МАТЕМАТИКА ТА МЕХАНІКА

Математичний аналіз

УДК 517.537.72 + 517.548.9
DOI: 10.31471/2304-7399-2022-17(64)-9-21

ВИПАДКОВІ БАНАХОВО-ЗНАЧНІ РЯДИ ДІРІХЛЕ ЗІ ЗРОСТАЮЧОЮ ДЕТЕРМІНОВАНОЮ ПОСЛІДОВНІСТЮ ДОДАТНИХ ПОКАЗНИКІВ

М. Р. Куриляк, О. Б. Скасків
Львівський національний університет імені Івана Франка;
79000, вул. Університетська 1, м. Львів, Україна;
e-mail: olskask@gmail.com, mega_shim@ukr.net

У статті розглядаються випадкові ряди Діріхле вигляду $F_\omega(z)=\sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega)e^{z\lambda_k}$, де (λ_k) – деяка послідовність, для якої $0=\lambda_0<\lambda_k<\lambda_{k+1}\to+\infty (1\le k\to+\infty)$, а $(f_k(\omega))_{k=0}^{+\infty}$ – послідовність випадкових величин на ймовірнісному просторі $(\Omega,\mathcal{A},\boldsymbol{P})$. Кожне відображення $f_k(\omega)\colon\Omega\to\mathbb{B}$ є таким, що $\| f_k(\omega)\|$ – вимірна функція відносно пари σ-алгебр $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, де $(\mathbb{B},\|\cdot\|)$ – комплекснозначний банахів простір. Основними твердженнями роботи є теореми 1 і 2, які стосуються оцінок абсцис збіжності вказаних вище рядів.

Ключові слова: *формальні ряди Діріхле, випадкові коефіцієнти, комплекснозначний банахів простір, абсциса збіжності, абсциса абсолютної збіжності.*

1. Вступ. Нехай $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$ – ймовірнісний простір, $(\mathbb{B},\|\cdot\|)$ – комплекснозначний банахів простір; зокрема, це може бути $(\mathbb{B},\|\cdot\|)=(\mathbb{C},|\cdot|)$, тобто, комплексною площиною з евклідовою нормою. Нехай $\Lambda=(\lambda_k))_{k=0}^{+\infty}$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, а $\mathbf{f}=(f_k(\omega))_{k=0}^{+\infty}$ – послідовність банахово-значних випадкових величин на $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$, тобто, кожне відображення $f_k(\omega)\colon\Omega\to\mathbb{B}$ є таким, що $\| f_k(\omega)\|$ – вимірна функція відносно пари σ-алгебр $\mathcal{A}$ та $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. У такому випадку писатимемо, що $\mathbf{f} \in \mathbb{B}^{\infty}$. Надалі, Λ – це послідовність показників, а $\mathbf{f} \in \mathbb{B}^{\infty}$ – послідовність коефіцієнтів ряду Діріхле вигляду

$$F(z) = F(z,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) e^{z\lambda_k}. \qquad (1)$$

Клас таких формальних рядів Діріхле позначатимемо через $\mathcal{D}(\Lambda, \mathbb{B}^{\infty})$.

У випадку комплексної площини $\mathbb{C}$, тобто, $\mathbb{B} = \mathbb{C}$ (випадок рядів Діріхле з випадковими комплексно-значними коефіцієнтами), писатимемо просто $\mathcal{D}(\Lambda, \mathbb{B}^{\infty}) := \mathcal{D}(\Lambda)$.

Відзначимо, що у випадку коли $\mathbf{m} = (m_k)_{k=0}^{+\infty}$ – зростаюча послідовність цілих чисел $m_k \in \mathbb{Z}_+ (k \in \mathbb{Z}_+)$, де $\mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\}$, а $\mathcal{K}(\mathbf{m})$ – клас формальних випадкових степеневих рядів вигляду

$$f(s) = f(s,\omega) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega) s^{m_k} (s \in \mathbb{C},\ \omega \in \Omega), \qquad (2)$$

то вибираючи $\lambda_k \equiv m_k$, $s = e^z$, з останнього ряду отримаємо ряд Діріхле вигляду (1) з детермінованою послідовністю цілих невід'ємних показників $\lambda_k \equiv m_k (k \geq 0)$).

Зазначимо, що у статтях [2, 3, 4], зокрема, досліджувались граничні значення аналітичних функцій в одиничному крузі зі значеннями у сепарабельному банаховому просторі, дуальному до деякого іншого банахового простору. У статтях [5, 6, 8, 9] досліджувались різноманітні проблеми (в тому числі і проблеми збіжності), що стосуються рядів Діріхле з класу $\mathcal{D}(\Lambda, \mathbb{B}^{\infty})$.

Зауважимо спочатку, що як і у випадку звичайних степеневих рядів, радіус збіжності $R(\omega) := R(\omega, \mathbf{m})$ ряду вигляду (2) з $f_k \in \mathbb{B}^{\infty}$ можна знайти за формулою Коші-Адамара

$$\frac{1}{R(\omega, \mathbf{m})} = \overline{\lim_{k\to+\infty}} \sqrt[m_k]{\| f_k(\omega) \|} := q(\omega)$$

для фіксованого $\omega \in \Omega$ (див. [1, доведення твердження VII, 3.8]). Тобто, ряд збіжний за нормою в крузі $\{z: |z| < R\}, R = \frac{1}{q(\omega)}$ і розбіжний в кожній точці зовнішності цього круга. У випадку послідовності $\mathbf{f}$ незалежних комплексно-значних випадкових величин f_k за законом нуля і одиниці Колмогорова (див., наприклад, [10]) випадкова величина $R(\omega)$ є майже напевно (м.н.) стала, тобто $R(\omega) = R \in [0, +\infty]$ м.н. Випадок коли $(|f_k(\omega)|)$ однаково розподілені незалежні випадкові величини розглянуто при $m_k = k (k \geq 0)$ в [11], а для довільної послідовності $\mathbf{m} = (m_k)$ в [12]. Випадок попарно незалежних випадкових величин $(|f_k(\omega)|)$ і $m_k = k (k \geq 0)$ розглянуто в [13]. У статті [15] розглянуто випадок довільної послідовності $\mathbf{m} = (m_k)$, коли $(|f_k|)$ є послідовністю, в загальному, неоднаково розподілених попарно незалежних випадкових величин. А у статті [14] подібні твердження доведено для рядів Діріхле вигляду (1) з довільною зростаючою до нескінченності детермінованою послідовністю показників $\lambda_k(\omega) \equiv \lambda_k$. У статтях [16, 17] подібне розглянуто для рядів Діріхле з детермінованими комплексними коефіцієнтами і випадковими дійсними попарно незалежними показниками, а у статті [18] – для рядів Діріхле з випадковими невід'ємними показниками і випадковими комплексно-значними коефіцієнтами.

Наш розгляд розпочнемо з рядів Діріхле вигляду (1) з детермінованою зростаючою до нескінченності послідовністю невід'ємних показників, тобто, такою послідовністю Λ, що $\lambda_k(\omega) \equiv \lambda_k (k \geq 0)$, $0 = \lambda_0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} \to +\infty (1 \leq k \to +\infty)$. А потім у вигляді наслідків отримаємо аналоги теорем з [15] для степеневих рядів з класу $\mathcal{K}(\mathbf{m})$ вигляду (2), де $f_k(\omega) \in \mathbb{B}(\omega \in \Omega,\ k \geq 0)$ такі, що $(\| f_k(\omega) \|)$ є послідовністю попарно незалежних випадкових величин.

2. Випадкові банахово-значні ряди Діріхле. Нехай $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ – ймовірнісний простір, а $\mathbf{f} = (f_k(\omega))_{k=0}^{+\infty}$ – послідовність комплекснозначних випадкових величин на ньому. Нехай $\Lambda = (\lambda_k)_{k=0}^{+\infty}$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел $\lambda_k \in \mathbb{R}_+ (k \in \mathbb{Z}_+)$, де $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$, а $F \in \mathcal{D}(\Lambda, \mathbb{B}^\infty)$, тобто, є формальним випадковим рядом Діріхле вигляду (1).

Через $\sigma_{зб}(F,\omega)$ і $\sigma(F,\omega) := \sigma_a(F,\omega)$ позначимо, відповідно, абсциси збіжності за нормою і абсолютної збіжності, тобто, найбільші значення тих x, що для всіх $\sigma < x$, у першому випадку,

$$\lim_{N\to+\infty} \| F(\sigma+iy) - \sum_{k=0}^{N} f_k(\omega) e^{(\sigma+iy)\lambda_k} \| = 0,$$

а у другому випадку, крім цього, виконується $\sum_{k=0}^{+\infty} \| f_k(\omega) \| e^{\sigma\lambda_k} < +\infty$.

Відомо ([20]–[22]), що для $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ і фіксованого $\omega \in \Omega$

$$\sigma_a(F,\omega) \leq \sigma_{зб}(F,\omega) \leq \alpha_0(F,\omega) := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|f_k(\omega)|}{\lambda_k} \leq \sigma_a(F,\omega) + \tau(\Lambda), \quad (3)$$

де $\tau(\Lambda) := \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\lambda_n}$. Якщо $\tau(\Lambda) = 0$, то для фіксованого $\omega \in \Omega$ звідси негайно маємо $\sigma_{зб}(F,\omega) = \sigma(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega)$.

Якщо послідовність $\mathbf{f}$ є послідовністю незалежних випадкових величин $(f_k(\omega))$, то за законом нуля і одиниці Колмогорова ([10, с.43]) випадкова величина $\sigma(F,\omega)$ є майже напевно (м.н.) сталою, тобто, $\sigma(F,\omega) = \sigma \in [0, +\infty]$ м.н.

У статтях [23, 24] розглядалось питання про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле з класу $\mathcal{D}(\Lambda)$ у випадку $\tau(\Lambda) < +\infty$. Так, у статті [23, теорема 1] доведено, що у випадку, коли $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$, $\tau(\Lambda) < +\infty$, $\varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k} = +\infty$, а для математичних сподівань виконується умова

$$(\exists\alpha > 0)(\forall k \geq 0) \colon \mathbf{M}|Z_k|^\alpha < +\infty, \quad (4)$$

то $\sigma_a(F,\omega) = +\infty$ м.н. Якщо, крім цього, $\overline{\lim}_{k\to+\infty} k/\lambda_k < +\infty$ (звідси випливає, що $\tau(\Lambda) = 0$) і

$$(\exists\beta > 0)(\forall k \geq 0) \colon \mathbf{M}|Z_k|^{-\beta} < +\infty, \quad (5)$$

то ([23, теорема 3]) з умови $\varliminf\limits_{k\to+\infty}\frac{-\ln|a_k|}{\lambda_k}=0$ випливає, що $\sigma_a(F,\omega)=0$ м.н. Не складно зауважити, що те ж саме отримаємо, якщо м.н. для всіх достатньо великих k виконуються нерівності $k^{-\gamma}\le|Z_k(\omega)|<k^{\gamma}$, $\gamma>0$. Останні ж нерівності за лемою Бореля-Кантелі випливають з умов (4) і (5) (що виконуються для всіх досить великих k), наприклад, з $\gamma=\max\{2/\alpha,2/\beta\}$.

Найзагальніше, той самий висновок отримаємо коли

$$\varliminf_{k\to+\infty}\frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k}=0\text{м. н.} \qquad (6)$$

Власне в статті [14] для класу рядів Діріхле $\mathcal{D}$ знаходимо твердження, аналогом якого є таке твердження.

Твердження 1. *Нехай* $\tau(\Lambda)=0$, $F\in\mathcal{D}(\Lambda,\mathbb{B}^{\infty})$ *і має коефіцієнти вигляду* $f_k(\omega)=a_kZ_k(\omega)$, $a_k\in\mathbb{B}$. *Якщо виконується умова (6), то м.н.*

$$\sigma_{\text{зб}}(F,\omega)=\sigma(F,\omega)=\alpha_0:=\varliminf_{k\to+\infty}\frac{-\ln\|a_k\|}{\lambda_k}. \qquad (7)$$

Доведення. Спочатку доведемо, що для фіксованого $\omega\in\Omega$

$$\sigma(F,\omega)\le\sigma_{\text{зб}}(F,\omega)\le\alpha_0(F,\omega):=\varliminf_{k\to+\infty}\frac{-\ln\|f_k(\omega)\|}{\lambda_k}\le\sigma(F,\omega)+\tau(\Lambda), \qquad (8)$$

Нерівність $\sigma(F,\omega)\le\sigma_{\text{зб}}(F,\omega)$ – очевидна. Нехай тепер $x\in(-\infty,\sigma_{\text{зб}}(F,\omega))$ – довільне. Оскільки,

$$\|f_N\|e^{x\lambda_N}\le\|F(x+iy)-\sum_{k=0}^{N}f_ke^{(x+iy)\lambda_k}\|+$$
$$+\|F(x+iy)-\sum_{k=0}^{N-1}f_ke^{(x+iy)\lambda_k}\|\to 0(N\to+\infty),$$

то $-\ln\|f_N\|-x\lambda_N\to+\infty\ \ (N\to+\infty)$, звідки $-\ln\|f_N\|>x\lambda_N(N\to+\infty)$, тому

$$\alpha_0(F,\omega):=\varliminf_{k\to+\infty}\frac{-\ln\|f_k(\omega)\|}{\lambda_k}\ge x.$$

Залишається пригадати, що $x\in(-\infty,\sigma_{\text{зб}}(F,\omega))$ – довільне і спрямувати $x\to\sigma_{\text{зб}}(F,\omega)-0$. Отже, $\sigma_{\text{зб}}(F,\omega)\le\alpha_0(F,\omega)$.

Доведемо тепер, що $\alpha_0(F,\omega)\le\sigma(F,\omega)+\tau(\Lambda)$. Міркуючи від супротивного, припустимо, що $4\varepsilon:=\alpha_0(F,\omega)-\big(\sigma(F,\omega)+\tau(\Lambda)\big)>0$, і виберемо $x=\alpha_0(F,\omega)-\varepsilon-(\tau(\Lambda)+2\varepsilon)$. Тоді, $x=\alpha_0(F,\omega)-\tau(\Lambda)-$ $-3\varepsilon=\sigma(F,\omega)+\varepsilon>\sigma(F,\omega)$. З іншого боку, за означенням $\tau(\Lambda)$, для всіх досить великих $k\ge k_0$ виконується $\lambda_k>\frac{\ln k}{\tau+\varepsilon}$, а за означенням $\alpha_0(F,\omega)$ маємо $-\ln\|f_k(\omega)\|>(\alpha_0(F,\omega)-\varepsilon)\lambda_k$. Тому, для всіх досить великих k $(k\ge k_0)$

$$\|f_k(\omega)\|e^{x\lambda_k}<exp\{(x-\alpha_0(F,\omega)+\varepsilon)\lambda_k\}=\exp\{-(\tau(\Lambda)+2\varepsilon)\lambda_k\}<$$
$$<exp\{-(\tau(\Lambda)+2\varepsilon)/(\tau(\Lambda)+\varepsilon)\ln k\}.$$

Отже, $\sum_{k=0}^{+\infty} \| f_k(\omega) \| e^{x\lambda_k} < +\infty$. Звідси, $\sigma(F,\omega) \geq x > \sigma(F,\omega)$. Суперечність.

Твердження 1 тепер елементарно отримуємо з (8). Справді, за умовою (6), з (8) отримуємо

$$\sigma(F,\omega) = \sigma_{зб}(F,\omega) = \alpha_0(F,\omega) = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln \| f_k(\omega) \|}{\lambda_k} =$$
$$= \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln \| a_k \| - \ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k} =$$
$$= \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln \| a_k \|}{\lambda_k} + \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k} = \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln \| a_k \|}{\lambda_k}.$$

Нескладно зрозуміти, що у випадку $\alpha_0 = +\infty$ для рівності $\sigma_a(F,\omega) = +\infty$ м.н. замість умови $\tau(\Lambda) = 0$ достатньо, щоб $\tau(\Lambda) < +\infty$. Власне, правильне таке твердження.

Твердження 2. *Нехай* $\tau(\Lambda) < +\infty, F \in \mathcal{D}(\Lambda, \mathbb{B}^\infty)$ *і має коефіцієнти вигляду* $f_k(\omega) = a_k Z_k(\omega)$, $a_k \in \mathbb{B}$. *Якщо* $\alpha_0 := \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-ln \| a_k \|}{\lambda_k} + \infty$ *і виконується умова*

$$\varlimsup_{k\to+\infty} \frac{ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k} < +\infty \text{ м. н.},$$

то $\sigma_{зб}(F,\omega) = \sigma(F,\omega) + \infty$ *м.н.*

Доведення. За нерівністю (8) маємо $\sigma(F,\omega) \geq \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln \| f_k(\omega) \|}{\lambda_k} - \tau(\Lambda)$, тому, за умовою, м.н.

$$\sigma(F,\omega) \geq \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln \| a_k \| - \ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k} - \tau(\Lambda) \geq$$
$$\geq \varliminf_{k\to+\infty} \frac{-\ln \| a_k \|}{\lambda_k} - \varlimsup_{k\to+\infty} \frac{\ln|Z_k(\omega)|}{\lambda_k} - \tau(\Lambda) = +\infty.$$

У статтях [16, 18] відзначається, що умову (6) можна замінити умовою на послідовність функцій розподілу випадкових величин $(|Z_k(\omega)|)$.

У статтях [14, 16, 17, 18, 19] у загальному випадку рядів з класу $\mathcal{D}(\Lambda)$ знайдено подібну умову, яка виявляється і у певному сенсі близькою до необхідної, і яка гарантує, що абсциса збіжності ряду Діріхле $F(z,\omega)$ м.н. дорівнює наперед заданому дійсному числу. У цьому пункті метою є встановлення оцінок абсцис збіжності випадкових банаховозначних рядів Діріхле, з яких, зокрема, випливатиме щойно описаний ефект.

Наступний варіант леми Бореля-Кантелі дозволить нам, як і у статтях [14, 16, 17, 18, 19], замість умови сукупної незалежності послідовності випадкових величин використовувати умову їхньої попарної незалежності.

Лема 1. *Нехай* (A_k) *– довільна послідовність подій, тобто,* $A_k \in \mathcal{A}(k \in \mathbb{N})$. *Виконуються наступні твердження:*

1. Якщо збігається ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} \boldsymbol{P}(A_k)$, *то серед подій* (A_k) *з ймовірністю, що дорівнює одиниці, відбувається лише скінченна їх кількість, тобто,* $\boldsymbol{P}(\overline{C}) = 1$, *де* $C := \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} A_k$ *– подія, яка полягає в тому, що серед подій* (A_k) *відбувається нескінченна їх кількість.*

2. ([25]–[27, с.84]) Якщо події (A_k) *попарно незалежні і* $\boldsymbol{P}(\overline{C}) = 1$, *тобто, серед подій* (A_k) *з ймовірністю, що дорівнює одиниці, відбувається лише скінченна їх кількість, то* $\sum_{k=0}^{+\infty} \boldsymbol{P}(A_k) < +\infty$.

Друга частина цієї леми є уточненням добре відомого зі стандартних курсів теорії ймовірностей варіанту леми Бореля-Кантелі (див, наприклад, [10, с.7]), у якій припускається сукупна незалежність подій (A_k).

2. Основні теореми. Далі доведемо спочатку у цьому пункті дві теореми.

Теорема A. *Нехай* $\tau(\Lambda) = 0$ *і* $F \in \mathcal{D}(\Lambda, \mathbb{B}^{\infty})$. *Припустимо, що* $(\| f_k(\omega) \|)$ *– послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу* $F_k(x) := \boldsymbol{P}\{\omega : \| f_k(\omega) \| < x\}, x \in \mathbb{R}, k \geq 0$. *Виконуються наступні твердження:*

а) *Якщо* $\sigma(\omega) = \sigma(F, \omega) \geq \rho \in (-\infty, +\infty)$ *м.н., то*

$$(\forall \varepsilon > 0): \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k((e^{-\rho} + \varepsilon)^{\lambda_k})) < \infty.$$

б) *Якщо існує послідовність* (δ_k) *така, що* $\delta_k > -\infty (k \geq 0)$, $\underline{\lim}_{k \to +\infty} \delta_k = e^{-\rho}$, $\rho \in (-\infty, +\infty]$, *і* $\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k(\delta_k^{\lambda_k})) = +\infty$, *то* $\sigma(F, \omega) \leq \rho$ *м.н.*

Доведення теореми A. Повторюємо схему міркувань з доведення відповідного твердження зі статті [14].

а) Спочатку припустимо, що $\sigma(F, \omega) \geq \rho \in (-\infty, 0]$ м.н., тоді, з (8) при $\tau(\Lambda) = 0$ маємо, що

$$(\exists B \in \mathcal{A}, P(B) = 1)(\forall \omega \in B): \overline{\lim_{k \to +\infty}} \frac{\ln \| f_k(\omega) \|}{\lambda_k} \leq -\rho.$$

За означенням верхньої границі звідси маємо

$$(\forall \omega \in B)(\forall \varepsilon > 0)(\exists k^*(\omega) \in \mathbb{N})(\forall k \geqslant k^*(\omega)): \| f_k(\omega) \| < (e^{-\rho} + \varepsilon)^{\lambda_k},$$

Позначимо $A_k := \{\omega : \| f_k(\omega) \| < (e^{-\rho} + \varepsilon)^{\lambda_k}\}$. Очевидно, що $B \subset C := \bigcup_{N=0}^{\infty} \bigcap_{k=N}^{\infty} A_k$, а подія $\overline{C} := \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k$ полягає в тому, що “серед подій послідовності $(\overline{A}_k)$ відбувається нескінченна їх кількість”. Оскільки $P(C) = 1$, то $P(\overline{C}) = 0$, а з попарної незалежності випадкових величин $(\| f_k(\omega) \|)$ випливає попарна незалежність подій (A_k), то за сформульованою вище другою частиною леми Бореля-Кантелі $\sum_{k=0}^{+\infty} P(\overline{A}_k) < +\infty$. Залишається врахувати, що

$$P(\overline{A}_k) = 1 - F_k((e^{-\rho} + \varepsilon)^{\lambda_k}).$$

Припустимо тепер, що $\sigma(\omega,F)\ge\rho>0$ м.н. Тоді, для ряду Діріхле $F^*(z,\omega)=\sum_{k=0}^{+\infty} f_k^*(\omega)e^{z\lambda_k}$, де $f_k^*(\omega)=f_k(\omega)e^{\rho\lambda_k}$, абсциса збіжності $\sigma^*(\omega)=\sigma(\omega,F)-\rho\ge 0$ м.н., а функція розподілу випадкової величини $\| f_k^*(\omega)\|$ дорівнює $F_k^*(x)=F_k(x\cdot e^{-\rho\lambda_k})$, і тому

$$F_k^*((1+\varepsilon)^{\lambda_k})=F_k((e^{-\rho}+\varepsilon_1)^{\lambda_k}), \varepsilon_1=\varepsilon e^{-\rho}.$$

Ця рівність і завершує доведення цього п.а).

б) Знову, подібно як у статті [14], позначимо $A_k=\{\omega:\| f_k(\omega)\|<\delta_k^{\lambda_k}\}$. Тоді

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(\overline{A}_k)=\sum_{k=0}^{+\infty}(1-F_k(\delta_k^{\lambda_k}))=+\infty$$

і за другою частиною леми Бореля-Кантелі $P(\overline{C})=1$, де $\overline{C}:=\bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}\overline{A}_k$. Звідси,

$$(\forall\omega\in\overline{C})(\forall N\in\mathbb{Z}_+)(\exists k_N(\omega)\ge N):\| f_k(\omega)\|\ge\delta_k^{\lambda_k}(k=k_N(\omega),N\ge 1),$$

тому $-\ln\| f_k(\omega)\|\le-\lambda_k\ln\delta_k(k=k_N(\omega),N\ge 1)$, звідки остаточно м.н.

$$\sigma(F,\omega)=\underline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{-\ln\| f_k(\omega)\|}{\lambda_k}\le\underline{\lim}_{\substack{N\to+\infty,\\ k=k_N(\omega)}}\frac{-\ln\| f_k(\omega)\|}{\lambda_k}\le-\underline{\lim}_{k\to+\infty}\ln\delta_k=\rho.$$

Теорема Б. *Нехай* $\tau(\Lambda)=0$ *і* $F\in\mathcal{D}(\Lambda,\mathbb{B}^\infty)$. *Припустимо, що* $(\| f_k(\omega)\|)$ *– послідовність випадкових величин з функціями розподілу* $F_k(x):=\boldsymbol{P}\{\omega:\| f_k(\omega)\|<x\}$, $x\in\mathbb{R},k\ge 0$. *Виконуються наступні твердження:*

а) *Якщо існують* $\rho\in(-\infty,+\infty)$, $\varepsilon>0$ *такі, що* $\sum_{k=0}^{+\infty}(1-F_k(e^{(-\rho+\varepsilon)\lambda_k}))<\infty$, *то* $\sigma(F,\omega)\ge\rho-\varepsilon$ *м.н.*

б) *Якщо* $\sigma(F,\omega)=-\infty$ *м.н., то* $(\forall E>1):\sum_{k=0}^{+\infty}(1-F_k(E^{\lambda_k}))=+\infty$.

Доведення теореми Б.

а) Подібно, як і у статті [14], позначимо

$$A_k=\{\omega:\| f_k(\omega)|<e^{(-\rho+\varepsilon)\lambda_k}\}.$$

Оскільки $1-F_k\left(e^{(-\rho+\varepsilon)\lambda_k}\right)=P\left(\overline{A}_k\right)$, то з умови $\sum_{k=0}^{+\infty}(1-$ $-F_k(e^{(-\rho+\varepsilon)\lambda_k})<\infty$ отримаємо, що $\sum_{k=0}^{+\infty}P(\overline{A}_k)<\infty$, і за першою частиною леми Бореля-Кантелі $P(\overline{C})=0$, де $\overline{C}:=\bigcap_{N=0}^{\infty}\bigcup_{k=N}^{\infty}\overline{A}_k$. Звідси $P(C)=1$, $C:=\bigcup_{N=0}^{\infty}\bigcap_{k=N}^{\infty}A_k$ Тому, для кожного $\omega\in C$ існує $k=k^*(\omega)$ таке, що $\omega\in A_k$ для всіх $k\ge k^*(\omega)$, тобто $(\forall k\geqslant k^*(\omega)):\| f_k(\omega)\|<e^{(-\rho+\varepsilon)\lambda_k}$. Звідки

$$\sigma(F,\omega)=\underline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{-\ln\| f_k(\omega)\|}{\lambda_k}\ge-\overline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{\ln(e^{(-\rho+\varepsilon)\lambda_k})}{\lambda_k}=\rho-\varepsilon\quad\text{м. н.}$$

б) За умовою маємо, що $\sigma(F,\omega)=-\infty$ м.н. Тому, за означенням верхньої границі $\overline{\lim}_{k\to+\infty}\frac{\ln\| f_k(\omega)\|}{\lambda_k}=+\infty$ м. н. маємо, що

$$(\exists B\in\mathcal{A},\quad P(B)=1)(\forall\omega\in B)(\forall E>1)(\forall N\in\mathbb{Z}_+)(\exists k_N(\omega)\ge$$
$$\ge N,k_N(\omega)\in\mathbb{N}):\| f_k(\omega)\|\ge E^{\lambda_k}(k=k_N(\omega)).$$

Останнє означає, що $B \subset \overline{C} := \bigcap_{N=0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} \overline{A}_k$, де $\overline{A}_k = \{\omega : \| f_k(\omega) \| \geq E^{\lambda_k}\}$, звідки, $P(\overline{C}) = 1$. Звідси, за першою частиною леми Бореля-Кантелі отримуємо, що $\sum_{k=0}^{\infty} P(\overline{A}_k) = +\infty$.

Але виконується рівність $P(\overline{A}_k) = 1 - F_k(E^{\lambda_k})$. Тому, теорему Б повністю доведено.

3. Деякі наслідки. Отримаємо кілька наслідків з доведених вище теорем.

Твердження 3. *Нехай* $f \in \mathcal{D}(\Lambda, \mathbb{B}^{\infty})$, *а випадкові величини* $(\| f_k(\omega) \|)$ *– попарно незалежні. Якщо існують додатні випадкові величини* $a(\omega)$, $b(\omega)$ *такі, що*

$$(\exists k_0 \in \mathbb{Z}_+)(\forall x \geq 0)(\forall k \geq k_0) : F_k(x) \leq F_a(x) := P\{\omega : a(\omega) < x\} \wedge$$
$$F_k(x) \geq F_b(x) := P\{\omega : b(\omega) < x\}, F_a(+0) < 1 \text{ та}$$
$$(\forall \varepsilon > 0) : \mathbf{M}(n_\Lambda(\tfrac{\ln b}{1+\varepsilon})) < +\infty, \tag{9}$$

де $n_\Lambda(\mathrm{t}) := \sum_{\lambda_k \leq t} 1$ – лічильна функція послідовності Λ, то $\sigma(F, \omega) = 0$ м.н.

Доведення. Перевіримо спочатку, що можна застосувати п. б**)** теореми А. Оскільки для $\delta_k = (\lambda_k)^{-1/\lambda_k}$ маємо $\delta_k \to 1 - 0$, $\delta_k^{\lambda_k} \to 0 (k \to +\infty)$, то $\rho = 0$ і для всіх досить великих $k (k \geq k_0)$, $1 - F_a(\delta_k^{\lambda_k}) \geq 1 - F_k(\delta_k^{\lambda_k}) \geq 1 - (1 + F_a(+0))/2 = (1 - F_a(+0))/2 > 0$, звідки,

$$\sum_{k=k_0}^{+\infty} (1 - F_k(\delta_k^{\lambda_k})) \geq \sum_{k=k_0}^{+\infty} \frac{1 - F_a(+0)}{2} = +\infty,$$

тобто, умови п. б**)** теореми А виконуються і тому $\sigma(F, \omega) \leq 0 \text{м. н.}$

Доведемо тепер протилежну нерівність. Переконаємось в тому, що можна застосувати п. а**)** теореми Б. Зауважимо, що

$$\mathbf{M}\left(n_\Lambda\left(\frac{\ln b}{1+\varepsilon}\right)\right) = \int_0^{+\infty} n_\Lambda\left(\frac{\ln x}{1+\varepsilon}\right) dF_b(x) =$$
$$= -n_\Lambda(t)(1 - F_b((1+\varepsilon_0)^t))|_{-\infty}^{+\infty} +$$
$$+ \int_0^{+\infty} (1 - F_b((1+\varepsilon_0)^t)) dn_\Lambda(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_b((1+\varepsilon_0)^{\lambda_k})),$$

де $\varepsilon_0 = e^{1+\varepsilon} - 1$. Тоді з умов нашого твердження 3 випливає, що для будь-якого $\varepsilon_1 > 0$:

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_b(e^{\varepsilon_1 \lambda_k})) < +\infty.$$

Справді, для цього досить вибрати $\varepsilon_1 = \ln(1+\varepsilon_0)$, бо тоді $e^{\varepsilon_1 \lambda_k} = (1+\varepsilon_0)^{\lambda_k}$. Тобто, отримуємо, що виконується умова п. а**)** теореми Б з $\rho = 0$. Тоді, застосування теореми Б доводить, що $\sigma(F, \omega) \geq -\varepsilon_1$ м.н.

Нехай тепер $B_1 = \{\omega: \sigma(F,\omega) \le 0\}, \mathbf{P}(B_1) = 1, B = B(\varepsilon_1) = = \{\omega: \sigma(F,\omega) \ge -\varepsilon_1\}, \mathbf{P}(B) = 1.$ Виберемо далі $\varepsilon_1 = \frac{1}{k}(k \ge 2)$, $B_k = B(\varepsilon_1)$, $B_0 = \bigcap_{k=1}^{+\infty} B_k$. Зауважимо, що $\mathbf{P}(B_0) = 1$. Тому, для кожного $\omega \in B_0$ і для всіх $k \ge 2$ виконується $-\frac{1}{k} \le \sigma(F,\omega) \le 0$. Залишається спрямувати $k \to +\infty$.

Наслідок 1. *Нехай* $f \in \mathcal{D}(\Lambda, \mathbb{B}^\infty)$, *а випадкові величини* $(\| f_k(\omega) \|)$ *– попарно незалежні. Якщо існують додатні випадкові величини* $a(\omega)$, $b(\omega)$ *такі, що*

$$(\exists k_0 \in \mathbb{Z}_+)(\forall x \ge 0)(\forall k \ge k_0): F_k(x) \le F_a(x) := = P\{\omega: a(\omega) < x\} \wedge F_k(x) \ge F_b(x) := P\{\omega: b(\omega) < x\}, F_a(+0) < 1$$

та $(\exists\ \alpha, \beta \in (0, +\infty)): n_\Lambda(t) \le \beta t^\alpha (t \ge t_0), \mathbf{M}((\ln^+ b)^\alpha) < +\infty,$ то $\sigma(F,\omega) = 0$ м.н.

Доведення. Оскільки за умовою

$$\mathbf{M}(n_\Lambda(\frac{\ln b}{1+\varepsilon})) \le \mathbf{M}(\beta(\frac{\ln b}{1+\varepsilon})^\alpha) = \frac{\beta}{(1+\varepsilon)^\alpha}\mathbf{M}((\ln b)^\alpha) < +\infty,$$

то умови твердження 3 виконуються. Залишається скористатися цим твердженням.

Якщо $\lambda_k \equiv k$, то можна вибрати $\alpha = 1$ і звідси отримаємо теорему 2.1 з [13], доведену там для звичайних степеневих рядів з незалежними в сукупності однаково розподіленими коефіцієнтами.

Відзначимо наступний простий наслідок у випадку, коли $(\| f_k(\omega) \|)$ є послідовністю попарно незалежних випадкових величин з однією і тією ж функцією розподілу (“половина” стандартного розподілу Коші)

$$F_k(x) \equiv F_{\mathcal{K}}(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Вибираючи $F_a(x) = F_b(x) = F_{\mathcal{K}}(x)$, за наслідком 1 отримуємо таке твердження.

Наслідок 2. *Нехай* $f \in \mathcal{D}(\Lambda, \mathbb{B}^\infty)$, *а випадкові величини* $(\| f_k(\omega) \|)$ – *попарно незалежні однаково розподілені з функцією розподілу* $F_{\mathcal{K}}(x)$. *Якщо* $(\exists\ \alpha, \beta \in (0, +\infty)): n_\Lambda(t) \le \beta t^\alpha (t \ge t_0)$,то $\sigma(F,\omega) = 0$ м.н.

Доведення. Перевіримо виконання умов наслідку 1. Справді, $F_{\mathcal{K}}(+0) = 0$, а за умовою

$$\mathbf{M}((\ln^+ b)^\alpha) = \frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty} \frac{(\ln^+ x)^\alpha}{1+x^2}dx < +\infty.$$

Залишається пригадати, що умова $\big(\exists\ \alpha, \beta \in (0, +\infty)\big): n_\Lambda(t) \le \le \beta t^\alpha (t \ge t_0)$, є умовою наслідку 1.

Сформулюємо інший наслідок у випадку, коли попарно незалежні випадкові величини $(\| f_k(\omega) \|)$ мають, взагалі кажучи, різні експоненційні розподіли.

Наслідок 3. *Нехай* $f \in \mathcal{D}(\Lambda, \mathbb{B}^{\infty})$*, а випадкові величини* $(\| f_k(\omega) \|)$ *– попарно незалежні з функціями розподілу*

$$F_k(x) = F_{\beta_k}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\beta_k x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Якщо існують $a, b > 0$ *такі, що* $b \leq \beta_k \leq a$*, а також* $(\exists\ \alpha, \beta \in (0, +\infty)) \colon n_\Lambda(t) \leq \beta t^{\alpha} (t \geq t_0)$*, то* $\sigma(F, \omega) = 0$ *м.н.*

Доведення. Перевіримо виконання умов наслідку 1. Для цього виберемо в наслідку $1 F_a(x) = F_\beta(x)$ при $\beta = a$ і $F_b(x) = F_\beta(x)$ при $\beta = b$. Тоді, $F_a(+0) = 0$, а за умовою

$$\mathbf{M}((\ln^+ b)^{\alpha}) = b \int_0^{+\infty} (\ln^+ x)^{\alpha} e^{-bx} dx < +\infty.$$

Залишається знову пригадати, що умова $\big(\exists\ \alpha, \beta \in (0, +\infty)\big) \colon n_\Lambda(t) \leq$ $\leq \beta t^{\alpha} (t \geq t_0)$, є умовою наслідку 1.

Сформулюємо таку теорему для банахово-значних степеневих рядів з класу $\mathcal{K}(\mathbf{m})$. Вона отримується простим переформулюванням доведеної вище теореми А.

Теорема B. *Припустимо, що* $f \in \mathcal{K}(\boldsymbol{m})$ *і має вигляд (2), а* $(\| f_k(\omega) \|)$ *– послідовність попарно незалежних випадкових величин з функціями розподілу* $F_k(x) := P\{\ \omega \colon \| f_k(\omega) \| < x\},\ x \in \mathbb{R}, k \geq 0.$ *Тоді виконуються такі два твердження:*

а) Якщо $R(\omega) = R(\omega, \mathbf{m}) \geq \rho \in (0, +\infty)$ м.н., то $(\forall \varepsilon > 0)$: $\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k((1/\rho + \varepsilon)^{m_k})) < \infty (\rho \in (0, +\infty))$.

б) Якщо існує послідовність (δ_k) така, що $\delta_k > 0 (k \geq 0)$, $\delta_k \to 1/\rho (k \to +\infty), \rho \in [0, +\infty)$, і $\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k(\delta_k^{m_k})) = +\infty$, то $R(\omega, \mathbf{m}) \leq \rho$ м.н.

Нескладно подібно переформулювати і твердження теореми 2.

Сформулюємо ще ряд тверджень, які можна трактувати, як наслідки для класу $\mathcal{K}(\mathbf{m})$, доведених вище тверджень і наслідків.

Твердження 4. *Нехай* $f \in \mathcal{K}(\boldsymbol{m})$ *і* $(\| f_k(\omega) \|)$ *попарно незалежні. Тоді:*

1^0. *якщо існує* $(\delta > 0)$ *така, що* $sup\{F_k(\delta) \colon k \in \mathbb{Z}_+\} := \Delta < 1$*, тоді* $R(\omega, \boldsymbol{m}) \leq 1$ *м.н.*

2^0. *якщо існує додатна випадкова величина* $a(\omega)$ *така, яка* $(\forall x \geq 0)(\forall k \in \mathbb{Z}_+) \colon F_k(x) \leq F_a(x) := P\{\omega \colon a(\omega) < x\}$ *і* $F_a(+0) < 1$*, тоді* $R(\omega, \boldsymbol{m}) \leq 1$ *м.н.*

Доведення твердження 4. 1^0. зважаючи на те, що

$$1 - F_k\big(\delta_k^{m_k}\big) = 1 - F_k(\delta) \geq 1 - \Delta$$

для $\delta_k = \delta^{1/m_k}$ за п. b) з теореми B отримуємо твердження пункту 1^0.

2^0. Досить зазначити, що з умов випливає, що існує $\delta > 0$ таке що $F_a(\delta) < 1$ і тому $\Delta = \sup\{F_k(\delta) \colon k \in \mathbb{Z}_+\} \leq F_a(\delta) < 1$. Отже, п. 2^0 отримуємо з п. 1^0.

Твердження 5. *Нехай* $f \in \mathcal{K}(\boldsymbol{m})$. *Якщо існує додатна випадкова величина* $b(\omega)$ *така, що*

$$(\forall x \geq 0)(\forall k \in \mathbb{Z}_+): F_k(x) \geq F_b(x) := P\{\omega: b(\omega) < x\}$$

і для кожного $\varepsilon > 0$, $\int_0^{+\infty} C(\frac{lnx}{1+\varepsilon})\ dF_b(x) < +\infty$, *де* $C(t) = \sum_{m_k \leq t} 1$ *– лічильна функція послідовності* $\boldsymbol{m} = (m_k)$, *тоді* $R(\omega, \boldsymbol{m}) \geq 1$ *м.н.*

Наслідок 4. *Нехай* $f \in \mathcal{K}(\boldsymbol{m})$ *і* $(\| f_k(\omega) \|)$ *є попарно незалежні. Якщо* $(\exists \delta > 0): sup\{F_k(\delta): k \in \mathbb{Z}_+\} := \Delta < 1$, *і існує послідовність* $(\varepsilon_k): \varepsilon_k \to +0 (k \to +\infty)$ *і* $\sum_{k=0}^{+\infty} (1 - F_k((1+\varepsilon_k)^{m_k})) < \infty$, *тоді* $R(\omega, \boldsymbol{m}) = 1$ *м.н.*

Наслідок 5. *Нехай* $f \in \mathcal{K}(\boldsymbol{m})$ *і* $(\| f_k(\omega) \|)$ *попарно незалежні. Якщо існують додатні випадкові величини* $a(\omega)$ *і* $b(\omega)$ *як у твердженні 4 і 5, то* $R(\omega, \boldsymbol{m}) = 1$ *м.н.*

Зауваження 1. Наслідок 4 встановлений у випадку звичайних лакунарних степеневих рядів з незалежними в сукупності коефіцієнтами однаково розподілених випадкових величин (тобто $F_k \equiv F$) у статті Арнолда [11], а наслідок 5 у випадку $m_k = k (k \geq 0)$ у статті Ротерса [13].

Література

1. Conway J.B. A Course in Functional Analysis. New York: Springer, 1985.
2. Ryan R. *Boundary values of analytic vector valued functions*, Proc. Koninkl. Nederl. Akad., Ser. A., **65** (1962), no. 5, 558–572. https://doi.org/10.1016/S1385-7258(62)50056-5
3. Grossetete C. *Sur certaines classes de fonctions harmoniques dans le disque a valeur dans un espace vectoriel topologique localement convexe,* C. R. Acad. Sc. Paris, **273** (1971), no. 22, 1048–1051.
4. Grossetete C. *Classes de Hardy et de Nevanlinna pour les fonctions holomorphes a valeurs vectorielles,* C. R. Acad. Sc. Paris, **274** (1972), no. 3, 251–253.
5. Kumar N., Manocha G. *On a class of entire functions represented by Dirichlet series,* J. Egyptian Math. Soc., **21** (2013), 21–24 http://dx.doi.org/10.1016/j.joems.2012.10.008
6. Chutani L., Kumar N., Manocha G. *On a class of vector-valued entire Dirichlet series in n variables*, Acta Comment. Univ. Tartu. Math., **22** (2018), no. 1, 3–12.
7. Choi Y. S., Kim U. Y., Maestre M. *Banach spaces of general Dirichlet series,* J. Math. Anal. Appl., **465** (2018), no. 2, 839–856. https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2018.05.036
8. Andreas Defant D., Schoolmann I. *Hardy spaces of general Dirichlet series –- a survey*, arXiv:1902.02073v1 [math.FA] 6 Feb 2019, 1–28.
9. Carando D., Germán I., Defant A., Marceca F., Schoolmann I. *Vector-valued general Dirichlet series*, Stud. Math. **258** (2021), 269–316. DOI: 10.4064/sm200127-24-4

10. Kahane J.–P. Some random series of functions. 2nd. ed. Cambridge stud. in adv. math. 5. Cambridge Univ. Press, 1985, 308 p.
11. Arnold L. *Über die Konverge einer zufälligen Potenzreihe,* J. Reine Angew. Math., **222** (1966), 79–112.
12. Arnold L. *Konvergenzprobleme bei zufälligen Potenzreihen mit Lücken*, Math. Zeitschr, **92** (1966), 356–365.
13. Roters K. *Convergence of random power series with pairwise independent Banach-space-valued coefficients,* Statistics and Probability Letters, **18** (1993), P.121–123.
14. Скасків О.Б., Шаповаловська Л.О. *Про абсциси збіжності випадкових рядів Діріхле,* Буков. матем. журн. **3** (2015), №1, 110–114.
15. Shapovalovska L.O., Skaskiv O.B. *On the radius of convergence of random gap power series,* Int. J. Math. Analysis, **9** (2015), № 38, 1889–1893. http://dx.doi.org/10.12988/ijma.2015.53115
16. Kuryliak A.O., Skaskiv O.B., Stasiv O.Yu. *On the convergence of Dirichlet series with random exponents,* Int. Journal of Appl. Math. – 2017. – V.30, №3. – P.229–238.
17. Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. *Абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками,* Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2017. – Вип.84. – С.96–112.
18. Куриляк А.О., Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. *Про абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками і коефіцієнтами,* Буков. матем. журн. – 2017. – Т.5, 3–4. – С.90–97.
19. Скасків О.Б., Стасів Н.Ю. *Абсциси збіжності рядів Діріхле з випадковими показниками,* Вісн. Львів. ун-ту, сер. мех.-мат. – 2018. – Вип.85. – С.66–82.
20. Mandelbrojt S. Dirichlet series: principles and methods, Reidelm, Dordrecht, 1972.
21. Шеремета М.М. Цілі ряди Діріхле. – К.: ІСДО, 1993.
22. Задорожна О.Ю., Скасків О.Б. *Елементарні зауваження про абсциси збіжності інтегралів Лапласа-Стілт'єса,* Буков. матем. журн., **1** (2013), №3-4, 45–50.
23. Tian F. *Growth of random Dirichlet series,* Acta Math. Sci. – 2000. V.20, №3. – P.390–396.
24. Ding X., Xiao Y. *Natural boundary of random Dirichlet series,* Укр. матем. журн. – 2006. – Т.58, №7. – С.997–1005.
25. Erdős P., Rényi A. *On Cantor's series with convergent* $\sum 1/q_n$ // Ann. Univ. Sci. Budapest Eőtvős. Sect. Math. – 1959. – V.2. – P.93–109.
26. Petrov V.V. Sums of idependent random variables. – New York: Springer, 1975.
27. Billingsley P. Probability and measure. – New York: Wiley, 1986.

Стаття надійшла до редакційної колегії 02.11.2022 р.

RANDOM BANACH-VALUED DIRICHLET SERIES WITH A INCREASING DETERMINISTIC SEQUENCE OF POSITIVE EXPONENTS

M. R. Kuryliak, O. B. Skaskiv
Ivan Franko National University of Lviv; 79000, 1 Universytetska street, Lviv, Ukraine; E-mail: olskask@gmail.com,mega_shim@ukr.net

The article deals with random Dirichlet series of the form $F_\omega(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(\omega)e^{z\lambda_k}$, where (λ_k) is some sequence such that $0 = \lambda_0 < \lambda_k < \lambda_{k+1} \to +\infty (1 \le k \to +\infty)$, and $(f_k(\omega))_{k=0}^{+\infty}$ is a sequence of random variables on the probability space $(\Omega, \mathcal{A}, \boldsymbol{P})$ such that each mapping $f_k(\omega)\colon \Omega \to \mathbb{B}$ is such that $\| f_k(\omega) \|$ is a measurable function with respect to pairs of σ-algebras $\mathcal{A}$ and $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, where $(\mathbb{B}, \|\cdot\|)$ is complex-valued Banach space. The main statements of the paper are Theorems 1 and 2 and concern the estimates of the abscissas of convergence of the above series.

Keywords: *formal Dirichlet series, random coefficients, complex valued Banach space, convergence abscissa, absolute convergence abscissa.*