УДК 517.925.3

ПРО СТІЙКІСТЬ ТРИВІАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНІЄЇ СИСТЕМИ З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

С. І. Гургула
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

Вивчається питання стійкості тривіального розв'язку лінійної однорідної системи другого порядку з постійними коефіцієнтами, яка піддається імпульсній дії при досягненні траєкторією деякої прямої, що проходить через початок координат.

Ключові слова: *лінійна однорідна система другого порядку, імпульсна дія, стійкість.*

Розглядається лінійна система диференціальних рівнянь другого порядку з імпульсною дією виду

$$\begin{gathered} \frac{dx}{dt} = Ax, \quad x \notin l, \\ \Delta x\big|_{x\in l} \equiv x(t+0) - x(t) = Bx, \end{gathered} \tag{1}$$

де $x = (x_1, x_2)$, $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ – дійсні сталі квадратні матриці другого порядку, l – деяка пряма в площині Ox_1x_2, що проходить через початок координат. Досліджуватимемо питання стійкості за Ляпуновим тривіального розв'язку такої системи.

Сам процес відбувається наступним чином: точка рухається траєкторією, яка описується розв'язком системи $\frac{dx}{dt} = Ax$, до моменту часу t_0, коли вона попадає на пряму l. В цей момент точка «миттєво» перекидається із положення $x(t_0)$ в положення $x(t_0+0) = x(t_0) + Bx(t_0) = (E+B)x(t_0)$ (E – одинична матриця другого порядку) і далі рух знову відбувається вздовж кривої, що описується розв'язком системи $\frac{dx}{dt} = Ax$ до нової зустрічі з прямою l і т.д.

Зрозуміло, що образи всіх точок прямої l при дії оператора, заданого матрицею $E+B$, утворюють нову пряму l_1, яка теж проходить через початок координат і рівняння якої неважко одержати. А саме, якщо рівняння прямої l є $k_1x_1 + k_2x_2 = 0$, то рівняння прямої l_1 матиме вид

$$((1+b_{22})k_1 - b_{21}k_2)x_1 + ((1+b_{11})k_2 - b_{12}k_1)x_2 = 0.$$

Питання стійкості тривіального розв’язку системи (1) вирішуватиметься, очевидно, в залежності від власних значень матриці A. У випадку, коли ці власні значення дійсні, питання вирішується просто. Тому далі вважаємо, що власні значення матриці A комплексні; при цьому, до речі, всі траєкторії системи $\frac{dx}{dt} = Ax$ попадають на пряму l.

В системі (1) зручно перейти до полярних координат r, φ: $x_1 = r\cos\varphi$, $x_2 = r\sin\varphi$, яка при цьому набуває вигляду

$$
\begin{aligned}
&\frac{dr}{dt} = r\left(a_{11}\cos^2\varphi + (a_{12} + a_{21})\cos\varphi\sin\varphi + a_{22}\sin^2\varphi\right),\\
&\frac{d\varphi}{dt} = a_{21}\cos^2\varphi + (a_{22} - a_{11})\cos\varphi\sin\varphi - a_{12}\sin^2\varphi, \quad \varphi \neq \varphi_0 + n\pi,\\
&\Delta r\big|_{\varphi=\varphi_0+n\pi} = (k-1)r,\\
&\Delta\varphi\big|_{\varphi=\varphi_0+n\pi} = \beta,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

де $n = 1, 2, \ldots$, φ_0 – кут, який складає пряма l з віссю Ox_1, $\beta = \pm\alpha$, де α кут між прямими l і l_1, k – коефіцієнт, який залежить від матриці B і може бути знайдений за формулою

$$k = \frac{\sqrt{\left((1+b_{11})k_2 - b_{12}k_1\right)^2 + \left((1+b_{22})k_1 - b_{21}k_2\right)^2}}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}.$$

Зауважимо, що праві частини рівнянь системи (2) містять квадратичні форми від $\cos\varphi$, $\sin\varphi$, задані матрицями

$$A^H = \frac{1}{2}\left(A + A^T\right), \quad A' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a_{21} & a_{22} - a_{11} \\ a_{22} - a_{11} & -2a_{12} \end{pmatrix}.$$

Позначимо λ_1 і Λ_1 – відповідно менше і більше власні значення матриці A^H. Зауважимо далі, що якщо власні значення матриці A комплексні, то власні значення матриці A' одного знаку, звідки випливає, що похідна $\frac{d\varphi}{dt}$ зберігає знак, отже будь-яка траєкторія, де б вона не починалась, попаде на пряму l.

Тривіальний розв’язок системи (1) буде стійким за Ляпуновим, якщо для всякого $\varepsilon > 0$ знайдеться таке $\delta > 0$, що для будь-якого розв’язку системи, який починається в момент часу t_0 в точці (r_0, φ_0), де $r_0 < \delta$, виконується умова $r(t) < \varepsilon$ для всіх $t \geq t_0$. Цей розв’язок буде асмптотично стійким, якщо він стійкий і існує таке $\delta_0 > 0$, що для всякого розв’язку $r(t)$, для якого $r(t_0) < \delta_0$, виконана умова $r(t) \to 0$ при $t \to +\infty$.

Має зміст розглянути випадки: $\frac{d\varphi}{dt}$ і β одного знаку, $\frac{d\varphi}{dt}$ і β різних знаків. Не обмежуючи загальності, вважаємо, що $\frac{d\varphi}{dt} > 0$. Це означає, що власні значення матриці A' додатні, позначимо їх λ_2 і Λ_2 $\left(0 < \lambda_2 \le \Lambda_2\right)$.

1) Нехай $\beta = \alpha$, $0 \le \alpha \le \pi$. Припустимо, що точка попаде на пряму l в деякий момент часу t_0: $r(t_0) = r_0$, $\varphi(t_0) = \varphi_0$. В цей же момент часу вона перекидається із положення $\left(r(t_0), \varphi(t_0)\right)$ в положення $\left(r(t_0+0), \varphi(t_0+0)\right)$ на прямій l_1, де $r(t_0+0) = kr_0$, $\varphi(t_0+0) = \varphi_0 + \alpha$. Далі точка рухається траєкторією, яка описується розв'язком системи $\frac{dx}{dt} = Ax$ і нехай вона попаде на пряму l в деякий момент часу t_1. Очевидно $\varphi(t_1) - \varphi(t_0+0) = \pi - \alpha$, або, враховуючи, що $\lambda_2 \le \frac{d\varphi}{dt} \le \Lambda_2$ і застосувавши формулу скінченних приростів, маємо $\lambda_2(t_1 - t_0) \le \varphi(t_1) - \varphi(t_0+0) \le \Lambda_2(t_1 - t_0)$, або $\lambda_2(t_1 - t_0) \le \pi - \alpha \le \Lambda_2(t_1 - t_0)$. Звідси

$$\frac{\pi-\alpha}{\Lambda_2} \le t_1 - t_0 \le \frac{\pi-\alpha}{\lambda_2}. \tag{3}$$

В силу першого рівняння системи (2) $\lambda_1 r \le \frac{dr}{dt} \le \Lambda_1 r$, звідки легко одержати $r(t_0+0)e^{\lambda_1(t_1-t_0)} \le r(t_1) \le r(t_0+0)e^{\Lambda_1(t_1-t_0)}$, що з урахуванням (3) приводить до нерівності

$$kr_0 e^{\frac{\lambda_1}{\Lambda_2}(\pi-\alpha)} \le r(t_1) \le kr_0 e^{\frac{\Lambda_1}{\lambda_2}(\pi-\alpha)}. \tag{4}$$

Оскільки далі рух відбувається аналогічно, то досить порівняти $r(t_1)$ і r_0: розв'язок $x \equiv 0$ буде стійким, якщо $r(t_1) \le r_0$, асимптотично стійким, якщо $r(t_1) < r_0$ і нестійким, якщо $r(t_1) > r_0$. Використовуючи оцінку (4), легко одержуємо:

– тривіальний розв'язок системи (1) стійкий, якщо

$$ke^{\frac{\Lambda_1}{\lambda_2}(\pi-\alpha)} \le 1 \tag{5}$$

і асимптотично стійкий, якщо ця нерівність виконана в строгому сенсі.

– він нестійкий, якщо

$$ke^{\frac{\lambda_1}{\Lambda_2}(\pi-\alpha)} > 1. \tag{6}$$

2) Нехай тепер $\beta = -\alpha$, де $0 \le \alpha \le \pi$. Тоді рух в цій системі відбуватиметься по-іншому: рано чи пізно будь-яка траєкторія попаде між

прямі l і l_1 і далі рух буде відбуватися тільки між цими прямими. Нехай точка попаде на пряму l в момент часу t_0 в положення (r_0, φ_0), $r_0 = r(t_0)$. Далі вона перекидається в положення $(r(t_0+0), \varphi(t_0+0))$ на прямій l_1, де $r(t_0+0) = kr_0$, $\varphi(t_0+0) = \varphi_0 - \alpha$. Рухаючись далі траєкторією, яка описується розв'язком системи $\frac{dx}{dt} = Ax$, точка попадає на пряму l в момент часу t_1 в положення $(r(t_1), \varphi_0)$. Очевидно $\varphi(t_1) - \varphi(t_0+0) = \varphi_0 - (\varphi_0 - \alpha) = \alpha$. Як і вище, одержуємо нерівності

$$\frac{\alpha}{\Lambda_2} \le t_1 - t_0 \le \frac{\alpha}{\lambda_2} \quad \text{і} \quad kr_0 e^{\frac{\lambda_1}{\Lambda_2}\alpha} \le r(t_1) \le kr_0 e^{\frac{\Lambda_1}{\lambda_2}\alpha},$$

із яких випливає:

– розв'язок $x \equiv 0$ системи (1) стійкий, якщо

$$ke^{\frac{\Lambda_1}{\lambda_2}\alpha} \le 1, \tag{7}$$

причому стійкість буде асимптотичною, якщо нерівність строга.

– цей розв'язок нестійкий, якщо

$$ke^{\frac{\lambda_1}{\Lambda_2}\alpha} > 1. \tag{8}$$

Література

1. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П.Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
2. Гургула С.І. Про стійкість розв'язків імпульсних систем / С.І. Гургула, М.О.Перестюк // Вісник Київського університету. Математика і механіка. – 1981. – Вип. 23. – С. 33-40.
3. Гургула С.І. Про стійкість в системах з імпульсами / С.І.Гургула, Р.І.Собкович // Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2009. – №1(5). – С. 24-29.
4. Гургула С.І. Про стійкість положення рівноваги однієї системи з імпульсною дією / С.І.Гургула, В.І.Горгула // Нелінійні коливання. – 1999. – Т.2, №2. – С. 177-179.

Стаття надійшла до редакційної колегії 10.10.2013 р.
*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором, академіком НАН України **Перестюком М.О.** (м. Київ), д.ф.-м.н., доцентом **Королем І.І.** (м. Ужгород)*

A BOUT STABLITY OF THE TRIVIAL SOLUTION OF A SYSTEM WITH IMPULSE ACTION

S. I. Gurgula
Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

The question of stability of the trivial solution of a linear homogeneous system of the second order with constant coefficients which is center the impulse action on reaching a trajectory of a reaching a trajectory of a certain line passing through the origin is being studied.

Key words: *linear homogeneous system of the second order, impulsive action, stability.*