УДК 517.547+517.925.7+621.313.334
DOI: 10.31471/2304-7399-2022-17(64)-22-30

# ОБМЕЖЕНІСТЬ ІНДЕКСУ АНАЛІТИЧНИХ РОЗВ’ЯЗКІВ ДИФЕРЕНЦІЙНОГО РІВНЯННЯ З МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ АСИНХРОННОГО ДВИГУНА

**А. І. Бандура, П. О. Курляк, В. І. Михайлів, О. В. Соломчак**
*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; вул. Карпатська 15, Івано-Франківськ, 76019, Україна;*
*e-mail: andriykopanytsia@gmail.com, pkurlyak@gmail.com, vasyl.mykhailiv@nung.edu.ua, olegsolom@gmail.com*

*У статті методами аналітичної теорії диференційних рівнянь вивчається рівняння, що виникає при побудові математичної моделі асинхронного короткозамкненого двигуна через його кутову швидкість. Застосовано нещодавні результати теорії функцій обмеженого індексу для того, щоб знайти умови на коефіцієнти цього рівняння, за яких кожен його аналітичний в крузі або цілий розв’язок буде функцією обмеженого l-індексу для деякої додатної неперевної функції l, що отримується з умов на коефіцієнти самого рівняння.*

***Ключові слова:*** *асинхронний короткозамкнений двигун, кутова швидкість, момент вентилятора, диференційне рівняння, математична модель, аналітичний в крузі розв’язок, обмежений індекс, цілий розв’язок.*

## 1 Вступ

Зазначимо, що останні роки вийшло чимало статей присвячених аналітичній теорії диференційних рівнянь. Серед них, зокрема, варто виділити статті, в яких розглядається клас аналітичних функцій обмеженого $l$-індексу, де $l$ – деяка додатна неперервна функція. Одна з основних ідей останніх статей [16, 21, 17, 18, 19, 20, 22, 23] – знайти умови на коефіцієнти рівняння, за яких кожен його аналітичний розв’язок матиме обмежений $l$-індекс. Це у свою чергу автоматично означатиме, що усі відповідні розв’язки володітимуть цілим букетом властивостей функцій з цього класу: вони матимуть певні оцінки зростання, певне локальне поводження у термінах максимуму модуля функцій та їхніх похідних на колах різних радіусів, їхні логаритмічні похідні задовольнятимуть певні оцінки ззовні деякої виняткової множини породженої нулями цих функцій. До того ж нулі цих функцій будуть рівномірно розподілені в деякому сенсі на комплексній площині, а їхні первісні матимуть обмежений розподіл усіх значень на усій комплексній площині. Описані результати також справджуються у певному розумінні й для аналітичних функцій від декількох комплексних змінних.

Однак відповідні диференційні рівняння у теорії обмеженого індексу розглядалися без прив'язування до конкретної моделі явищ або процесів. У цій статті спробуємо частково усунути цю прогалину та розглянемо одне з рівнянь, яке виникає при побудові математичної моделі роботи асинхронного двигуна. Зазначимо, що в електротехніці багато величин мають комплексночислову природу. Це, зокрема, потужність, напруга, сила струму, опір, тому з цієї точки зору дослідження властивостей аналітичних розв'язків диференційних рівнянь на комплексній площині виглядає цілком природним. Адже чисельні методи, які переважно використовуються в електротехніці при розв'язуванні таких рівнянь, дають змогу відшукати розв'язок локально, про глобальне поводження розв'язку складно на їхній основі щось стверджувати. Ця стаття, по суті, задає напрям подальших досліджень.

## 2 Основні поняття та побудова рівняння

Введемо основні позначення: $\mathbb{R}_+ = (0; +\infty), \mathbb{D}_R = \{z \in \mathbb{C}: |z| < R\}$ – круг радіуса $R, l: \mathbb{D}_R \to \mathbb{R}_+$ – неперервна функція така, що для всіх $z \in \mathbb{D}_R$

$$l(z) > \frac{\beta}{R-|z|}, \ \beta = \text{const} > 1. \tag{1}$$

Аналітична функція $f: \mathbb{D}_R \to \mathbb{C}$ називається [13, 15] функцією *обмеженого $l$-індексу*, якщо існує $m_0 \in \mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $m \in \mathbb{Z}_+$ та всіх $z \in \mathbb{D}_R$ справедлива така нерівність

$$\frac{|f^{(m)}(z)|}{m! l^m(z)} \le \max\left\{\frac{|f^{(k)}(z)|}{k! l^k(z)} : 0 \le k \le m_0\right\}. \tag{2}$$

Найменше таке ціле число $m_0$ називається *$l$-індексом аналітичної функції $f$ та позначається через* $N(f, l) = m_0$. Первісне означення обмеженого індексу для цілих функцій від однієї змінної було запропоноване Б. Лепсоном [12]. Для отримання змістовних результатів, крім додатності та неперервності, на функцію $L$ накладають додаткові умови. Позначимо

$$\lambda(\eta) = \sup_{z_1, z_2 \in \mathbb{D}_R} \left\{\frac{l(z_1)}{l(z_2)} : |z_1 - z_2| \le \frac{\eta}{\min\{l(z_1), l(z_2)\}}\right\}.$$

Під записом $Q(\mathbb{D}_R)$ розуміють клас додатних неперервних функцій $l: \mathbb{D}_R \to \mathbb{R}_+$, що задовольняють (1) та

$$(\forall \eta \in [0, \beta]): \lambda_{\mathbf{b}}(\eta) < +\infty. \tag{3}$$

Позначимо $a^+ = \max\{a, 0\}, u(r, \theta) = l(re^{i\theta})$, де $r > 0, \theta \in [0; 2\pi]$. Через $W(\mathbb{D}_R)$ позначимо клас додатних непервних функцій $l: \mathbb{D}_R \to \mathbb{R}_+$, що задовольняють такі три умови:

1. для всіх $z \in \mathbb{D}_R l(z) > \frac{\beta}{R-|z|}$, де $\beta = \text{const} > 1$;

2. для кожного $\theta \in [0, 2\pi]$ функція $l(re^{i\theta})$ неперервно диференційовна функція від дійсної змінної $r \in [0, R)$;

3. для кожного $\theta \in [0,2\pi]$ маємо $\left(\frac{d}{dr}\frac{1}{u(r,\theta)}\right)^{+} \to 0$ при $r \to R$.

Умова 3) рівносильна $\frac{(-u'_r(r,\theta))^{+}}{l^2(re^{i\theta})} \to 0$ при $r \to R$.

Надалі нижче ми також використаємо усталені позначення з теорії математичного моделювання в електроенергетиці. Модель у цій статті запозичена з ([1, с.~110],[2, с.~414],[3, с.~24]). Розглянемо перехідний процес під час пуску системи асинхронний короткозамкнений двигун – вентилятор. Допустимо, що асинхронний двигун розганяється „досить повільно”, тобто, що струми в обмотках в процесі розгону завжди дорівнюють усталеним струмам при заданій кутовій швидкості. За цієї умови рівняння руху асинхронного двигуна.

$$M_{д}(\omega) - M_{в}(\omega) = J \cdot \frac{d\omega}{dt}, \qquad (4)$$

де $\omega$ – кутова швидкість системи асинхронний двигун-вентилятор, рад/с; $J$ – момент інерції системи, кг·м$^2$; $M_{д}(\omega)$ – момент, який розвиває двигун, Н·м; $M_{в}(\omega)$ – момент вентилятора та втрат в асинхронному двигуні та вентиляторі, Н·м. $t$ – час, с. На підставі спрощеної формули Клосса одержимо

$$M_{д}(\omega) = \frac{2\cdot M_{\max}}{\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0-\omega_k}+\frac{\omega_0-\omega_k}{\omega_0-\omega}}, \qquad (5)$$

де $M_{\max}$ – максимальний момент; $\omega_k$ – критична кутова швидкість двигуна, рад/с; $\omega_0$ – кутова швидкість поля асинхронного двигуна, рад/с. Підставляючи (5) у (4), дістанемо таке рівняння:

$$\frac{dt}{d\omega} = \frac{1}{J\left(\frac{2\cdot M_{\max}}{\frac{\omega_0-\omega}{\omega_0-\omega_k}+\frac{\omega_0-\omega_k}{\omega_0-\omega}} - M_{в}(\omega)\right)}$$

або

$$\frac{dt}{d\omega} = \frac{(\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2}{J(2\cdot M_{\max}\cdot(\omega_0-\omega_k)(\omega_0-\omega) - ((\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2)M_{в}(\omega))}.$$

Рівняння вигляду $w' = f(z,w)$ з точки зору теорії обмеженого індексу було розглянуте у [6]. Однак тут у нас простіше рівняння вигляду $g(z)w' = f(z)$, а саме:

$$J(2\cdot M_{\max}\cdot(\omega_0-\omega_k)(\omega_0-\omega) - ((\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2)M_{в}(\omega))t'(\omega) = (\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2. \qquad (6)$$

## 3 Основний результат

**Теорема 1.** *Якщо* $M_{в}(\omega) = \frac{C-2\cdot M_{max}\cdot(\omega_0-\omega_k)(\omega_0-\omega)}{(\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2}$ $(C \in \mathbb{C}\setminus\{0\})$, *то кожен цілий розв’язок рівняння (6) буде багаточленом третього степеня, матиме обмежений індекс і його індекс рівний* 3.

*Якщо* $M_в(\omega)=\frac{C-2\cdot M_{max}\cdot(\omega_0-\omega_k)(\omega_0-\omega)}{(\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2}$ $(C\in\mathbb{C}\backslash\{0\})$, *то кожен цілий розв'язок рівняння (6) буде багаточленом першого степеня, матиме обмежений індекс і його індекс рівний* 1.

*Якщо*

$$M_в(\omega)=\frac{2\cdot M_{max}\cdot(\omega_0-\omega_k)(\omega_0-\omega)(C_1\omega+C_2)-((\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2)}{(\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2(C_1\omega+C_2)}$$

$(C_1,C_2\in\mathbb{C}\backslash\{0\})$, *то кожен цілий розв'язок рівняння (6) буде багаточленом другого степеня, матиме обмежений індекс і його індекс рівний* 2.

*Нехай* $l\in Q\left(\mathbb{D}_{\omega_k}\right)$. *Якщо функція* $(((\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2)M_в(\omega))''$ *обмеженого* $l$*-індексу, то кожен аналітичний в крузі* $|\omega|<\omega_k$ *розв'язок рівняння (6) буде функцією обмеженого* $l$*-індексу.*

*Нехай* $l\in QW(\mathbb{D}_{\omega_k})$, $\omega_k,\omega_0\in\mathbb{R}_+$, *функція* $M_в(\omega)$ *аналітична в крузі* $\mathbb{D}_{\omega_k}$. *Якщо існують*$R_1\in(0,\omega_k)$*та* $b_1>0$*такі, що для всіх* $|\omega|\geq R_1>\omega_0$ *справджується* $\frac{|M'_в(\omega)|}{|M_в(\omega)|}<b_1 l(\omega)$ *та* $l(\omega)\geq 1$, *то кожен аналітичний в крузі* $|\omega|<\omega_k$ *розв'язок рівняння (6) буде функцією обмеженого* $l$*-індексу.*

**Доведення**. Цілий розв'язок $t(\omega)$ рівняння (6) буде у випадку, коли вираз

$$\frac{(\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2}{2\cdot M_{\max}\cdot(\omega_0-\omega_k)(\omega_0-\omega)-((\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2)M_в(\omega)}$$

це багаточлен степеня 0,1 або 2.

а) Степінь 2 можливий за умови, що $2\cdot M_{\max}\cdot(\omega_0-\omega_k)(\omega_0-\omega)-((\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2)M_в(\omega)=C=\text{const}, C\neq 0$. Звідси,

$$M_в(\omega)=\frac{C-2\cdot M_{\max}\cdot(\omega_0-\omega_k)(\omega_0-\omega)}{(\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2}.$$

У цьому випадку рівняння (6) зводиться до такого,

$$t'(\omega)=\frac{1}{JC}(\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2. \quad (7)$$

розв'язком якого буде багаточлен третього степеня, що вочевидь є цілою функцією обмеженого індексу. Його індекс рівний 3.

б) Степінь 0 можливий за умови, що $2\cdot M_{\max}\cdot(\omega_0-\omega_k)(\omega_0-\omega)-((\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2)M_в(\omega)=C((\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2), C\neq 0$. Звідси,

$$M_в(\omega)=\frac{2\cdot M_{\max}\cdot(\omega_0-\omega_k)(\omega_0-\omega)-C((\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2)}{(\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2}$$

У цьому випадку рівняння (6) зводиться до такого,

$$t'(\omega)=\frac{1}{JC},$$

розв'язком якого буде багаточлен першого степеня, що вочевидь є цілою функцією обмеженого індексу. Його індекс рівний 1.

в) Степінь 1 виникне за умови, що

$$2\cdot M_{\max}\cdot(\omega_0-\omega_k)(\omega_0-\omega)-((\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2)M_{\text{в}}(\omega)= =\frac{(\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2}{C_1\omega+C_2},$$

де $C_1\neq 0, C_2\neq 0$. Тоді

$$M_{\text{в}}(\omega)=\frac{2\cdot M_{\max}\cdot(\omega_0-\omega_k)(\omega_0-\omega)(C_1\omega+C_2)-((\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2)}{(\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2(C_1\omega+C_2)}.$$

У цьому випадку рівняння (6) зводиться до такого,

$$t'(\omega)=\frac{C_1\omega+C_2}{J}.$$

Зрозуміло, що його розв'язком буде багаточлен другого степеня, який є цілою функцією обмеженого індексу. Його індекс рівний 2.

Тепер розглянемо випадок аналітичних розв'язків $t(\omega)$ в крузі. Для цього скористаємося результатами про обмеженість індексу аналітичних розв'язків такого лінійного неоднорідного диференційного рівняння $p$-го порядку:

$$g_0(z)w^{(p)}+g_1(z)w^{(p-1)}+\cdots+g_p(z)w=h(z).(8)$$

Нижче сформульовані достатні умови обмеженості $l$-індексу його аналітичних в крузі розв'язків. Перше допоміжне твердження в одновимірному випадку отримане у [15], хоча його також можна отримати як наслідок пізнішого результату [7] для аналітичних в кулі з $\mathbb{C}^n$ функцій. Натомість друге твердження це наслідок відповідного результату для аналітичних в кулі функцій з [9]. Через те, що та стаття ще перебуває в друці, ми б хотіли згадати вже опубліковані статті, де отриманий відповідний результат для цілих функцій від однієї змінної [11] та від декількох змінних [8], а також для цілих на зрізках функцій [10].

**Лема 1**[[7, 15]]. *Нехай $l\in Q(\mathbb{D}_R), g_0(z),\ldots,g_p(z),h(z)$ аналітичні в $\mathbb{D}_R$ функції обмеженого $l$-індексу, $\mathbb{D}_R\setminus G_\beta(g_0)\neq\emptyset$ та для кожного $r\in(0;\beta]$ знайдеться $T=T(r)>0$ таке, що для всіх $z\in\mathbb{D}_R\setminus G_r(g_0)$ та $j=1,\ldots,p$ виконується нерівність $|g_j(z)|\le Tl^j(z)|g_0(z)|$. Тоді аналітична функція $f:\mathbb{D}_R\to\mathbb{C}$, яка задовольняє рівняння (8), має обмежений $l$-індекс.*

Позначимо $QW(\mathbb{D}_R)=Q(\mathbb{D}_R)\cap W(\mathbb{D}_R)$.

**Лема 2**[[9]]. *Нехай $l\in QW(\mathbb{D}_R)$, функції $g_0,g_1,..,g_p$, та $h$ аналітичні в крузі радіуса $R$ та існує $R_1\in[0,R)$ таке, що для всіх $z\in\mathbb{D}_R, |z|\ge R_1$, наступні умови виконуються*

1. $|g_j(z)|\le d_j l^j(z)|g_0(z)|$ *for* $1\le j\le p$;
2. $|g'_j(z)|<D_j\cdot l^{j+1}(z)|g_0(z)|$ *for* $0\le j\le p$;
3. $|h'(z)|\le D\cdot l(z)\cdot|h(z)|$,

*де $d_j$ та $D$ – невід'ємні сталі, $D_j$ – додатні сталі. Якщо аналітична функція $f:\mathbb{D}_R\to\mathbb{C}$ задовольняє рівняння (8), то $f$ має обмежений $l$-індекс та для всіх $\theta\in[0,2\pi]$*

$$\overline{\lim_{r\to R}}\frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{\int_0^r l(te^{i\theta})dt}\le \max\{1, D^*\},(10)$$

$де\ D^* = \sum_{j=1}^{p} D_j + (D+1)\sum_{j=1}^{p} d_j + D.$

Продовжимо доведення теореми 1. З огляду на позначення у рівнянні (8) у досліджуваному рівнянні (6) $p = 1, R = \omega_k$,

$$g_0(\omega) = J(2\cdot M_{\max}\cdot(\omega_0-\omega_k)(\omega_0-\omega) - ((\omega_0-\omega)^2 + +(\omega_0-\omega_k)^2)M_{\text{в}}(\omega)),$$

$$h(\omega) = (\omega_0-\omega)^2 + (\omega_0-\omega_k)^2,$$

відповідно, решту $g_j(t)\equiv 0$. Тому для леми 2 треба перевірити умови 2) та 3). Умова 2) у нашому випадку рівносильна такій $\left|g'_0(\omega)\right| < < D_0 L(\omega)\left|g_0(\omega)\right|$. Справді,

$$g'_0(\omega) = J(-2\cdot M_{\max}\cdot(\omega_0-\omega_k) + 2(\omega_0-\omega)M_{\text{в}}(\omega) - -((\omega_0-\omega)^2 + (\omega_0-\omega_k)^2)M'_{\text{в}}(\omega)).$$

Тоді для всіх $|\omega|\ge R_1 > \omega_0$ справджується така оцінка

$$\frac{|g'_0(\omega)|}{|g_0(\omega)|}\le$$

$$\le\frac{2\cdot M_{\max}\cdot|\omega_0-\omega_k| + 2|\omega_0-\omega|\cdot|M_{\text{в}}(\omega)| + |(\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2|\cdot|M'_{\text{в}}(\omega)|}{|2\cdot M_{\max}\cdot(\omega_0-\omega_k)(\omega_0-\omega) - ((\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2)M_{\text{в}}(\omega)|}\le$$

$$\le A_1 + A_2\cdot\frac{|M'_{\text{в}}(\omega)|}{|M_{\text{в}}(\omega)|}, \qquad (11)$$

де

$$A_1 = \sup_{R_1<|\omega|\le\omega_k}\frac{2\cdot M_{\max}\cdot|\omega_0-\omega_k|/|M_{\text{в}}(\omega)| + 2|\omega_0-\omega|}{|2\cdot M_{\max}\cdot(\omega_0-\omega_k)(\omega_0-\omega)/M_{\text{в}}(\omega) - ((\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2)|},$$

$$A_2 = \sup_{R_1<|\omega|\le\omega_k}\frac{|(\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2|}{|2\cdot M_{\max}\cdot(\omega_0-\omega_k)(\omega_0-\omega)/M_{\text{в}}(\omega) - ((\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2)|}.$$

З умови теореми, що для всіх $|\omega|\ge R_1 > \omega_0$ справджується $\frac{|M'_{\text{в}}(\omega)|}{|M_{\text{в}}(\omega)|} < b_1 l(\omega)$, та нерівності (11) випливає

$$\frac{|g'_0(\omega)|}{|g_0(\omega)|} < (A_1 + b_1 A_2)l(\omega) = D_0 l(\omega),$$

де $D_0 = A_1 + b_1 A_2$.

З огляду на те, що $h(\omega) = (\omega_0-\omega)^2 + (\omega_0-\omega_k)^2$ багаточлен другого степеня, відповідно, $h'(\omega) = 2(\omega-\omega_0)$, а функція $l(\omega)$ така, що $l(\omega)\ge\frac{\beta}{|\omega_k|-|\omega|}$, умова 3) леми 2 також буде виконуватися з деякою сталою $D\ge 0$. Дійсно,

$$\frac{|h'(\omega)|}{|h(\omega)|} = \frac{2|\omega-\omega_0|}{|(\omega_0-\omega)^2+(\omega_0-\omega_k)^2|} = O\ (1) \text{ при } |\omega|\to\omega_k.$$

Зазначимо, що ця асимптотична рівність виконується, бо для всіх $\varphi\in[0,2\pi]$

$$\omega_0 - \omega_k e^{i\varphi} \ne i(\omega_0-\omega_k)$$

за умови, що $0<\omega_0<\omega_k$. Припустивши протилежне, дістаємо $\omega_k(i-e^{i\varphi}) = \omega_0(i-1)$ або

$$e^{i\varphi} = i - \frac{\omega_0}{\omega_k}(i-1) = i(1-\frac{\omega_0}{\omega_k}) + \frac{\omega_0}{\omega_k}.$$

Тоді

$$1 = |e^{i\varphi}| = \sqrt{(1-\frac{\omega_0}{\omega_k})^2 + \frac{\omega_0^2}{\omega_k^2}} = \sqrt{1 + 2\frac{\omega_k}{\omega_0}(\frac{\omega_k}{\omega_0} - 1)} < 1$$

при $0 < \omega_0 < \omega_k$. Отримали суперечність.

Таким чином, усі умови леми 2 виконані. Отже, за цією теоремою кожен аналітичний в крузі $|\omega| < \omega_k$ розв'язок рівняння (4) є функцією обмеженого $l$-індексу, де функція $l$ вибрана з умови $\frac{|M'_{\text{в}}(\omega)|}{|M_{\text{в}}(\omega)|} < b_1 l(\omega)$ для всіх $|\omega| \in (R_1, \omega_k)$, а $R_1 > \omega_0$. До того ж цей розв'язок має таку оцінку зростання:

$$\overline{\lim_{r\to\omega_k}} \max_{\theta\in[0;2\pi]} \frac{\ln|\mathrm{t}(re^{i\theta})|}{\int_0^r L(se^{i\theta})ds} \le \max\{1, D^*\}.$$

де $D^* = \max\{A_1, b_1 A_2\} + D$.

Тепер спробуємо перевірити умови леми 3. Умову 9 перевіряти не потрібно, бо у рівнянні 6 лишень $g_0 \neq 0$. Водночас $h(\omega) = (\omega_0 - \omega)^2 + (\omega_0 - \omega_k)^2$ у нас багаточлен другого степеня, а тому він матиме обмежений $l$-індекс для будь-якої функції $l$ і цей $l$-індекс дорівнює 2. Доведемо, що $g_0(\omega) = J(2 \cdot M_{\max} \cdot (\omega_0 - \omega_k)(\omega_0 - \omega) - ((\omega_0 - \omega)^2 + (\omega_0 - \omega_k)^2) M_{\text{в}}(\omega))$ має обмежений $l$-індекс. Зрозуміло, що

$$g''_0(\omega) = -J(((\omega_0 - \omega)^2 + (\omega_0 - \omega_k)^2) M_{\text{в}}(\omega)))''.$$

За умовою теореми 3 функція $(((\omega_0 - \omega)^2 + (\omega_0 - \omega_k)^2) M_{\text{в}}(\omega)))''$ обмеженого $l$-індексу, тому $g''_0(\omega)$ також обмеженого індексу. Відповідно, функція $g_0(\omega)$ також матиме обмежений $l$-індекс. Отже, виконані усі умови леми 3, тому кожний аналітичний в крузі розв'язок 6 матиме обмежений $l$-індекс.

Теорему 1 доведено.

**Зауваження 1**. Зазначимо, що умова про обмеженість $l$-індексу функції $(((\omega_0 - \omega)^2 + (\omega_0 - \omega_k)^2) M_{\text{в}}(\omega))$ обумовлена тим, що сума функцій обмеженого індексу не обов'язково буде функцією обмеженого індексу [14, 15]. Ба більше, з того, що функція має обмежений індекс не випливає обмеженість індексу її похідної [15]. Тому тут не розписували цю другу похідну від добутку, бо інакше б отримали суму трьох виразів, для яких довелося б застосовувати достатні умови обмеженості індексу для суми функцій [4, 5]. Однак ці умови відомі лише у варіанті для суми двох функцій і подвійне застосування цих умов призведе до громіздких умов, які складно перевіряти.

***Література***

1. Гаврилюк Р.Б. Математичні задачі електроенергетики: Конспект лекцій. – Івано-Франківськ: Факел, 2004. – 139 с.

2. Кириленко О.В. Математичне моделювання в електроенергетиці: підручник /О.В. Кириленко, М.С. Сегеда, О.Ф. Буткевич, Т.А. Мазур. – Львів: Видавництво НУ „Львівська політехніка“, 2010. – 608 с.
3. Толочко О.І. Моделювання електромеханічних систем. Математичне моделювання систем асинхронного електроприводу: навчальний посібник. – Київ, НТУУ «КПІ», 2016. – 150 с.
4. Bandura A.I. Composition, product and sum of analytic functions of bounded L-index in direction in the unit ball, Mat. Stud. 50 (2), 115–134 (2018). https://doi.org/10.15330/ms.50.2.115-134
5. BaksaV. P., BanduraA. I, SaloT. M. Boundedness of the L-index in a direction of the sum and product of slice holomorphic functions in the unit ball, Mat. Stud. 57 (2), 216–224(2022). https://doi.org/10.30970/ms.57.2.216-224
6. Bandura A., Skaskiv O., Filevych P.: Properties of entire solutions of some linear PDE's. J. Appl. Math. Comput. Mech. 16(2), 17–28 (2017). https://doi.org/10.17512/jamcm.2017.2.02
7. Bandura A., Skaskiv O. Linear directional differential equations in the unit ball: solutions of bounded L-index. Mathematica Slovaca, 69 (5), 1089-1098 (2019). https://doi.org/10.1515/ms-2017-0292
8. Bandura A.I., Skaskiv O.B. Sufficient sets for boundedness L-index in direction for entire functions. Mat. Stud. 30(2), 177–182 (2008).
9. BanduraA.I. Application of Hayman's theorem to linear directional differential equations having analytic solutions in the unit ball and boundedness of L-index in direction, Studia Universitatis Babes-Bolyai Mathematica (in print).
10. Bandura A., Skaskiv O., Smolovyk L. Slice holomorphic solutions of some directional differential equations with bounded L-index in the same direction. Demonstr. Math., 52 (1), 482–489(2019). https://doi.org/ 10.1515/dema-2019-0043.
11. BordulyakM. T. On the growth of entire solutions of linear differential equations, Mat. Stud., 13 (2), 219–223 (2000).
12. Lepson B., Differential equations of infinite order, hyperdirichlet series and entire functions of bounded index, Proc. Sympos. Pure Math., 11, 298–307(1968).
13. Kushnir V.O., Sheremeta M.M. Analytic functions of bounded l-index, Mat. Stud., 12(1), 59–66(1999).
14. Pugh W.J., Sums of functions of bounded index, Proc. Amer. Math. Soc. 22, 319–323(1969).
15. Sheremeta M. Analytic functions of bounded index, Vol. 6 of Mathematical Studies. Monograph Series, VNTL Publishers, Lviv, 1999.
16. Sheremeta M.M., Trukhan Yu.S. Properties of analytic solutions of three similar differential equations of the second order // Carpathian Math. Publ. 13 (2), 413-425 (2021). https://doi.org/:10.15330/cmp.13.2.413-425

17. Trukhan Yu.S., Sheremeta M.M. Properties of analytic solutions of a differential equation, Mat. Stud. 52(2), 138–143 (2019), https://doi.org/10.30970/ms.52.2.138-143
18. Trukhan Yu. Properties of the solutions of the Legendre equation, Visn. Lviv Un-ty. Ser. Mech.-Math. Iss. 83, 82–89 (2017).
19. Трухан Ю., Шеремета М. Про обмеженість $l$-індексу виродженої гіпергеометричної функції, Вісник Львівського університету. Серія механіко-математична. Вип. 80, 161–165 (2015).
20. Trukhan Yu. S., On properties of the solutions of the Weber equation, Carpathian Math. Publ., 7 (2), 247–253, (2015). https://doi.org/10.15330/cmp.7.2.247-253
21. Sheremeta Z. M., Sheremeta M. M. Properties of entire solutions of differential equations Ukrainian Math. J., 58(12), 1924-1934, (2006).https://doi.org/10.1007/s11253-006-0177-3
22. Sheremeta Z. M. Properties of derivatives for entire solution of some differential equation, Mat. Metodi Fiz.-Mekh. Polya, 49 (2), 80–85 (2006).
23. Sheremeta Z. M. On the boundedness l-index of entire solution of some differential equation, Visn. Lviv Un-ty. Ser. mekh.-math. Iss. 63, 148–151 (2004).

*Стаття надійшла до редакційної колегії 11.11.2022 р.*

## INDEX BOUNDEDNESS OF ANALYTIC SOLUTIONS OF A DIFFERENTIAL EQUATION GENERATED BY MATHEMATICAL MODEL OF ASYNCHRONOUS MOTOR

**A. I. Bandura, P. O. Kurliak, V. I. Mykhailiv, O. V. Solomchak**
*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas; 15 Karpatska street, Ivano-Frankivsk, 76019, Ukraine;*
*e-mail: andriykopanytsia@gmail.com, pkurlyak@gmail.com, vasyl.mykhailiv@nung.edu.ua, olegsolom@gmail.com*

*In paper, the authors use the methods of the analytical theory of differential equations to study the equation arising in a mathematical model of an asynchronous short-circuit motor by its angular velocity. Recent results of the theory of functions having bounded index are applied in order to find conditions on the coefficients of this equation, under which each its analytic in a disc solution or an entire solution is a function of the bounded l-index for some positive continuous function l obtained from the conditions on the coefficients of the equation.*

***Keywords:*** *asynchronous short-circuit motor, angular velocity, fan of torque, differential equation, mathematical model, analytic in a disc solution, bounded index, entire solution.*