УДК 517.94

ДЕЯКІ БІЄКТИВНІ ВІДОБРАЖЕННЯ ТА ОБЕРНЕНІ ДО НИХ ФУНКЦІЇ

І. В. Федак

Прикарпатський національний університет ім. В.Стефаника;
76025, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: Fedak_ivan @ rambler.ru

Розглянуті два приклади бієктивних відображень, для яких обернені до них функції мають дещо відмінні властивості, пов'язані з границями та неперервністю. Розв'язане одне функціональне рівняння.

Ключові слова: *бієктивні відображення, обернені функції, границя, неперервність, функціональні рівняння.*

Як відомо з курсу математичного аналізу, функція f^{-1}, обернена до монотонної неперервної функції $f: X \to Y$, також є монотонною і неперервною. Зрозуміло, що при цьому обидві такі функції є взаємно однозначними (бієктивними) відображеннями.

Але не завжди властивості обернених функцій до бієктивних відображень будуть аналогічними до властивостей таких відображень.

У пропонованій вашій увазі статті ми розглянемо приклади бієктивних відображень, для яких обернені до них функції мають дещо відмінні властивості.

Задачі про існування та дослідження властивостей таких функцій були запропоновані як завдання XV Всеукраїнського турніру юних математиків імені професора М. Й. Ядренка.

Задача 1. Про функцію $f: Z \to Z$ відомо, що вона є взаємно однозначним відображенням (бієкцією) множини всіх цілих чисел на себе, причому $f(n) \to +\infty,$ якщо $n \to +\infty.$ Нехай f^{-1} позначає функцію, обернену до $f.$ Чи можна стверджувати, що $f^{-1}(n) \to +\infty,$ якщо $n \to +\infty$?

Розв'язання. Так стверджувати не можна. Розглянемо, наприклад, функцію

$$f(n) = \begin{cases} 2n, & n \in Z_+, \\ -n, & n = -2k+1, k \in N, \\ \dfrac{n}{2}, & n = -2k, k \in N. \end{cases}$$

Зрозуміло, що $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to\infty} 2n = +\infty.$ Але для оберненої до неї функції

$$f^{-1}(n)=\begin{cases}\frac{n}{2}, & n=2k,\, n\in Z_+,\\ -n, & n=2k-1, k\in N,\\ 2n, & n=-k, k\in N,\end{cases}$$

$f^{-1}(n)$ для непарних n не прямує до $+\infty$ при $n\to+\infty$.

Зауважимо, що покладаючи додатково $f(x)=x,\ x\notin Z$, ми отримали би функцію $f:R\to R$ таку, що є взаємно однозначним відображенням (бієкцією) множини всіх дійсних чисел на себе, причому $f(x)\to+\infty$, якщо $x\to+\infty$. Але при цьому $f^{-1}(x)$ не прямує до $+\infty$ при $x\to+\infty$.

Задача 2. Про функцію $F:R\to R$ відомо, що вона є бієкцією множини всіх дійсних чисел на себе, і є розривною у кожній точці числової прямої. Чи можна стверджувати, що й обернена до неї функція F^{-1} також є розривною у кожній точці числової прямої?

Розв'язання. Доведемо, що і у цьому випадку так стверджувати не можна.

Виділимо у множині дійсних чисел щільну підмножину X всіх чисел вигляду

$$x=\pm a_n a_{n-1}...a_1, b_1 b_2 ... b_m,$$

де $m\in N, n\in N$, a_i, b_j – цифри, $b_m\neq 0, b_m\neq 5$.

Нехай

$$F(x)=\begin{cases}-x+1, & x\in R\setminus X,\\ x-1, & x\in X\setminus(0,2),\\ g(x), & x\in X\bigcap(0,2).\end{cases}$$

Визначимо функцію $g(x)$ на множині $X\bigcap(0,2)$ таким чином: $g(x)=\frac{1}{2}x$, якщо b_m – парна цифра. Якщо ж цифра $b_m=1$ чи $b_m=3$, то збільшимо її на 1, а якщо $b_m=7$ чи $b_m=9$, то зменшимо її на 1. Замінивши $x\in X\bigcap(0,2)$ на отриманий таким способом елемент x', покладемо $g(x)=\frac{1}{2}x'-1$.

На рис. 1 схематично зображений графік функції $F(x)$. Точки такого графіка знаходяться на лініях, наведених пунктиром, причому довші відрізки пунктирів відповідають аргументам $x\notin X$. Штрих-пунктирною лінією намальований графік функції $y=\frac{1}{2}x-1$. Відповідні точки графіка функції $g(x)=\frac{1}{2}x'-1$ знаходяться у безпосередній близькості, але дещо вище чи нижче від нього.

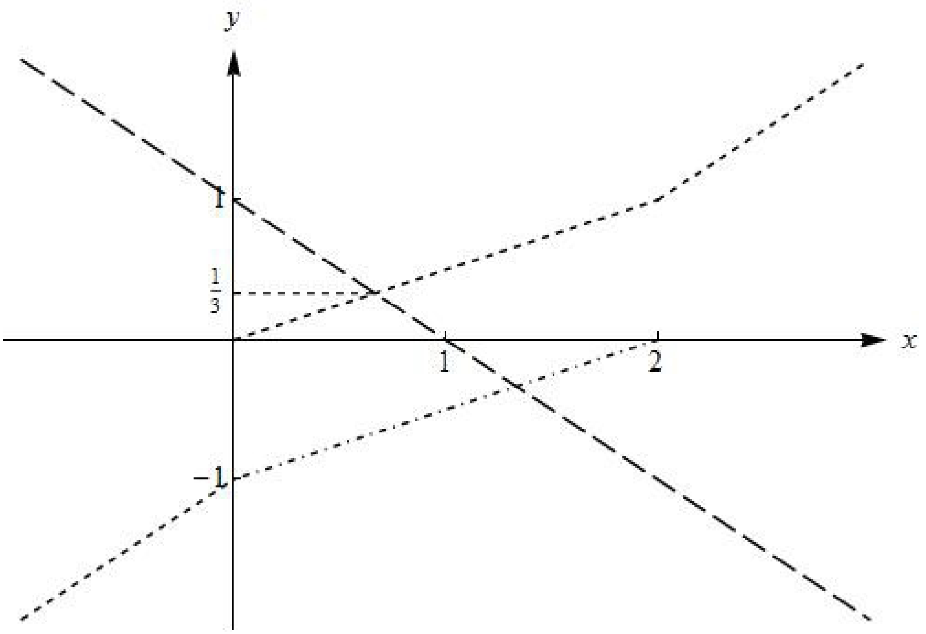

Рис. 1. Графік функції $F(x)$

Функція $y=F(x)$ є бієкцією множини всіх дійсних чисел на себе. Справді, функція $y=-x+1,\ x\in R\setminus X,$ взаємно однозначно відображає $R\setminus X$ на $R\setminus X$, а інші дві функції бієктивно відображають X на X. Поза інтервалом $(0,2)$ це здійснює функція $y=x-1,\ x\in X\setminus(0,2),$ а на даному інтервалі – функція $y=g(x)$.

Крім того, внаслідок щільності множини X у R в околі кожної точки $x\in R$ знайдуться такі дві точки, в яких різниця значень не менша 1 (див. рис.). Таким чином, побудована функція є розривною у кожній точці числової осі.

Водночас, як видно з того ж рисунка, обернена до неї функція $x=F^{-1}(y)$ неперервна у точці $y=\frac{1}{3}$.

Зауважимо, що, міркуючи аналогічно, нескладно побудувати розривне у всіх точках числової осі бієктивне відображення, для якого обернена функція виявиться неперервною у зліченній кількості точок.

З бієктивними відображеннями тісно пов’язані і задачі на знаходження функцій за наперед заданими властивостями. Розглянемо відповідний цікавий приклад із завдань того ж турніру.

Задача 3. Для натурального k знайдіть усі такі функції $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, що для будь-яких додатних чисел $x_1, x_2, ..., x_{2k}$, добуток котрих дорівнює 1, виконується рівність

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{f(x_{2i-1})+f(x_{2i})}{x_{2i-1}+x_{2i}}=1.$$

Розв'язання. Розглянемо спочатку випадок $k\geq 2$. Підставляючи $x_1=x_2=...=x_{2k-1}=x_{2k}=1$, отримуємо $f^n(1)=1$. А оскільки $f(x)$ набуває лише додатних значень, то $f(1)=1$. Підставимо тепер $x_1=a$, $x_2=\frac{1}{a}$, $a>0$, $a\neq 1$, $x_3=x_4=...=x_{2k-1}=x_{2k}=1$. Враховуючи, що $f(1)=1$, отримаємо рівність $f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=a+\frac{1}{a}$. Далі, покладаючи $x_1=a$, $x_3=\frac{1}{a}$, $a>0$, $a\neq 1$, та залишаючи решта аргументів одиницями, будемо мати $(f(a)+1)\left(f\left(\frac{1}{a}\right)+1\right)=(a+1)\left(\frac{1}{a}+1\right)$, звідки одержимо $f(a)f\left(\frac{1}{a}\right)=1$. Таким чином, $f(a)=a$ або $f(a)=\frac{1}{a}$. Припустимо, що для відмінних від одиниці додатних чисел a,b одночасно виконуються рівності $f(a)=a$, $f(b)=\frac{1}{b}$. Тоді $f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}$, $f\left(\frac{1}{b}\right)=b$. Підставивши $x_1=a$, $x_2=b$, $x_3=\frac{1}{a}$, $x_4=\frac{1}{b}$, та залишаючи решта аргументів одиницями, отримаємо співвідношення $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}+b\right)=(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$, звідки $ab+1=a+b$, тобто $(a-1)(b-1)=0$, що неможливо при $a\neq 1$, $b\neq 1$. З доведеного вище випливає, що розв'язками заданого функціонального рівняння при $k\geq 2$ можуть бути лише функції $f(x)=x$ та $f(x)=\frac{1}{x}$. Перевірка показує, що вони обидві задовольняють це рівняння.

Нехай тепер $k=1$. Міркуючи аналогічно до попереднього випадку, отримаємо: $f(1)=1$ та $f(a)+f\left(\frac{1}{a}\right)=a+\frac{1}{a}$, $a>0$, $a\neq 1$. Отже, для функції $g(x)=f(x)-x$ будемо мати: $g(1)=0$ та $g(a)+g\left(\frac{1}{a}\right)=0$,

$a > 0,\ \ a \neq 1$. Якщо $g(x)-$ довільна функція, визначена на інтервалі $(0,1)$, яка задовольняє на ньому нерівності $-x < g(x) < \frac{1}{x}$, то, покладаючи $g(1) = 0$ та $g(x) = -g\left(\frac{1}{x}\right),\ x > 1$, отримаємо, що функція $f(x) = g(x) + x$ є розв'язком заданого функціонального рівняння при $k = 1$. Навпаки, для кожного розв'язку $f(x) > 0$ функція $g(x) = f(x) - x$ задовольняє накладені на неї вище умови. При цьому нерівність $g(x) > -x,\ x \in (0,1)$, – очевидна, а $g(x) < \frac{1}{x},\ \ x \in (0,1)$, випливає з нерівності $-g(x) + \frac{1}{x} = g\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x} = f\left(\frac{1}{x}\right) > 0,\ x \in (0,1)$. Таким чином, знайдені всі розв'язки заданого рівняння при $k = 1$.

Зокрема, покладаючи $g(x) = 0$ та $g(x) = \frac{1}{x} - x$, отримаємо отримані нами для $k \geq 2$ розв'язки $f(x) = x$ та $f(x) = \frac{1}{x}$ відповідно.

Але, крім них, при $k = 1$ задане рівняння задовольняє, наприклад, ще й функція

$$f(x) = \begin{cases} x+1, & x \in (0,1), \\ 1, & x = 1, \\ x-1, & x \in (1,+\infty). \end{cases}$$

Зрозуміло, що існує безліч розв'язків для $k = 1$.

Стаття надійшла до редакційної колегії 21.11.2013 р.
*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором **Загороднюком А.В.**,*
*д.ф.-м.н., професором **Лопушанським О.В** (м. Львів)*

SOME BIJECTIVE MAPPINGS AND THEIR INVERSE FUNCTIONS

I. V. Fedak
Precarpathian National University by V. Stefanyc;
76025, Ivano-Frankivs'k, Shevchenko str., 57;
e-mail: Fedak_ivan@rambler.ru

Two is considered examples of bijective mappings, for that their inverse functions have something the excellent properties related to the limits and continuity. One functional equation is solved.

Key words: *bijective mappings, inverse functions, limit, continuity, functional equations.*