінні яких є визначено – додатними функціями, досліджується стійкість нелінійних коливань механічної системи.

4. Нелінійні члени руху асимптотично стійкої системи вносять відповідні зміни в фазову картину, але для інженерних розрахунків вплив нелінійних членів несуттєвий.

5. Коливання маховика в амортизованому підвісі є взаємозв'язаними. Зі зростанням  $\Omega$  цей зв'язок зростає. Для реального об'єкту частоти викликані жорсткістю амортизаторів нижчі частоти нутації. Зі зростанням жорсткості амортизаторів нутація слабо зростає.

### *Література*

1. Боголюбов И. Н., Митропольский Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Москва: Физматгиз, 1958. 408 с.
2. Гулия Н. В. Маховичные двигатели. Москва: Машиностроение, 1986. 170 с.
3. Павловский М. А. Збруцкий А. В. Динамика роторных вибрационных гироскопов. Киев: Вища школа. 1984. 191 с.
4. Хрисанов М. И., Дзюба Г. Ю. К вопросу исследования гироскопических явлений и некоторых параметров колебаний карьерных автомобилей с инерционным аккумулятором // Автомобильный транспорт. Киев. Техника, 1983. № 20. С.116–122.
5. Коловский М. З. Нелинейная теория виброзащитных систем. Москва: Наука, 1966. 318 с.
6. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Москва: Наука, 1977. 436 с.
7. Мартынюк А. А., Никитина Н. В. Об устойчивости в одном случае, близком к критическому // Прикл. механика. 1985. 31, № 2. с. 104–110.
8. Магнус К. Гироскоп. Теория и применения. Москва: Мир, 1974. 526 с.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 04.10.2022 р.*

## **STABILITY OF THE FLYWHEEL ENGINE IN A CARDAN SUSPENSION**

**I. V. Tsidylo, K. I. Tsidylo**

*Subdivision "Burshtyn Professional College of Power Engineering  
of Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas"*

*A mathematical model of a flywheel engine in a cardan suspension and also its motion stability research is offered. A mechanical system with an ecologically clean energy source in the form of a flywheel in a gimbal mounted on a vibrating base is under consideration. Such a model of mechanical systems occupies, in some sense, an intermediate place between a gyroscope and a flywheel that rotates in rigidly fixed supports.*

*Currently, we have extensive experience in researching the stability and oscillations of nonlinear systems described by nonlinear differential*



*equations. However, the use of the mathematical theory of stability for specific problems continues to be a relevant task.*

*The problem of stability of the proposed mechanical system is considered using the second Lyapunov method, which is applied to definitely positive functions characterizing the slow evolution of the process.*

*The equations of motion were formulated and the influence of nonlinear terms in the equations of motion on stability was investigated.*

*The study of the stability of the mechanical system under initial disturbances is presented, as well as the conclusions of the system movement behavior are made.*

**Key words:** *flywheel engine, cardan suspension, hybrid engine, vibration resistance, stability, process evolution, shock absorber, damping coefficient, nutation, precession, oscillators, dissipative terms, phase space.*