УДК 517.9

ЗАСТОСУВАННЯ ДО ТЕОРІЇ КЕРУВАННЯ НЕТЕРОВОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ

Л. М. Шегда

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

Отримано умову, коли нерозв'язну крайову задачу можна зробити розв'язною за допомогою неоднорідності в диференціальній системі, в припущенні, що вироджена система зводиться до центральної канонічної форми.

Ключові слова: *канонічна форма, вироджена нетерова крайова задача, псевдообернена матриця.*

Розглядається крайова задача

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + u, \qquad u \in R^n, \quad t \in [a;b], \tag{1}$$

$$l\,x(\cdot) = \alpha, \qquad \alpha \in R^m, \tag{2}$$

де $A(t), B(t)$ – $(n \times n)$-вимірні матриці, компоненти яких є дійсними, достатню кількість раз неперервно диференційованими на $[a;b]$ функціями: $A(t), B(t) \in C^{3q-2}[a;b]$ (значення величини q визначається згідно теореми 2.1 [1]); $\det B(t) = 0\ \forall t \in [a;b]$; u – n-вимірний вектор-стовпець, постійне керування; α – m-вимірний вектор-стовпець констант; $\alpha \in R^m$; l – лінійний векторний функціонал, визначений на просторі n-вимірних, неперервних на $[a;b]$ вектор-функцій: $l = \mathrm{col}(l_1, ..., l_m) : C[a;b] \to R^m$, $l_i : C[a;b] \to R$.

Нерозв'язну крайову задачу (1), (2) можна зробити розв'язною як за допомогою неоднорідності в крайовій умові так і за допомогою неоднорідності в диференціальній системі. Знайдемо умову на постійне керування u, при якому дана крайова задача (1), (2) буде розв'язною при довільних неоднорідностях $\alpha \in R^m$.

Згідно теореми 1 [2] породжуючи крайова задача

$$B(t)\frac{dx}{dt} = A(t)x + f(t), \qquad t \in [a;b] \tag{3}$$

$$l\,x(\cdot) = \alpha, \qquad \alpha \in R^m, \tag{4}$$

має r-параметричне сімейство лінійно незалежних розв'язків

$$x(t,c_r)=X_r(t)c_r+X_{n-s}(t)Q^{+}\alpha+(Gf)(t),\quad \forall\, c_r\in R^{r}, \tag{5}$$

тоді і тільки тоді, коли неоднорідності $f(t)\in C^{q-1}[a,b]$ в диференціальній системі та $\alpha\in R^{m}$ в крайовій умові задовольняють d лінійно незалежним умовам:

$$P_{Q_d^*}\left(\alpha-l\left(\int_a^{\cdot}X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^{*}(\tau)f(\tau)d\tau-\right.\right. \tag{6}$$

$$\left.\left.-\Phi(\cdot)\left[\sum_{k=o}^{q-1}I^{k}\frac{d^{k}}{dt^{k}}\left[\Psi^{*}(t)L\Phi(t)\right]^{-1}\right](\cdot)\Psi^{*}(\cdot)f(\tau)\right)\right)=0,\quad (d=m-n_1).$$

Система (3) така, що невиродженим лінійним перетворенням зводиться до центральної канонічної форми [1;3].

Використаємо необхідну і достатню умову (6) розв'язності крайової задачі (3), (4) і запишемо її у вигляді

$$P_{Q_d^*}\left(\alpha-l\left(\int_a^{\cdot}X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^{*}(\tau)u\,d\tau-\Phi(\cdot)\left[\sum_{k=o}^{q-1}I^{k}\frac{d^{k}}{dt^{k}}\left[\Psi^{*}(t)L\Phi(t)\right]^{-1}\right](\cdot)\Psi^{*}(\cdot)u\right)\right)=0.$$

Отримаємо алгебраїчну систему відносно u

$$P_{Q_d^*}l\left(\int_a^{\cdot}X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^{*}(\tau)d\tau-\Phi(\cdot)\left[\sum_{k=o}^{q-1}I^{k}\frac{d^{k}}{dt^{k}}\left[\Psi^{*}(t)L\Phi(t)\right]^{-1}\right](\cdot)\Psi^{*}(\cdot)\right)u=P_{Q_d^*}\alpha,$$

яку запишемо у вигляді

$$Ku=D\alpha, \tag{7}$$

де $P_{Q_d^*}:=D$ – $(d\times m)$-вимірна матриця;

$$K:=P_{Q_d^*}l\left(\int_a^{\cdot}X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^{*}(\tau)d\tau-\Phi(\cdot)\left[\sum_{k=o}^{q-1}I^{k}\frac{d^{k}}{dt^{k}}\left[\Psi^{*}(t)L\Phi(t)\right]^{-1}\right](\cdot)\Psi^{*}(\cdot)\right)\right)-$$

$(d\times n)$-вимірна матриця.

Система (7) згідно [4] розв'язною тоді і тільки тоді, коли її вільний член $[D\alpha]$ належить ортогональному доповненню $N^{\perp}(K^{*})=R(K)$ підпростору $N(K^{*})$, тобто

$$P_{K^*}D\alpha=0, \tag{8}$$

де $P_{K^*}=I_d-KK^{+}$ – $(d\times d)$-вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^{d} на нуль-простір $N(K^{*})$ матриці K^{*}:

$$P_{K^*}:R^{d}\to N(K^{*}),\qquad N(K^{*})=P_{K^*}R^{d}.$$

Оскільки $rank\,P_{K^*}=d_1=d-rank\,K$, то матрицю P_{K^*} можна замінити $(d_1\times d)$-вимірною матрицею $P_{K_{d_1}^*}$, рядки якої складаються з повної системи d_1 лінійно незалежних рядків матриці P_{K^*}. Отже, необхідною і достатньою умовою розв'язності системи (7), а отже і крайової задачі (1), (2) є d_1 лінійно незалежних умов

$$P_{K^*_{d_1}} D\alpha = 0.$$

Якщо остання умова виконується, то розв'язок системи (7) має вигляд

$$u = K^+ D\alpha + P_{K_{r_1}} c_{r_1} \qquad \forall c_{r_1} \in R^{r_1},$$

де K^+ − єдина псевдообернена за Муром-Пенроузом до K матриця; $P_K = I_n - K^+ K$ – $(n \times n)$-вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^n на нуль-простір $N(K)$ матриці K:

$$P_K : R^n \to N(K), \qquad N(K) = P_K R^n.$$

Оскільки $rank\, P_K = r_1 = n - rank\, K$, то матрицю P_K можна замінити $(n \times r_1)$-вимірною матрицею $P_{K_{r_1}}$, стовпці якої складаються з повної системи r_1 лінійно незалежних стовпців матриці P_K, що дозволяє виділити максимальне число лінійно незалежних розв'язків.

Таким чином, справедливе наступне твердження.

Теорема. *Крайова задача (1), (2) буде розв'язною тоді і тільки тоді, коли постійне керування u дорівнює*

$$u = K^+ D\alpha + P_{K_{r_1}} c_{r_1} \qquad \forall c_{r_1} \in R^{r_1}$$

для тих $\alpha \in R^m$, які задовольняють умові $P_{K^*_{d_1}} D\alpha = 0$.

Література

1. Самойленко А.М. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженнями / А.М.Самойленко, М.І.Шкіль, В.П.Яковець. – К.: Вища школа, 2000. – 294 с.
2. Бойчук О.А. Вироджені нетерові крайові задачі / О.А.Бойчук, Л.М.Шегда // Нелінійні коливання. – 2007. – Т.10, №3. – С. 303-312.
3. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / Ю.Е.Бояринцев. – Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1980. – 222 с.
4. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р.Гантмахер. – М.: Наука, 1967. – 572 с.

Стаття поступила в редакційну колегію 10.12.2013 р.

Рекомендовано до друку к. ф-м. н., доцентом ***Гургулою С.І.,***

д.ф.-м.н., професором ***Бойчуком О. А.*** *(м. Київ)*

APPLICATION TO MANAGEMENT THEORY NOETHERIAN BOUNDARY PROBLEM

L. M. Shegda

Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

A condition when the unresolved boundary value problem can be done solutions by means of heterogeneity in the differential system, Assuming that the degenerate system differential equations leads to the central canonical form.

Key words: *canonical form, degenerate Noether BVP, pseudoinverse matrices.*