УДК 517.53

СТРУКТУРА МНОЖИНИ НЕВАНЛІННІВСЬКИХ ДЕФЕКТНИХ ВЕКТОРІВ ДЛЯ ЦІЛИХ КРИВИХ З ЛІНІЙНО ЗАЛЕЖНИМИ КОМПОНЕНТАМИ

Я. І. Савчук
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

Показано, що структура множини неванліннівських дефектних векторів для цілої кривої скінченного порядку з лінійно залежними компонентами подібна структурі для звичайної цілої кривої скінченного порядку.

Ключові слова: *ціла крива, неванліннівський дефектний вектор, мероморфна функція, допустима система векторів.*

В даній статті використовуються основні результати теорії цілих кривих, а також позначення, використані в [1] та [2].

Ціла крива $\vec{G}(z)=\left(g_1(z),\, g_2(z),\, \dots ,g_p(z)\right)$ називається цілою кривою з ω-лінійно залежними компонентами, якщо розмірність лінійного підпростору $A_0=\left\{\vec{a}\in \boldsymbol{C}^p : \vec{G}(z)\cdot\vec{a}\equiv 0\right\}$ дорівнює ω, $0\le\omega\le p-2$. Очевидно, що при $\omega=0$ матимемо звичайну цілу криву з лінійно незалежними компонентами.

Нехай множина S є деякою підмножиною q-вимірного підпростору із $\boldsymbol{C}^p$ і містить q лінійно незалежних векторів. Систему векторів $M\subset S$ називатимемо допустимою в S, якщо: при $card\, M\le q$ всі вектори із M лінійно незалежні; при $card\, M>q$ довільні q векторів із M лінійно незалежні.

Для будь-якої цілої кривої з ω-лінійно залежними компонентами і для будь-якої допустимої системи векторів M із $C^p\setminus A_0$ має місце таке співвідношення (див. [3]):

$$\sum_{\vec{a}\in M\setminus A_0}\delta\left(\vec{a},\vec{G}\right)\le\left(p-\omega\right)\left(\omega+1\right). \tag{1}$$

З цього співвідношення легко отримуємо, що довільна допустима в $C^p\setminus A_0$ система неванліннівських дефектних векторів (тобто таких, для яких $\delta\left(\vec{a},\vec{G}\right)>0$) не більше ніж зліченна.

Позначимо $D\left(\vec{G}\right)=\left\{\vec{a}\in \boldsymbol{C}^p\setminus A_0:\delta\left(\vec{a},\vec{G}\right)>0\right\}$. Основним результатом даної роботи є наступне твердження:

Теорема. *Для довільної кривої* $\vec{G}:\boldsymbol{C}\to\boldsymbol{C}^p$ *скінченного порядку* з ω*-лінійно залежними компонентами множина* $D\left(\vec{G}\right)\cup A_0$ *є не більше ніж зліченним об'єднанням підпросторів* $A_j\in\boldsymbol{C}^p$ розмірності $\le p-1$.

Відзначимо, що ця теорема є узагальненням відповідного результату в [4] на випадок цілих кривих з лінійно залежними компонентами.

Спочатку дамо означення і доведемо три леми.

О з н а ч е н н я. Нехай множина S лежить в q-вимірному підпросторі простору $\boldsymbol{C}^p$ і містить q лінійно незалежних векторів. Підмножину $M\subset S$ назвемо *максимальною допустимою в* S, якщо: а) будь-які q векторів із M лінійно незалежні; б) будь-який вектор із $S\setminus M$ є лінійною комбінацією деяких $q-1$ векторів із M.

Лема 1. *Для довільної множини* $S\subset\boldsymbol{C}^p$ *існує максимальна допустима підмножина* M *в* S.

Д о в е д е н н я. Нехай розмірність лінійної оболонки множини S дорівнює q. Розглянемо множину всіх допустимих систем із S, яку позначимо $\Theta(S)$. Очевидно, ця множина є частково впорядкованою по включенню. За лемою *Цорна* $\Theta(S)$ містить максимальний елемент M, тобто таку множину, що якщо $M'\in\Theta(S)$ і $M\subset M'$, то $M=M'$. Неважко бачити, що M – максимальна допустима підмножина в S. Дійсно, якщо це не так, то існує такий вектор $\vec{a}\in S\setminus M$, який не є лінійною комбінацією жодних $q-1$ векторів із M, тобто $\{\vec{a}\}\cup M\in\Theta(S)$, що неможливо, бо M – максимальний елемент із $\Theta(S)$.

Лема 2. *Нехай* $\vec{G}$ *– ціла трансцендентна (тобто така, що* $\ln r=o\left\{T\left(r,\vec{G}\right)\right\}$, $r\to\infty$*) крива в* $\boldsymbol{C}^p$ *скінченного порядку з* ω*-лінійно залежними компонентами,* B *– підпростір в* $\boldsymbol{C}^p$, $\omega+1\le\dim B\le p-1$, $M_0\subset B$. *Тоді має місце один з двох випадків: 1)* $B\subset D\left(\vec{G}\right)\cup M_0$*; 2) довільна допустима в* B *система векторів із* $D\left(\vec{G}\right)\cap B$ *не більше ніж зліченна.*

Д о в е д е н н я. Очевидно, що для довільних векторів $\vec{a}\in A_0$, $\vec{b}\in\boldsymbol{C}^p\setminus A_0$ та числа $\alpha\in\boldsymbol{C}\setminus\{0\}$ виконується рівність

$$\delta\left(\vec{a}+\alpha\vec{b},\vec{G}\right)=\delta\left(\vec{b},\vec{G}\right), \tag{2}$$

тому природним є вважати $A_0 \subset B$.

Позначимо $\dim B = q$. Покажемо, що якщо випадок 1) не має місця, то обов'язково матиме місце випадок 2).

Припустимо, що існує незліченна допустима в B система векторів $M \subset D(\vec{G}) \cap B$. Оскільки випадок 1) не має місця, то існує такий вектор $\vec{b}_0 \in B$, що

$$\delta\left(\vec{b}_0, \vec{G}\right) = 0. \quad (3)$$

Виберемо в B базис $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_q$, причому такий, що $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_\omega$ – базис в A_0, отже, $\vec{G}(z)\vec{b}_j \equiv 0$ для всіх $j = 1, \ldots, \omega$. Позначимо $\Lambda = \left\{\vec{\lambda} = \left(\lambda_1, \ldots, \lambda_q\right) :\ \lambda_1\vec{b}_1 + \ldots + \lambda_q\vec{b}_q \in M\right\}$. Очевидно, Λ – допустима система векторів в $\boldsymbol{C}^q$. Розглянемо в $\boldsymbol{C}^q$ вектор-функцію $\vec{G}_1(z) = \left(\vec{G}(z)\vec{b}_1, \vec{G}(z)\vec{b}_2, \ldots, \vec{G}(z)\vec{b}_q\right) \cdot \Phi(z)$, де $\Phi(z)$ – деяка мезоморфна в $\boldsymbol{C}$ функція без нулів, полюсами якої є спільні нулі функцій $\vec{G}(z)\vec{b}_1, \vec{G}(z)\vec{b}_2, \ldots, \vec{G}(z)\vec{b}_q$. Оскільки вектори $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_q$ лінійно незалежні і перші ω компонент в $\vec{G}_1(z)$ є тотожними нулями, то $\vec{G}_1(z)$ є q-мірною цілою кривою з ω-лінійно залежними компонентами.

Очевидно, для довільного вектора $\vec{\lambda} \in \boldsymbol{C}^q$ і відповідного йому вектора $\vec{b} = \lambda_1\vec{b}_1 + \ldots + \lambda_q\vec{b}_q$ виконується $\vec{G}(z)\vec{b} = \vec{G}_1(z)\vec{\lambda} / \Phi(z)$, тому $N\left(r, \vec{b}, \vec{G}\right) = N\left(r, \vec{\lambda}, \vec{G}_1\right) + N(r, \Phi)$, звідки, за першою основною теоремою для цілих кривих маємо

$$T\left(r, \vec{G}\right) - m\left(r, \vec{b}, \vec{G}\right) = T\left(r, \vec{G}_1\right) - m\left(r, \vec{\lambda}, \vec{G}_1\right) + N(r, \Phi) + O(1), \quad r \to \infty. \quad (4)$$

Зауважимо також, що

$$T\left(r, \vec{G}_1\right) + N(r, \Phi) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left\{\sum_{j=1}^{q}\left|\vec{G}\left(re^{i\varphi}\right)\vec{b}_j\right|^2\right\}^{1/2} d\varphi + O(1) \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left\{\sum_{j=\omega+1}^{q}\left\|\vec{G}\left(re^{i\phi}\right)\right\|^2 \cdot \left\|\vec{b}_j\right\|^2\right\}^{1/2} d\varphi + O(1) = T\left(r, \vec{G}\right) + O(1), \quad r \to \infty. \quad (5)$$

Відповідно до (3) існує така послідовність додатних чисел $\left\{r_n\right\}_{n=1}^{\infty}$, $r_n \to \infty$ при $n \to \infty$, що

$$m\left(r_n, \vec{b}_0, \vec{G}\right) = o\left\{T\left(r_n, \vec{G}\right)\right\}, \quad n \to \infty.$$

Оскільки $m\left(r, \vec{\lambda}, \vec{G}_1\right) \ge 0$, то з (4) та (5) робимо висновок, що

$$T\left(r_n,\vec{G}_1\right)+N\left(r_n,\Phi\right)=\left\{1+o\left(1\right)\right\}T\left(r_n,\vec{G}\right),\quad n\to\infty. \tag{6}$$

За припущенням множина M незліченна і кожний вектор з M є дефектним для цілої кривої $\vec{G}$, тому існує таке $\varepsilon>0$, що

$$\delta\left(\vec{b},\vec{G}\right)>\varepsilon. \tag{7}$$

для незліченної підмножини векторів $\vec{b}$ із M. Позначимо цю підмножину через M_0, а відповідну йому множину векторів $\vec{\lambda}=\left(\overline{\lambda}_1,\ldots,\overline{\lambda}_q\right)$, таких, що $\lambda_1\vec{b}_1+\ldots+\lambda_q\vec{b}_q\in M_0$ – через Λ_0. Очевидно, що $\Lambda_0\subset\Lambda$.

Для довільного вектора $\vec{b}\in M_0$ і відповідного йому вектора $\vec{\lambda}\in\Lambda_0$, виходячи з (4), (6), (7), маємо:

$$m\left(r_n,\vec{\lambda},\vec{G}_1\right)=m\left(r_n,\vec{b},\vec{G}\right)+o\left\{T\left(r_n,\vec{G}\right)\right\}\geq\left\{\varepsilon+o\left(1\right)\right\}T\left(r_n,\vec{G}\right)\geq$$
$$\geq\left\{\varepsilon+o\left(1\right)\right\}T\left(r_n,\vec{G}_1\right),\quad n\to\infty. \tag{8}$$

Оскільки Λ_0 – допустима система векторів в $\boldsymbol{C}^q$, то, відповідно до аналога другої основної теореми для цілих кривих скінченного порядку з ω лінійно залежними компонентами (див. співвідношення (1.42) в [1]) маємо

$$\sum_{\vec{\lambda}\in Q}m\left(r,\vec{\lambda},\vec{G}_1\right)\leq\left\{\left(q-1\right)\left(\omega+1\right)+o\left(1\right)\right\}T\left(r,\vec{G}\right),\ \ r\to\infty, \tag{9}$$

де Q – довільна скінченна підмножина із Λ_0. Легко бачити, що якщо взяти Q таким, щоб $card\,Q=\left[\left(q-1\right)\left(\omega+1\right)/\varepsilon\right]+2$, то, виходячи з (8), отримаємо, що (9) не виконується. Отримане протиріччя доводить лему 2.

Лема 3. *Нехай маємо підмножину B підпростору $L\subset\boldsymbol{C}^p$, $\dim L=q\leq p$, і нехай відомо, що довільна допустима в L система векторів із B не більше ніж зліченна. Тоді існує не більше ніж зліченна кількість підпросторів $B_j\subset L$, $\dim B_j\leq q-1$, таких, що:*

1) $B\subset\bigcup\limits_j B_j$;

2) для всіх j, таких, що $\dim B_j\geq 2$, множина $B_j\cap B$ містить незліченну допустиму в B_j систему векторів.

Д о в е д е н н я. Відповідно до леми 1 можемо вибрати з B максимальну допустиму в L систему векторів, яку позначимо через M. За умовою леми вона не більше ніж зліченна. Якщо $card\,M\leq q-1$, то розглядаємо підпростір S_1 – лінійну оболонку M. Довільний вектор з B виражається лінійно через вектори з M, тому $S_1\supset B$. Якщо $card\,M>q-1$, то розглядаємо підпростори S_j, які отримуємо як лінійні оболонки всеможливих наборів векторів з M по $q-1$ в кожному. Очевидно, множина цих підпросторів не більше ніж зліченна. Неважко бачити, що

$$B \subset \bigcup_j S_j . \tag{10}$$

Дійсно, оскільки M – максимальна допустима в B система векторів, то для довільного вектора $\vec{b} \in B$ існує $q-1$ векторів з M, лінійною комбінацією яких він є, тобто, існує таке j, що $\vec{b} \in S_j$. Відповідно до (10) множину B можемо переписати у вигляді $B = \bigcup_j \left(S_j \cap B \right)$.

Для тих j, при яких довільна допустима в S_j система векторів з $S_j \cap B$ не більше ніж зліченна, провівши наведені вище міркування, отримаємо $S_j \cap B = \bigcup_i \left(S_{ji} \cap B \right)$, де S_{ji} – підпростори з $\dim S_{ji} \le q-2$, які отримуються з $S_j \cap B$ так само, як ми отримали S_j із B.

На наступному етапі ля тих j та i, при яких $S_{ji} \cap B$ містить не більше ніж зліченну допустиму в S_{ji} систему векторів отримаємо $S_{ji} \cap B = \bigcup_k \left(S_{jik} \cap B \right)$, де S_{jik} підпростори з $\dim S_{jik} \le q-3$.

Накінець, не більше ніж через $q-1$ кроків, отримаємо, що $B = \bigcup_j \left(B_j \cap B \right)$, де B_j – або підпростір розмірності 1, або такий, що $B_j \cap B$ містить незліченну допустиму в B_j систему векторів. Тут через B_j перепозначені всі ті підпростори $S_{ji}, S_{ji}, S_{jik}, \ldots$, перерізи кожного з яких з B містять незліченні допустимі в відповідних підпросторах системи векторів. Тим самим лема 3 доведена.

Д о в е д е н н я т е о р е м и. Розглянемо випадок трансцендентної цілої кривої, тобто такої, що $\ln r = o\left\{ T\left(r, \vec{G} \right) \right\}$, $r \to \infty$. У випадку, коли $T\left(r, \vec{G} \right) = O\{\ln r\}$, $r \to \infty$, усі компоненти цілої кривої можна вважати многочленами, і, як неважко бачити, сума дефектних векторів, яка не належить A_0, є дефектним вектором. Тоді множина дефектних векторів в об`єднанні з A_0 співпаде з деяким підпростором із $\boldsymbol{C}^p$ розмірності не вище $p-1$.

Твердження теореми випливає безпосередньо з лем 2 та 3. Дійсно, застосуємо лему 3 з $L = \boldsymbol{C}^p$. Оскільки довільна допустима в $\boldsymbol{C}^p$ система дефектних векторів для цілої кривої не більше ніж зліченна, то умови теореми виконуються з $B = D(\vec{G})$. Отже, існує не більше ніж зліченна множина підпросторів $A_j \in \boldsymbol{C}^p$, $\dim A_j \le p-1$, таких, що: 1) $D(\vec{G}) \subset \bigcup_j A_j$; 2) $D(\vec{G}) \cap A_j$ містить незліченну допустиму в A_j систему векторів при $\dim A_j \ge 2$. Тоді за лемою 2 маємо $D(\vec{G}) \cap A_j = A_j \setminus A_0$ при $\dim A_j \ge 2$. Якщо ж $\dim A_j = 1$, то $A_j = \{\lambda \vec{a}_j : \lambda \in \boldsymbol{C}\}$, і в цьому випадку $D(\vec{G}) \cap A_j = A_j \setminus A_0$, оскільки, очевидно, одночасно з вектором $\vec{a}$ і всі вектори $\lambda \vec{a}$, $\lambda \in \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ є дефектними.

Література

1. Петренко В.П. Целые кривые / В.П.Петренко. – Ч.: Вища школа, 1984. – 136 с.
2. Шабат Б.В. Распределение значений голоморфных отображений / Б.В.Шабат. – М.: Наука, 1982. – 288 с.
3. Савчук Я.И. Структура множества дефектных векторов целых и аналитических кривых конечного порядка / Я.И.Савчук // Укр. мат. журн. – 1985. – Т. 37, № 5. – С. 609-615.

Стаття надійшла до редакційної колегії 12.12.2013 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,***
д.ф.-м.н., професором ***Лопушанським О.В.*** *(м. Львів)*

STRUCTURE OF GREAT NUMBER OF NEVANLINN IMPERFECT VECTORS FOR WHOLE CURVES WITH LINEARLY DEPENDENT COMPONENTS

Ya. I. Savchuk
Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Carpathians str., 15;
ph. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung.edu.ua

It is shown that structure of great number of nevanlinn imperfect vectors for the whole curve of complete order with linearly dependent components similar to the structure for the ordinary whole curve of complete order.

Key words: *whole curve, nevanlinn imperfect vector, meromorf function, possible system of vectors.*