УДК 517.98

ПЕРІОДИЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКОЇ СИСТЕМИ ДЕКІЛЬКОХ НЕЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПАРНОГО ПОРЯДКУ

А. М. Краснодембський

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

У статті встановлено умови збіжності послідовностей, що визначають розв'язки з періодичними компонентами деякої системи декількох нелінійних диференціальних рівнянь парного порядку.

Ключові слова: *система декількох нелінійних диференціальних рівнянь парного порядку, умови збіжності, періодичність розв'язків.*

Раніше отримані результати ([3]) для системи двох нелінійних диференціальних другого порядку узагальнені для системи декількох нелінійних диференціальних рівнянь парного порядку.

Задана система диференціальних рівнянь

$$Y_i^{(2k)} = f_i\left(x, y_1, y_1', \ldots y_1^{(2k-1)}; \ldots; y_n, y_n', \ldots, y_n^{(2k-1)}\right) \quad (i = 1,2\ldots,n), \tag{1}$$

в якій неперервні функції $f_i\left(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots u_{2k-1}^{(1)}; \ldots; u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, \ldots, u_{2k-1}^{n}\right)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ задовольняють умови:

1. $f_i\left(x+T, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_{2k-1}^{(1)}; \ldots; u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, \ldots, u_{2k-1}^{(n)}\right) \equiv$
$\equiv f_i\left(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_{2k-1}^{(1)}; \ldots; u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, \ldots, u_{2k-1}^{(n)}\right);$
2. $f_i\left(\alpha - x, -u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, -u_2^{(1)} \ldots, u_{2k-1}^{(1)}; \ldots; -u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, -u_2^{(1)} \ldots, u_{2k-1}^{(n)}\right) \equiv$
$\equiv -f_i\left(x, u_0^{(1)}, u_1^{(1)}, \ldots, u_{2k-1}^{(1)}; \ldots; u_0^{(n)}, u_1^{(n)}, \ldots, u_{2k-1}^{(n)}\right);$
3. $\left| f_i\left(x, u_{02}^{(1)}, u_{12}^{(1)}, \ldots, u_{2k-1,2}^{(1)}; \ldots; u_{02}^{(n)}, u_{12}^{(n)}, \ldots, u_{2k-1,2}^{(n)}\right) - \right.$
$\left. - f_i\left(x, u_{01}^{(1)}, u_{11}^{(1)}, \ldots, u_{2k-1,1}^{(1)}; \ldots; u_{01}^{(n)}, u_{11}^{(n)}, \ldots, u_{2k-1,1}^{(n)}\right) \right| \le$
$\le K_0^{(1)}\left|u_{02}^{(1)} - u_{01}^{(1)}\right| + K_1^{(1)}\left|u_{12}^{(1)} - u_{11}^{(1)}\right| + \ldots + K_{2k-1}^{(1)}\left|u_{2k-1,2}^{(1)} - u_{2k-1,1}^{(1)}\right| +$
$+ \ldots + K_0^{(n)}\left|u_{02}^{(n)} - u_{01}^{(n)}\right| + K_1^{(n)}\left|u_{12}^{(n)} - u_{11}^{(n)}\right| + \ldots + K_{2k-1}^{(n)}\left|u_{2k-1,2}^{(n)} - u_{2k-1,1}^{(n)}\right|.$

Згідно з попереднім $([1],[2])$ диференціальне рівняння

$$y^{(n)} = \varphi(x),$$

де $\varphi(x) \in C;\ \varphi(x+T) \equiv \varphi(x);\ \int_0^T \varphi(x)dx = 0$ має неперервний, періодичний (період T) розв'язок $y = \overline{y}(x)$, який можна записати у вигляді

$$\overline{y}(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_0^x (x-t)^{n-1}\varphi(t)dt+n\left[\frac{A_1^{(1)}}{T}\int\limits_0^T t\varphi(t)dt\right]x^{n-1}+(n-1)\left[A_2^{(1)}\int\limits_0^T t\varphi(t)dt+\right.$$

$$\left.+\frac{A_2^{(2)}}{T}\int\limits_0^T t^2\varphi(t)dt\right]x^{n-2}+\ldots+\left[A_n^{(1)}T^{n-2}\int\limits_0^T t\varphi(t)dt+A_n^{(2)}T^{n-3}\int\limits_0^T t^2\varphi(t)dt+\ldots+\right.$$

$$\left.+\frac{A_n^{(n)}}{T}\int\limits_0^T t^n\varphi(t)dt\right],$$

де коефіцієнти $A_1^{(1)},\ A_2^{(1)},\ldots,\ A_n^{(1)}$ є розв’язки системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$\begin{cases} A_i^{(i)}+A_{i+1}^{(i)}+\ldots+A_n^{(i)}=(-1)^{i+1}\dfrac{C_n^i}{n!}\ (i=1,2,\ldots,n); \\ (n+1-i)\,A_i^{(i)}+(n-i)\,A_{i+1}^{(i)}+\ldots+2A_{n-1}^{(i)}=(-1)^{i+1}\dfrac{C_{n-1}^i}{(n-1)!}\ (i=1,2,\ldots,n-1); \\ (n+1-i)(n-i)\,A_i^{(i)}+(n-i)(n-1-i)\,A_{i+1}^{(i)}+\ldots+3\cdot 2\,A_{n-2}^{(i)}=(-1)^{i+1}\dfrac{C_{n-2}^i}{(n-2)!} \\ (i=1,2,\ldots,n-2); \end{cases}$$

$$n!\,A_1^{(1)}=1.$$

Якщо, крім того, $\varphi(\alpha-x)=-\varphi(x)$, то $\overline{y}(\alpha-x)=-\overline{y}(x)$.

З приведеної системи лінійних алгебраїчних рівнянь послідовно знаходимо:

$$A_i^{(i)}=(-1)^{i+1}\frac{1}{(n+1-i)i!}\ \ (i=1,2,\ldots,n);$$

$$A_{i+1}^{(i)}=\frac{1}{(n-1)!}\left[(-1)^{i+1}\frac{1}{i!}-\frac{(n+1-i)!}{2!}A_i^{(i)}\right]\ (i=1,2,\ldots,n-1);$$

$$A_{i+2}^{(i)}=\frac{1}{(n-1-i)!}\left[(-1)^{i+1}\frac{1}{i!2!}-\frac{(n+1-i)!}{3}A_i^{(i)}-\frac{(n-i)!}{2!}A_{i+1}^{(i)}\right]\ (i=1,2,\ldots,n-2);$$

$$A_{n-1}^{(i)}=\frac{1}{2!}\left[(-1)^{i+1}\frac{1}{i!(n-2)!}-\frac{(n+1-i)!}{(n-i)!}A_i^{(i)}-\frac{(n-i)!}{(n-1-i)!}A_{i+1}^{(i)}-\ldots-\frac{3!}{2!}A_{n-2}^{(i)}\right](i=1,2);$$

$$A_n^{(1)}=\frac{1}{(n-1)!}-A_1^{(1)}-A_2^{(1)}-\ldots-A_{n-1}^{(1)}.$$

Надалі, використані позначення $(n=2k)$:

$$\max_{0\le x\le T}\int\limits_0^T\left|2k\frac{A_1^{(1)}}{T}tx^{2k-1}+(2k-1)A_2^{(1)}tx^{2k-2}+\ldots+\frac{A_{2k}^{(2k)}}{T}t^{2k}\right|dt+\frac{T^{2k}}{(2k)!}=N_0;$$

$$\max_{0\le x\le T}\int_0^T\left|2k(2k-1)\frac{A_1^{(1)}}{T}tx^{2k-2}+(2k-1)(2k-2)A_2^{(1)}tx^{2k-3}+\ldots+2\frac{A_{2k-1}^{(2k-1)}}{T}t^{2k-1}\right|dt+$$

$$+\frac{T^{2k-1}}{(2k-1)!}=N_1;$$

$$\max_{0\le x\le T}\int_0^T\left|\frac{1}{T}tx+\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2T}t^2\right)\right|dt+\frac{T^2}{2!}=\frac{13}{12}T^2=N_{2k-2};$$

$$\max_{0\le x\le T}\int_0^Y\left|\frac{1}{T}t\right|dt+\frac{T}{1!}=\frac{3}{2}T=N_{2k-1};$$

$$K_i^{(1)}+K_i^{(2)}+\ldots+K_i^{(n)}=K_i\ (i=0,1,\ldots,2k-1).$$

Теорема 1. Якщо $q=K_0N_0+K_1N_1+\ldots+K_{2k-2}N_{2k-2}+K_{2k-1}N_{2k-1}<1$, то система (1) має розв'язок $y_i=\overline{y_i}(x)$, що $\overline{y_i}(x)\in C;\ \overline{y_i}(x+T)=\overline{y_i}(x);$ $\overline{y_i}(\alpha-x)=-\overline{y_i}(x)\ (i=1,2,\ldots,n)$.

Доведення. Складаємо послідовності

$$y_{il}(x)=\frac{1}{(2k-1)!}\int_0^x(x-t)^{2k-1}\delta_{il-1}(t)dt+2k\left[\frac{A_1^{(1)}}{T}\int_0^T t\delta_{il-1}(t)dt\right]x^{2k-1}+(2x-1)\left[A_2^{(1)}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^T t\delta_{il-1}(t)dt+\frac{A_2^{(2)}}{T}\int_0^T t^2\delta_{il-1}(t)dt\right]x^{2k-2}+\ldots+\left[A_{2k}^{(1)}T^{2k-2}\int_0^T t\delta_{il-1}(t)dt+A_{2k}^{(2)}T^{2k-3}\times\right.$$

$$\left.\times\int_0^T t^2\delta_{il-1}(t)dt+\ldots+\frac{A_{2k}^{(2k)}}{T}\int_0^T t^{2k}\delta_{il-1}(t)dt\right](i=1,2,\ldots,n;l=1,2,\ldots).$$

Тут $\delta_{ie-1}(t)=f_i\left(t,y_{ie-1}(t),y'_{ie-1}(t),\ldots,y_{ie-1}^{(2k-1)}(t);\ldots;y_{ne-1}(t),y'_{nl-1}(t),\ldots,y_{ne-1}^{(2k-1)}(t)\right)$ $(i=1,2,\ldots,n;\ l=1,2,\ldots)$ і $y_{i0}(x)$ є довільні неперервні, періодичні (періоду T) функції, що $y_{i0}(\alpha-x)=-y_{i0}(x)\ (i=1,2,\ldots,n)$.

Згідно з попереднім $y_{il}(x)$ є неперервні, періодичні (періоду T) функції, що $y_{il}(\alpha-x)=-y_{il}(x)\ (i=1,2,\ldots,n;l=1,2,\ldots)$.

Запишемо:

$$y'_{il}(x)=\frac{1}{(2k-2)!}\int_0^x(x-t)^{2k-2}\delta_{il-1}(t)dt+2k(2k-1)\left[\frac{A_1^{(1)}}{T}\int_0^T t\delta_{il-1}(t)dt\right]x^{2k-2}+$$

$$+(2k-1)(2k-2)\left[A_2^{(1)}\int_0^T t\delta_{il-1}(t)dt+\frac{A_2^{(2)}}{T}\int_0^T t^2\delta_{il-1}(t)dt\right]x^{2k-3}+\ldots+$$

$$+2\left[A_{2k-1}^{(1)}T^{2k-3}\int_0^T t\delta_{il-1}(t)dt+A_{2k-1}^{(2)}T^{2k-4}\int_0^T t^2\delta_{il-1}(t)dx+\ldots+\frac{A_{2k-1}^{(2k-1)}}{T}\int_0^T t^{2k-1}\delta_{il-1}(t)dt\right];$$

$$y_{il}^{(2k-2)}(x)=\int_0^x (x-t)\delta_{il-1}(t)dt+\int_0^T\left[\frac{1}{T}tx+\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2T}t^2\right)\right]\delta_{il-1}(t)dt;$$

$$y_{il}^{(2k-2)}(x)=\int_0^x \delta_{il-1}(t)dt+\int_0^T\frac{1}{T}t\delta_{il-1}(t)dt\ (i=1,2,...,n;\ l=1,2,...).$$

Дістанемо:

$$\left|y_{i2}-y_{i1}\right|\le\max_{0\le x\le T}\left(K_0^{(1)}\left|y_{11}-y_{10}\right|+K_1^{(1)}\left|y'_{11}-y'_{10}\right|+...+K_{2k-1}^{(1)}\left|y_{11}^{(2k-1)}-y_{10}^{(2k-1)}\right|+...+\right.$$
$$\left.+K_0^{(n)}\left|y_{n1}-y_{n0}\right|+K_1^{(n)}\left|y'_{n1}-y'_{n0}\right|+...+K_{2k-1}^{(n)}\left|y_{n1}^{(2k-1)}-y_{n0}^{(2k-1)}\right|\ \right)(i=1,2,...,n).$$

Нехай

$$\max_{0\le x\le T}\left(K_0^{(1)}\left|y_{11}-y_{10}\right|+K_1^{(1)}\left|y'_{11}-y'_{10}\right|+...+K_{2k}^{(1)}\left|y_{11}^{(2k-1)}-y_{10}^{(2k-1)}\right|+...+\right.$$
$$\left.+K_0^{(n)}\left|y_{n1}-y_{n0}\right|+K_1^{(n)}\left|y'_{n1}-y'_{n0}\right|+...+K_{2k-1}^{(n)}\left|y_{n1}^{(2k-1)}-y_{n0}^{(2k-1)}\right|\right)=M.$$

Тоді

$$\left|y_{i2}-y_{i1}\right|\le MN_0;\left|y'_{i2}-y'_{i1}\right|\le MN_1;...;\left|y_{i2}^{(2k-2)}-y_{i1}^{(2k-2)}\right|\le MN_{2K-2};$$
$$\left|y_{I2}^{(2K-1)}-y_{i1}^{(2k-1)}\right|\le MN_{2k-1}\ (i=1,2,...,n).$$

Далі, отримаємо:

$$\left|y_{i3}-y_{i2}\right|\le\left(K_0^{(1)}MN_0+K_1^{(1)}MN_1+...+K_{2k-2}^{(1)}MN_{2k-2}+K_{2k-1}^{1}MN_{2k-1}+...+\right.$$
$$\left.+K_0^{(n)}MN_0+K_1^{(n)}M\,N_1+...+K_{2k-2}^{(n)}MN_{2k-2}+K_{2k-1}^{(n)}MN_{2k-1}\right)N_0=\left(K_0N_0+K_1N_1+\right.$$
$$\left.+...+K_{2k-2}N_{2k-2}+K_{2k-1}N_{2k-1}\right)MN_0=MN_0q;\quad\left|y'_{i3}-y'_{i2}\right|\le MN_1q;...;$$
$$\left|y_{i3}^{(2k-2)}-y_{i2}^{(2k-2)}\right|\le MN_{2k-2}q;\left|y_{i3}^{(2k-1)}-y_{i2}^{(2k-1)}\right|\le MN_{2k-1}q(i=1,2,...,n).$$

Припустимо, що

$$\left|y_{il+2}-y_{il}\right|\le MN_0q^{l-1};\left|y'_{il+1}-y'_{il}\right|\le MN_1q^{l-1};...;\left|y_{il+1}^{(2k-2)}-y_{il}^{(2k-2)}\right|\le MN_{2k-2}q^{l-1};$$
$$\left|y'^{(2k-1)}_{il+1}-y_{il}^{(2k-1)}\right|\le MN_{2k-1}q^{l-1}\ (i=1,2,...,n)$$

Тоді

$$\left|y_{il+2}-y_{il+1}\right|\le\left(K_0MN_0q^{l-1}+K_1MN_1q^{l-1}+...+K_{2k-2}MN_{2k-2}q^{l-1}+K_{2k-1}\times\right.$$
$$\left.\times MN_{2k-1}q^{l-1}\right)N_0=MN_0q^l;\quad\left|y'_{il+2}-y'_{il+1}\right|\le MN_1q^l;...;\left|y_{il+2}^{(2k-2)}-y_{il+1}^{(2k-2)}\right|\le MN_{2k-2}q^l;$$
$$\left|y_{il+2}^{(2k-1)}-y_{il+1}^{(2k-1)}\right|\le MN_{2k-1}q^l\ (i=1,2,...,n).$$

Звідси, в силу методу математичної індукції, слідує, що ряди

$$\left|y_{i0}\right|+\left|y_{i1}-y_{i0}\right|+\left|y_{i2}-y_{i1}\right|+...+\left|y_{il+1}-y_{il}\right|+...\ (i=1,2,...,n)$$

мажоруються геометричною прогресією з знаменником $q\langle 1$.

Значить, послідовності (2) збігаються рівномірно, тобто існують границі

$$\lim_{l\to\infty}y_{il}(x)=\overline{y_i}(x)\ (i=1,2,...,n),$$

де $\overline{y_i}(x)$ є неперервні, періодичні (періоду T) функції, що $\overline{y_i}(\alpha - x) = -\overline{y_i}(x)\ (i = 1,2,...,n)$.

Переходячи в послідовностях (2) до границі при $l \to \infty$, дістанемо:

$$\overline{y_i}(x) = \frac{1}{(2k-1)!}\int_0^x (x-t)^{2k-1}\delta_i(t)dt + 2k\left[\frac{A_1^{(1)}}{T}\int_0^T t\delta_1(t)dt\right]x^{2k-1} + (2k-1)\left[A_2^{(1)}\int_0^T t\delta(t)dt + \right.$$

$$\left. + \frac{A_2^{(2)}}{T}\int_0^T t^2\delta_i(t)dt - \right]x^{2k-2} + ... + \left[A_{2k}^{(1)}T^{2k-2}\int_0^T t\delta_i(t)dt + A_{2k}^{(2)}T^{2k-3}\int_0^T t^2\delta_i(t)dt + ... + \right.$$

$$\left. + \frac{A_{2k}^{(2k)}}{T}\int_0^T t^{2k}\delta_i(t)dt - \right](i = 1,2,...,n),$$

де $\delta_i(t) = f_i\left(t, \overline{y}_1(t), \overline{y_1'}(t), ..., y_1^{(2k-1)}(t); ...; \overline{y}_n(t), \overline{y'}_n(t), ..., \overline{y}_n^{(2k-1)}(t)\right)$ $(i = 1,2,...,n)$.

Отже, $y_i = \overline{y}_i(x)\ (i = 1,2,...,n)$ є розв’язок системи (1).

Теорема доведена.

Теорема 2. Якщо $q = K_0N_0 + K_1N_1 + ... + K_{2k-2}N_{2k-2} + K_{2k-1}N_{2k-1} < 1$ і $y_i = \overline{y_i}(x), z_i = \overline{z_i}(x)\ (i = 1,2,...,n)$ є неперервні, періодичні (періоду T) розв’язки системи (1), що $\int_0^T \overline{y_i}(x)dx = 0, \int_0^T \overline{z_i}(x)dx = 0\ (i = 1,2,...,n)$, то $\overline{y_i}(x) \equiv \overline{z_i}(x)\ (i = 1, 2, ..., n)$.

Доведення. Згідно з попереднім, розв’язок $z_i = \overline{z_i}(x)\ (i = 1,2,...,n)$ системи (1) можна записати у вигляді

$$\overline{z}_i(x) = \frac{1}{(2k-1)!}\int_0^x (x-t)^{2k-1}\Delta_i(t)dt + 2k\left[\frac{A_1^{(1)}}{T}\int_0^T t\Delta_i(t)dt\right]x^{2k-1} +$$

$$+ (2k-1)\left[A_2^{(1)}\int_0^T t\Delta_i(t)dt + \frac{A_2^{(2)}}{T}\int_0^T t^2\Delta_i(t)dt\right]x^{2k-2} + ... + \left[A_{2k}^{(1)}T^{2k-2}\int_0^T t\Delta_i(t)dt + \right.$$

$$\left. + A_{2k}^{(2)}T^{2k-3}\int_0^T t^2\Delta_i(t)dt + ... + \frac{A_{2k}^{(2k)}}{T}\int_0^T t^{2k}\Delta_i(t)dt - \right](i = 1,2,...,n),$$

де $\Delta_i(t) = f_i\left(t, \overline{z}_1(t), \overline{z_1'}(t), ..., \overline{z}_1^{(2k-1)}(t); ...; \overline{z}_n(t), \overline{z'}_n(t), ..., \overline{z}_n^{(2k-1)}(t)\right)(i = 1,2,...,n)$.

Використовуючи позначення

$$\max_{0 \le x \le T}\left(K_0^{(1)}\left|y_{11} - \overline{z}_1\right| + K_1^{(1)}\left|y_{11}' - \overline{z_1'}\right| + ... + K_{2k-1}^{(1)}\left|y_{11}^{(2k-1)} - \overline{z}_1^{(2k-1)}\right| + ... + \right.$$

$$\left. + K_0^{(n)}\left|y_{n1} - \overline{z}_n\right| + K_1^{(n)}\left|y_{n1}' - z_n'\right| + ... + K_{2k-1}^{n}\left|y_{n1}^{(2k-1)} - \overline{z}_n^{(2k-1)}\right| = L,\right.$$

аналогічно вказаному вище, отримаємо:

$$\left|y_{il} - z_i'\right| \le LN_0 q^{l-2} \ (i = 1,2,...,n;\ l = 2,3,...)$$

Оскільки $q \langle 1$, то $\lim\limits_{l\to\infty} y_{il}(x) = \overline{z}_i(x);\ \overline{y}_i(x) \equiv \overline{z}_i(x)\ (i = 1,2,...,n)$.

Теорема доведена.

Література

1. Краснодембський А.М. ДАН УРСР / А.М.Краснодембский. – 10. – 1962.
2. Краснодембский А.М. Записки мех.-мат. ф-та ХГУ и Харьковского матем. Общества / А.М.Краснодембский. – 1964. – Т.XXX, сер.4.
3. Краснодембський А.М. Періодичність розв'язків системи двох нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку / А.М.Краснодембський // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – Івано-Франківськ, 2010. – №1(9). – С. 21-26.

Стаття надійшла до редакційної колегії 4.09.2013 р.

Рекомендовано до друку д.т.н., професором ***Мойсишиним В.М.***

д.ф.-м.н., доцентом ***Королем І.І.*** *(м. Ужгород)*

PERIODICITY OF DECISIONS OF SOME SYSTEM A FEW NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUALIZATIONS OF AN EVEN ORDER

A. M. Krasnodembskyy

Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;

76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;

ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

The terms of convergence of sequences which determine the upshots with the periodic components of some system of a few nonlinear differential equalizations of even order are set in the article.

Key words: *system of a few nonlinear differential equalizations of even order, terms of convergence, periodicity of decisions.*