

Механіка

УДК 534.231

DOI: 10.31471/2304-7399-2021-16(60)-69-85

ПРО ВПЛИВ НА АКУСТИЧНІ ВЛАСТИВОСТІ ТРАХЕЇ І ГОЛОВНИХ БРОНХІВ ЛЮДИНИ ЗГИНАЛЬНИХ КОЛИВАНЬ ХРЯЦІВ В ЇХНІХ СТІНКАХ

В. Г. Басовський

Інститут гідромеханіки НАН України;
03057, м. Київ, вул. Марії Капніст 8/4;
тел. +38(044)456-43-13; e-mail basovsky@ukr.net

Використовуючи теорію згинальних коливань кільцевих незамкнених стрижнів розроблено розрахункову схему для кількісного оцінювання змушених коливань трахейних і бронхіальних хрящів у складі відповідних повітряних шляхів. Досліджено як коливання цих хрящів впливають на акустичні властивості трахеї і головних бронхів людини. Побудовано вдосконалену акустичну модель трахеї і головних бронхів людини, що дозволяє більш повно враховувати відповідні передавальні функції для вивчення закономірностей передачі звуку від основних повітряних шляхів людини до зовнішньої поверхні грудної клітки.

Ключові слова: звуки дихання, трахея, головні бронхи.

Вступ

Фізична причина генерації звуку під час дихання людини пов'язана, переважно, з особливостями руху повітря в трахеї і бронхіальному дереві людини. Отже, звуки дихання мають аеродинамічну природу й зумовлені перетворенням енергії повітряного потоку в звукову енергію під час взаємодії потоку зі стінками повітряних шляхів і з можливими перешкодами, наприклад, згустками мокроти, що збираються на стінках у разі деяких захворювань. Генерований потоком звук проходить через органи й біотканини в грудній клітці й досягає зовнішню її поверхню, яка під його дією починає коливатися. Саме ці коливання грудної клітки і прослуховує лікар за допомогою стетоскопа.

Необхідно зазначити, що ефективність перетворення енергії потоку в звукову досить низька (див. [1]). Крім того, згасання звуку в паренхімі легенів і бронхіальному дереві досить значні. Саме з огляду на ці причини рівень коливань зовнішньої поверхні грудної клітки під час дихання людини дуже малий і може погано прослуховуватися звичайними механічними стетофонендоскопами. Тому в останні десятиліття

інтенсивно розробляються електронні засоби реєстрації звуків дихання. Такі засоби є більш ефективними, ніж механічні стетофонендоскопи. До того ж вони забезпечують об'єктивізацію історичних суб'єктивних вербальних моделей шумів дихання.

Проте створення ефективних електронних засобів реєстрації і класифікації звуків дихання певною мірою пов'язано з побудовою моделі каналу поширення звуку в грудній клітці від джерела до її зовнішньої поверхні. Модель каналу потрібна також для розв'язання обернених задач. Через складність анатомічної будови грудної клітки, а також неповні дані про фізичні властивості її окремих органів і біотканин, сьогодні говорити про побудову такої моделі ще рано.

Особливу увагу під час побудови моделі поширення звуку в грудній клітці людини необхідно звернути на трахею і головні бронхи. Оскільки з огляду на геометричні розміри та розміщення, очевидно, що трахея і головні бронхи людини є тими повітроносними шляхами, які переважно визначають характер потоків звукової енергії як у трахеобронхіальному дереві, так і в навколишніх тканинах. Експериментальні дані про фізичні властивості стінок трахеї та головних бронхів, через відомі причини, дуже обмежені й багато в чому суперечливі. Тому дослідники здебільшого обмежуються спрощеними фізичними моделями стінок повітроносних шляхів [2 – 4]. Наприклад, припускають, що всі стінки в межах одного повітроносного шляху реагують локально на збурення і не змінюють свої механічні властивості ні вздовж твірної, ні вздовж напрямної. Тут слід виділити роботу [5], в якій оригінальним способом врахована неоднорідність фізичних властивостей трахеї вздовж твірної. Водночас добре відомо, що фізичні властивості стінок повітроносних шляхів транзисторної зони істотно неоднорідні через наявність в їхньому складі кільцеподібних незамкнутих хрящів [6].

З огляду на вищевикладене, метою дослідження є побудова акустичної моделі трахеї і головних бронхів людини з урахуванням згинальних коливань незамкнутих кільцевих хрящів в складі їхніх стінок.

1. Анатомія та основні припущення

За формою трахея являє собою трубку, дещо сплюснену в напрямку спереду назад. Для дорослої людини середня довжина трахеї приблизно є 12 см, поперечний розмір просвіту в середньому дорівнює $15 \div 18$ мм, а товщина стінки – приблизно $2 \div 3$ мм. Зовні трахея покрита тонким, пухким сполучнотканинним футляром – адвентицією. Далі в напрямку до середини йдуть стінка трахеї (волокнисто-м'язовий-хрящовий шар), підслизовий шар і слизова оболонка. Основою стінки трахеї є $16 \div 20$ співвісних гіалінових кільцеподібних хрящів, які охоплюють близько двох третин обводу трахеї і розімкнутою частиною звернених назад. Висота хрящів у дорослих $3 \div 4$ мм, а товщина $1 \div 2$ мм. Усі хрящі ззовні покриті охрястям. Сусідні хрящі з'єднані між собою кільцеподібними зв'язками, висота яких майже в два рази менше висоти хрящів. Основу зв'язок складають міцні сполучнотка-

нинні пучки з невеликою кількістю еластичних і гладких м'язових волокон. Зв'язки і хрящі переходять в суцільну м'яку задню стінку, яка складається з м'язових шарів і фіброзної тканини.

Головні бронхи відходять від нижнього кінця трахеї і йдуть до воріт відповідної легені. Довжина правого бронха приблизно дорівнює 3 см, а лівого – $4 \div 5$ см. За своєю будовою вони нагадують трахею. Скелетом їхньої стінки теж є кільцеподібні хрящі, які тут охоплюють тільки близько половини обводу відповідного бронха. Дані про висоту і товщину хрящів головних бронхів в літературі знайти не вдалося. Однак можна припустити, що відношення відповідних геометричних розмірів хрящів трахеї і головних бронхів дорівнює відношенню їхніх діаметрів, тобто приблизно дорівнює 1.5.

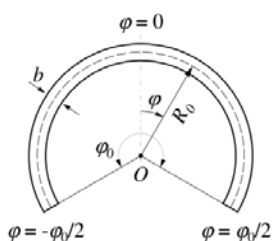
Трахея і головні бронхи розташовуються в області між легенями, яка називається середостіння. Ця область заповнена цілим комплексом органів, клітковиною, судинами, нервами і лімфатичними вузлами.

Перейдемо до обговорення фізичних характеристик біотканин середостіння і стінок повітроносних шляхів. Загалом ці біотканини, крім хрящів, можна вважати м'якими водоподібними тканинами [7] і в доброму наближенні вважати, що звукові хвилі в них поширюються так само, як у воді. Поперечні хвилі не можуть проникати в м'які тканини на велику глибину, а середнє значення швидкості поздовжніх хвиль з невеликими варіаціями приблизно дорівнює швидкості звуку в воді 1500 м/с і практично дуже слабо залежить від частоти. Водночас можна вважати, що густина м'яких тканин також дорівнює густині води 1000 кг/м^3 . Що стосується фізичних властивостей біотканин хрящів, то з огляду літературних джерел можна зробити висновок, що густина лежить в досить вузькому діапазоні $(1.06 \div 1.14) \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$. Тимчасом як модуль Юнга може змінюватися в дуже широких межах – $0.5 \div 18 \text{ МПа}$. Такий розкид зумовлений недосконалістю методик експериментальної оцінки. Тут треба виділити роботу [8], в якій, завдяки удосконаленню методики вимірювань, вдалося знайти з меншим розкидом досить реалістичні значення модуля Юнга $4.4_{-1.8}^{+3.3} \text{ МПа}$.

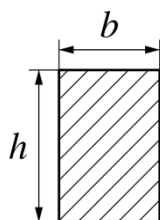
Узагальнюючи вищенаведені дані про будову й фізичні характеристики біотканин стінок верхніх повітроносних шляхів, сформулюємо гіпотези для побудови фізичної моделі процесу випромінювання звуку цими шляхами. М'які тканини стінок повітроносних шляхів і тканини середостіння вважаємо ідентичними водоподібними середовищами з хвильовим опором $\rho_0 c_0$. Тут ρ_0 і c_0 відповідно густина води й швидкість звуку в ній.

Так само, як і в [9 – 11], трахейні й бронхіальні хрящі будемо моделювати тонкими незамкнутими кільцевими стрижнями із середнім радіусом R_0 і кутовим розміром φ_0 (див. рис. 1, а). Поперечний переріз стрижня сталій уздовж серединної лінії і має форму прямокутника (рис. 1, б) заввишки h і завширшки b . Лінійні розміри поперечних перерізів хрящів трахеї й головних бронхів подібні з коефіцієнтом подібності, який дорівнює відношенню їхніх середніх радіусів. Враховуються тільки

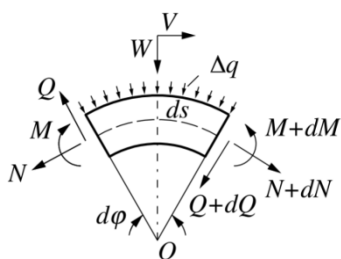
згинальні коливання хрящів в площині їхньої кривини. Також хрящі в складі відповідних стінок є вільно ковзними включеннями. З огляду на те, що хвильовий опір біотканин хрящів більший за хвильовий опір м'яких біотканин, можна вважати абсолютно жорсткими нижню і верхню поверхні, а також торці хрящів з боку м'яких тканин стінок повітряноносних шляхів. Щоб не ускладнювати фізичну модель, вважаємо що хрящі в складі стінки повітряноносних шляхів не взаємодіють через поле й частина задньої стінки між їхніми торцями теж є вільно ковзним включенням в радіальному напрямку. Внаслідок значного згасання звукових хвиль у тканинах середостіння, паренхімі, реберно-м'язовому й жировому шарах, можна знехтувати відбиттям звукових хвиль від межі поділу цих біотканин і вважати, що трахея і головні бронхи випромінюють звук у необмеженій області, що заповнена тканинами середостіння.



a



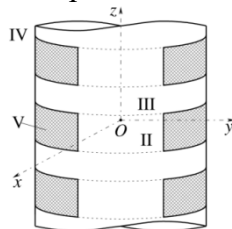
б



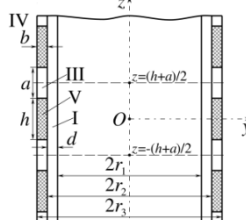
v

a – незамкнутий кільцевий стрижень;
 б – поперечний переріз стрижня;
 в – сили та моменти, що діють на елемент стрижня

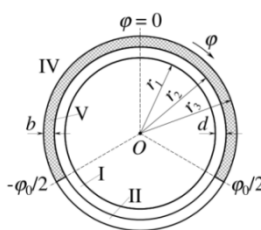
Рис. 1. Механічна модель хряща



a



б



в

a – зовнішній вигляд;
 б – повздовжній переріз $x = 0$;
 в – поперечний переріз $z = 0$

Рис. 2. Фрагмент стінки верхніх повітряноносних шляхів (схема)

Отже прийняті нами гіпотези й спрощення дозволяють моделювати акустичні властивості трахеї і головних бронхів на основі задачі про випромінювання звуку нескінченним циліндром, що оточений співвідносно періодичною еквідистантною решіткою з однакових кільцевих незакнутих стрижнів, які моделюють хрящі.

Радіус циліндра r_1 дорівнює радіусу просвіту відповідного повітроносного шляху, а відстань між стрижнями a дорівнює висоті кільцеподібних зв'язок між хрящами. Циліндр знаходиться в необмеженому заповненому тканинами середностіння просторі з хвильовим опором $\rho_0 c_0$. Водночас між стрижнями і циліндром є зазор, ширина якого d дорівнює сумарній товщині підслизового шару і слизової оболонки. На рис. 2 показано схематичне зображення прийнятої фізичної моделі. Джерелом звуку є рівномірно розподілений тиск p_0 на внутрішній стінці циліндра. Вибір такого типу джерела звуку зумовлений такими факторами. По-перше, в цікавому для медичної практики діапазоні частот діаметр трахеї і головних бронхів, а також відстань між площинами кривини сусідніх хрящів істотно менші, ніж довжина хвилі звукових коливань повітря всередині повітроносних шляхів, що розглядаються. По-друге, не слід очікувати будь-яких істотних змін пульсацій тиску через можливу турбулізацію потоку на внутрішній стінці повітроносних шляхів у межах сусідніх хрящів

2. Метод розв'язання

Сформульовану вище акустичну задачу будемо розв'язувати методом часткових областей [12]. Введемо циліндричну систему координат, вісь z якої збігається з поздовжньою віссю симетрії повітроносного шляху, а кут φ відраховується від вершини хряща. Нехай площина $z = 0$ збігається з площиною кривини одного з хрящів (див. рис. 2). З огляду на властивості періодичності фізичної моделі розглянутих повітроносних шляхів, досить розглянути тільки один її період, а саме: $(|z| \leq (h + a)/2)$. Виділимо тепер чотири часткових області, де є звукове поле:

– область I $(r_1 \leq r \leq r_2, |\varphi| \leq \pi, |z| \leq (h + a)/2)$ – підслизовий шар і слизова оболонка;

– область II $(r_2 \leq r \leq r_3, \varphi_0 \leq \varphi \leq \pi, |z| \leq h/2)$ – частина задньої стінки між торцями хрящів;

– область III $(r_2 \leq r \leq r_3, |\varphi| \leq \pi, h/2 \leq z \leq (h + a)/2)$ – кільцеподібні зв'язки й частина задньої стінки між їхніми кінцями;

– область IV $(r \geq r_3, |\varphi| \leq \pi, |z| \leq (h + a)/2)$ – зовнішнє середовище (тканини середостіння).

Нехай на внутрішній стінці розглянутих повітроносних шляхів задано гармонічний рівномірно розподілений тиск. Тоді гармонічне звукове поле в кожній з часткових областей визначається через акусти-

чний потенціал швидкості, який задовольняє рівняння Гельмгольца. Отже, необхідно знайти розв'язок рівняння Гельмгольца в часткових областях I – IV для таких граничних умов.

На внутрішній стінці повітроносного шляху маємо

$$\begin{aligned} -i\omega\rho_0\Phi_1(r, \varphi, z) &= p_0, \\ r &= r_1, \quad |\varphi| \leq \pi, \quad |z| \leq (h+a)/2. \end{aligned} \quad (1)$$

Тут p_0 – амплітуда тиску на внутрішній стінці виділеного періоду повітроносного шляху; Φ_1 – акустичний потенціал швидкості в області I; ω – кругова частота; i – уявна одиниця. Часовий множник $\exp(-i\omega t)$ тут і нижче пропускаємо.

Як вже зазначалося, з боку м'яких тканин торці хрящів можна вважати абсолютно жорсткими поверхнями, тому

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_2}{\partial\varphi} &= 0, \\ r_2 \leq r \leq r_3, \quad |\varphi| \leq \varphi_0, \quad |z| \leq h/2, \end{aligned} \quad (2)$$

де Φ_2 – акустичний потенціал в області II.

Періодичність задачі дає такі граничні умови:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} &= 0, \\ r_1 \leq r \leq r_2, \quad |\varphi| \leq \pi, \quad |z| &= (h+a)/2; \\ \frac{\partial\Phi_3}{\partial z} &= 0, \\ r_2 \leq r \leq r_3, \quad |\varphi| \leq \pi, \quad |z| &= (h+a)/2; \\ \frac{\partial\Phi_4}{\partial z} &= 0, \\ r \geq r_3, \quad |\varphi| \leq \pi, \quad |z| &= (h+a)/2, \end{aligned} \quad (3)$$

де Φ_3 і Φ_4 відповідно акустичні потенціали швидкості в областях III і IV.

Оскільки вище було прийнято, що хрящі і частина задньої стінки повітроносного шляху між їхніми торцями є вільно ковзними об'єктами в радіальному напрямку, то звукове поле повинно задовольняти також такі граничні умови:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} &= 0, \\ r_2 \leq r \leq r_3, \quad |\varphi| \leq \varphi_0/2, \quad |z| &= h/2; \\ \frac{\partial\Phi_3}{\partial z} &= 0, \\ r_2 \leq r \leq r_3, \quad |\varphi| \leq \pi, \quad |z| &= h/2. \end{aligned} \quad (4)$$

Очевидно, що в зовнішній області IV акустичний потенціал швидкості Φ_4 повинен задовольняти умову випромінювання на нескінченності.

Акустичний потенціал швидкості в кожній з часткових областей зобразимо у вигляді суперпозиції відповідних часткових розв'язків рівняння Гельмгольца [12] з невідомими коефіцієнтами. Тут слід зазначи-

ти, що задача симетрична відносно площин $y = 0$ і $z = 0$, тобто досить розглянути область де координати циліндричної системи координат φ і z змінюються відповідно в межах $0 \leq \varphi \leq \pi$ і $0 \leq z \leq (h + a)/2$. Отже, задовольняючи тотожно граничні умови (2) – (4) і умову випромінювання на нескінченності, маємо

$$\Phi_1(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \cos(m\varphi) \cos(\alpha_{1,n}z) \times \\ \times \left(A_{mn} \tilde{J}_m(k_{1,n}r) + B_{mn} \tilde{Y}_m(k_{1,n}r) \right), \quad (5)$$

$$\Phi_2(r, \varphi, z) = \sum_{q=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \cos(\beta_q(\pi - \varphi)) \cos(\alpha_{2,s}z) \times \\ \times \left(C_{qs} \tilde{J}_{\beta_q}(k_{2,s}r) + D_{qs} \tilde{Y}_{\beta_q}(k_{2,s}r) \right), \quad (6)$$

$$\Phi_3(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \cos(m\varphi) \cos(\alpha_{3,l}(h/2 - z)) \times \\ \times \left(E_{ml} \tilde{J}_m(k_{3,l}r) + F_{ml} \tilde{Y}_m(k_{3,l}r) \right), \quad (7)$$

$$\Phi_4(r, \varphi, z) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \cos(m\varphi) \cos(\alpha_{4,v}z) L_{mv} \tilde{H}_m(k_{4,v}r), \quad (8)$$

де A_{mn} , B_{mn} , C_{qs} , D_{qs} , E_{ml} , F_{ml} і L_{mv} невідомі коефіцієнти, а

$$k_{1,n} = \sqrt{k^2 - \alpha_{1,n}^2}, \quad k_{2,s} = \sqrt{k^2 - \alpha_{2,s}^2}, \\ k_{3,l} = \sqrt{k^2 - \alpha_{3,l}^2}, \quad k_{4,v} = \sqrt{k^2 - \alpha_{4,v}^2}, \\ k = \frac{\omega}{c_0}, \quad \beta_q = \frac{2q\pi}{2\pi - \varphi_0}, \quad \alpha_{1,n} = \frac{2n\pi}{h + a}, \\ \alpha_{2,s} = \frac{2s\pi}{h}, \quad \alpha_{3,l} = \frac{2l\pi}{a}, \quad \alpha_{4,v} = \frac{2v\pi}{h + a}.$$

Оскільки в зображеннях (5) – (8) для потенціалів швидкості в часткових областях є деяка невизначеність, пов'язана з використанням функцій Бесселя і Ханкеля від уявних аргументів, то для виключення її в цих зображеннях введено такі функції:

$$\tilde{J}_{\xi}(\sqrt{k^2 - \alpha^2}r) = \begin{cases} J_{\xi}(\sqrt{k^2 - \alpha^2}r), & k \geq \alpha, \\ I_{\xi}(\sqrt{\alpha^2 - k^2}r), & k < \alpha, \end{cases} \\ \tilde{Y}_{\xi}(\sqrt{k^2 - \alpha^2}r) = \begin{cases} Y_{\xi}(\sqrt{k^2 - \alpha^2}r), & k \geq \alpha, \\ K_{\xi}(\sqrt{\alpha^2 - k^2}r), & k < \alpha, \end{cases}$$

$$\tilde{H}_m \left(\sqrt{k^2 - \alpha_{4,v}^2} r \right) = \begin{cases} H_m^{(1)} \left(\sqrt{k^2 - \alpha_{4,v}^2} r \right), & k \geq \alpha_{4,v}, \\ K_m \left(\sqrt{\alpha_{4,v}^2 - k^2} r \right), & k < \alpha_{4,v}. \end{cases}$$

Тут для зображення Φ_1 треба покласти $\xi = m$, і $\alpha = \alpha_{1,n}$; для $\Phi_2 - \xi = \beta_q$ і $\alpha = \alpha_{2,s}$; для $\Phi_3 - \xi = m$ і $\alpha = \alpha_{3,l}$. Вище використані загальноприйняті позначення: $J_\xi(x)$ і $Y_\xi(x)$ – відповідно функції Бесселя першого і другого роду дійсного порядку від дійсного аргументу; $I_\xi(x)$ і $K_\xi(x)$ – відповідно модифіковані функції Бесселя першого і другого роду дійсного порядку від дійсного аргументу; $H_m^{(1)}(x)$ – функція Ханкеля першого роду цілого порядку від дійсного аргументу.

Тепер необхідно описати коливальні рухи хряща під дією перепаду акустичного тиску на його внутрішній і зовнішній бічних поверхнях. З огляду на прийняту вище механічну модель хрящів у вигляді кільцевого стрижня сталого поперечного перерізу з вільними кінцями, умови рівноваги елемента ds такого стрижня (див. рис. 1, в) для гармонічних згинальних коливань мають вигляд [13]

$$\begin{aligned} \frac{dN}{d\varphi} - Q &= -mR_0\omega^2V, \\ \frac{dQ}{d\varphi} + N &= -mR_0\omega^2W - R_0\Delta q, \\ \frac{dM}{d\varphi} - R_0Q &= 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Тут N, Q, M – відповідно амплітуди нормальної сили, перерізувальної сили і згинального моменту; V, W – амплітуди компонент переміщення перерізів хряща відповідно в тангенціальному й радіальному напрямках; m – погонна маса хряща; Δq – інтенсивність радіально розподіленої сили по боковій поверхні хряща. З огляду на те, що бічні поверхні хряща межують з частковими областями I і IV, величина Δq обчислюється за формулою

$$\Delta q(\varphi) = -2i\omega\rho_0 \int_0^{h/2} (\Phi_4(r_3, \varphi, z) - \Phi_1(r_2, \varphi, z)) dz.$$

Приєднаємо до рівнянь руху хряща відомі залежності з теорії тонких криволінійних стрижнів [13]

$$M = -\frac{\tilde{E}I}{R_0^2} \left(\frac{d^2W}{d\varphi^2} + W \right), \quad (10)$$

$$W = \frac{dV}{d\varphi}, \quad (11)$$

де $I = b^3h/12$ – момент інерції поперечного перетину хряща; \tilde{E} – комплексний модуль пружності, який визначається формулою

$$\tilde{E} = E(1 - i\eta).$$

Тут E – модуль Юнга матеріалу хряща; η – коефіцієнт втрат (або величина обернена добротності коливань хряща).

Звернемо увагу на те, що на відміну від [9 – 11], у формулі (10) використовується комплексний модуль пружності замість модуля Юнга. Це пов'язано з тим, що як показано в [11], в околі власних частот хрящів їхні змушені коливання в складі відповідного повітроносного шляху є досить добротними, незважаючи на втрати механічної енергії коливань хрящів на випромінювання звуку в зовнішнє середовище. Поблизу цих частот всі акустичні характеристики повітроносних шляхів різко змінюють свої значення в дуже вузькому діапазоні частот, що ускладнює їх аналіз. Щоб це не трапилось, тут за допомогою комплексного модуля пружності [14] строго враховуються втрати згинальних коливань хряща вже на етапі постановки задачі, а не наближено, як в [10], за допомогою типової резонансної кривої після розв'язання задачі. Зауважимо, що коефіцієнт втрат згинальних коливань хряща визначається не тільки властивостями матеріалу хряща, а його власною конструкцією. Значення η знаходять з експерименту.

У статті [15] представлені результати циклічних навантажень зрачка матеріалу трахейного хряща. Розглядаючи наближено як еліпс гістерезисну петлю цих циклічних навантажень, можна оцінити коефіцієнт гістерезисних втрат хряща $\eta \approx 0.038$.

Рівняння руху хряща (9) необхідно доповнити граничними умовами. Для стрижня з вільними кінцями величини M , Q і N дорівнюють нулю для $\varphi = \pm \varphi_0/2$. Ці граничні умови з урахуванням (9) – (11) можна записати у вигляді

$$-\frac{\tilde{E}I}{R_0^2} \left(\frac{d^2W}{d\varphi^2} + W \right) \Big|_{\varphi=\pm\varphi_0/2} = 0, \quad (12)$$

$$-\frac{\tilde{E}I}{R_0^3} \left(\frac{d^3W}{d\varphi^3} + \frac{dW}{d\varphi} \right) \Big|_{\varphi=\pm\varphi_0/2} = 0, \quad (13)$$

$$\left(\frac{\tilde{E}I}{R_0^3} \left(\frac{d^4W}{d\varphi^4} + \frac{d^2W}{d\varphi^2} \right) - mR_0\omega^2W - R_0\Delta q \right) \Big|_{\varphi=\pm\varphi_0/2} = 0. \quad (14)$$

З огляду на неоднорідність граничної умови для нормальних зусиль, запишемо загальний розв'язок для вектора переміщень хряща $\xi = (V, W)$ у вигляді суми ряду за симетричними нормованими власними формами $\xi_\gamma = (V_\gamma, W_\gamma)$ коливань хряща в вакуумі [9] і деякого додаткового переміщення $\tilde{\xi} = (\tilde{V}, \tilde{W})$, яке дозволить задовольнити неоднорідну граничну умову (14):

$$\xi = \sum_{\gamma=0}^{\infty} G_\gamma \xi_\gamma + \tilde{G} \tilde{\xi}, \quad (15)$$

де G_γ і \tilde{G} – невідомі коефіцієнти. Нульовий член ряду в (15) відповідає поступальному переміщенню хряща як абсолютно твердого тіла.

Тангенціальні й радіальні переміщення хряща не є незалежними функціями, а пов'язані між собою співвідношенням (11). Тому досить вказати спосіб обчислення будь-якої з компонент переміщення. Наприклад, амплітуду радіального додаткового переміщення $\tilde{W}(\varphi)$ виберемо в такому вигляді:

$$\tilde{W}(\varphi) = \left(1 - \left(\frac{\varphi}{\varphi_0/2} \right)^2 \right)^4. \quad (16)$$

Такий вибір дозволяє тотожно задовольнити граничні умови для згинального моменту (12) і перерізуювальної сили (13). Зображення для вектора переміщень хряща (15) з урахуванням (16) дозволяє через вибір коефіцієнта \tilde{G} задовольнити неоднорідну граничну умову (14).

Запишемо тепер функціональні рівняння для умови неперервності звукового поля на межах поділу часткових областей, а також умову рівності коливальних швидкостей хрящів і точок навколишнього середовища. На межі часткових областей $r = r_2$ маємо

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = \begin{cases} -i\omega W, & |z| \leq h/2, \quad |\varphi| \leq \varphi_0/2, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}, & |z| \leq h/2, \quad \varphi_0/2 \leq |\varphi| \leq \pi, \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial r}, & h/2 \leq |z| \leq (h+a)/2, \quad |\varphi| \leq \pi, \end{cases} \quad (17)$$

$$\Phi_2 = \Phi_1, \quad |z| \leq h/2, \quad \varphi_0/2 \leq |\varphi| \leq \pi, \quad (18)$$

$$\Phi_3 = \Phi_1, \quad h/2 \leq |z| \leq (h+a)/2, \quad |\varphi| \leq \pi, \quad (19)$$

а для $r = r_2$ треба записати

$$\frac{\partial \Phi_4}{\partial r} = \begin{cases} -i\omega W, & |z| \leq h/2, \quad |\varphi| \leq \varphi_0/2, \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial r}, & |z| \leq h/2, \quad \varphi_0/2 \leq |\varphi| \leq \pi, \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial r}, & h/2 \leq |z| \leq (h+a)/2, \quad |\varphi| \leq \pi, \end{cases} \quad (20)$$

$$\Phi_2 = \Phi_4, \quad |z| \leq h/2, \quad \varphi_0/2 \leq |\varphi| \leq \pi, \quad (21)$$

$$\Phi_3 = \Phi_4, \quad h/2 \leq |z| \leq (h+a)/2, \quad |\varphi| \leq \pi. \quad (22)$$

Гранична умова (1), диференціальні рівняння згинальних коливань хряща (9) разом з граничними умовами (12) – (14) і умови рівності звукового поля на межах часткових областей (17) – (22) утворюють систему функціональних рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів в зображеннях для потенціалів коливальної швидкості в часткових областях (5) – (8) і для вектора переміщень хряща (15). Алгебраїзація цієї системи

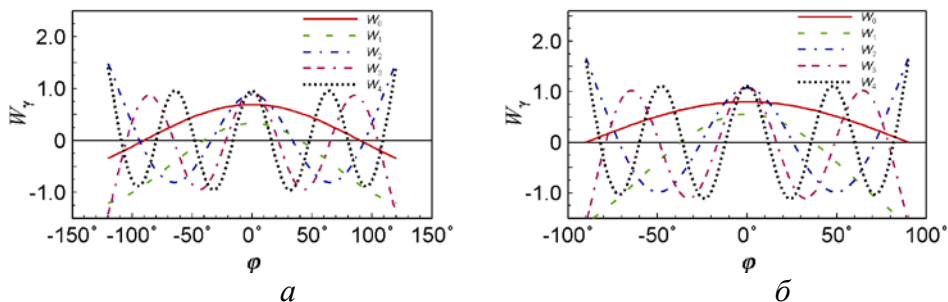
виконуємо стандартним способом [12] на основі властивостей повноти і ортогональності як функцій, що характеризують кутовий і осьовий розподіл звукового поля в часткових областях на відповідних інтервалах кута φ і осьової координати z , так і симетричних вектор-функцій власних форм коливань хряща в вакуумі ξ_γ на інтервалі $0 \leq \varphi \leq \varphi_0/2$. У результаті дістаємо нескінченну систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка є вихідною для кількісних даних про звукове поле повітроносного шляху й швидкості коливань хрящів. Її розв'язок знайдемо за допомогою методу простої редукції, тобто переходимо від нескінченної системи до скінченної. Кількість утримуваних невідомих в скінченній системі визначається в процесі числового експерименту перевірки точності виконання закону збереження енергії, граничних умов і умов спряження звукового поля на межах часткових областей. Як вже зазначалося вище, зображення (5)–(8) тотожно задовольняють граничні умови (2)–(4) і умову випромінювання на нескінченності. Щодо граничної умови (1), то виконати її можна точно використовуючи зв'язок між невідомими коефіцієнтами A_{mn} і B_{mn} . Як бачимо, похибка числового розв'язку задачі повністю залежить від точності виконання умов спряження на межах часткових областей. Звернемо увагу на те, що серед часткових областей є області з кутовими точками на межі. Як добре відомо, в околі цих точок коливальна швидкість матиме інтегровальну особливість [12]. Однак ця особливість має локальний характер і не впливає як на інтегральні характеристики акустичного поля, так і на точкові характеристики далеко від цих кутових точок. Також наявність кутових точок не є перешкодою для застосування методу простої редукції [12].

3. Аналіз числових результатів

Для конкретних розрахунків були використані такі геометричні й фізичні характеристики стінок розглянутих повітроносних шляхів, а саме: для трахеї – $2R_0 = 1.75 \cdot 10^{-2}$ м, $d = 1.3 \cdot 10^{-3}$ м, $a = 1.4 \cdot 10^{-3}$ м, $\varphi_0 = 240^\circ$, $b = 1.64 \cdot 10^{-3}$ м, $h = 3.2 \cdot 10^{-3}$ м; для головних бронхів – $2R_0 = 1.18 \cdot 10^{-2}$ м, $d = 0.88 \cdot 10^{-3}$ м, $a = 0.94 \cdot 10^{-3}$ м, $\varphi_0 = 180^\circ$, $b = 1.1 \cdot 10^{-3}$ м, $h = 2.18 \cdot 10^{-3}$ м. Густина біотканин хрящів дорівнювала $1.1 \cdot 10^3$ кг/м³, а модуль Юнга – $4.4 \cdot 10^6$ Па. Водночас вважали, що акустичні властивості м'яких тканин стінок повітроносних шляхів і тканин середостіння ідентичні акустичним властивостям води, тобто $\rho_0 = 1000$ кг/м³ і $c_0 = 1500$ м/с. Всі розрахунки виконані в цікавому з погляду клінічної практики діапазоні частот $f \leq 2000$ Гц.

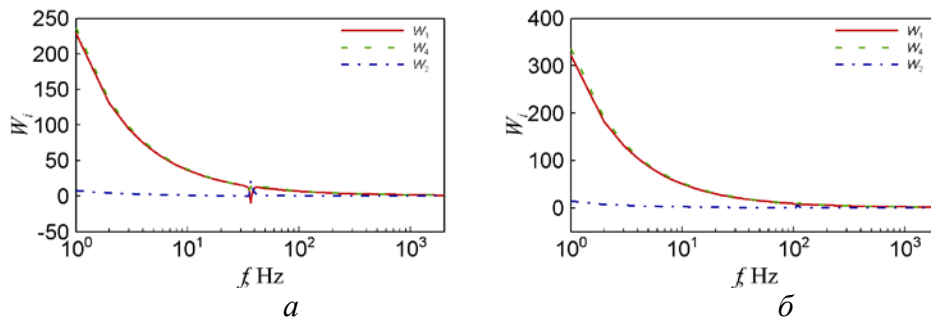
Під час розв'язання задачі вектор переміщення точок серединної лінії хряща записували у вигляді суми ряду за його симетричними власними формами коливань у вакуумі. Звернемося до рис. 3, на якому зображені радіальні переміщення для п'яти перших симетричних власних форм коливань хрящів трахеї і головних бронхів у вакуумі без ураху-

вання гістерезисних втрат. Як бачимо, залежність радіальних переміщень від кута досить складна для чисто згинальних форм коливань ($\gamma \geq 1$). Вони мають протифазні ділянки коливань і вузлові точки, кількість яких зростає з ростом номера власної форми коливань хряща. Дані на цьому рисунку дозволяють переконатися в правильності висловленого вище припущення про те, що, через специфічну геометрію хрящів, коливання стінок повітряноносних шляхів транзитної зони не можуть бути осесиметричними.



a – хряща трахеї; *б* – хряща головних бронхів

Рис. 3. Радіальні переміщення симетричних власних форм коливань



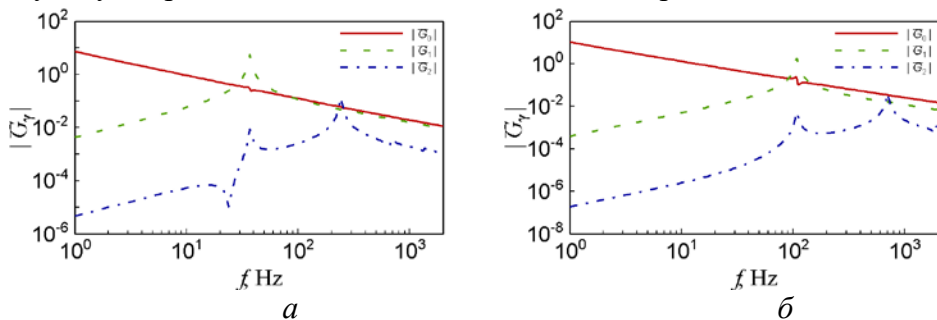
a – трахеї; *б* – головних бронхів

Рис. 4. Потужність енергії випромінювання звуку повітряноносних шляхів

Зображенням на рис. 3 формам коливань відповідають власні частоти: для хряща трахеї – $f_\gamma = 0; 60.7; 362.1; 980.4; 1886.0$ Гц; для хряща головних бронхів – $f_\gamma = 0; 168.7; 1020.6; 2659.1; 5040.7$ Гц.

Перейдемо тепер до аналізу змущених коливань стінок розглянутих повітряноносних шляхів під дією рівномірно розподіленого тиску p_0 на внутрішній стінці. Що стосується якості виконання умов спряження на межах часткових областей і граничних умов для стрижня, то, як

показали числові експерименти, прийнятних результатів можна добитися якщо у відповідній алгебраїчній системі залишати не менше 800 невідомих. Тоді якість виконання умов спряження для тиску досить добра – модулі і фази відповідних тисків збігаються з графічною точністю. Якість виконання умов спряження для швидкості гірша в околі кутових точок часткових областей через, як було сказано вище, інтегральну особливість нормальних складових швидкостей тут. Наявність кутових точок істотно не впливає на загальне поле розподілу тиску і швидкості коливань в частковій області IV, яка моделює тканини середостіння. Підтвердженням цього може бути якість виконання закону збереження енергії. Числова перевірка показала, що сума потужності випромінювання енергії внутрішньої стінки повітроносного шляху w_1 і потужності випромінювання енергії хряща w_5 дорівнює потужності звукової хвилі w_4 на вході в IV часткову область з відносною похибкою 10^{-6} . Частотні залежності величин w_1 , w_4 і w_5 показані на рис. 4. Тут вони нормовані відносно величини $\rho_0 c_0 S_1 (p_0 / \omega_* \rho_0 R_0)^2$, де $\omega_* = \sqrt{EI/m}/R_0^2$ – безрозмірна кругова частота і $S_1 = 2\pi r_1(a+h)$ – площа одного періоду внутрішньої стінки відповідного повітроносного шляху. Аналізуючи хід кривих на цьому малюнку, неважко перекоонатися, що загалом різниця між w_1 і w_4 незначна, а хрящі є неефективними джерелами звуку, за винятком дуже вузького інтервалу в околі таких частот: для трахеї – $f = 37$ Гц і для головних бронхів – $f = 108$ Гц. Ці частоти відповідають першій моді власних коливань хрящів у складі стінки повітроносного шляху. Природно вони нижчі, внаслідок маси навколишнього середовища, ніж власні частоти хрящів у вакуумі. Тут всі криві різко змінюють свою поведінку, що вказує на істотний вплив в цьому діапазоні частот згинальних коливань хрящів на інтегральні характеристики стінки повітроносних шляхів. Цікаво відзначити, що величина w_1 тут може мати від'ємні значення, тобто внутрішня стінка поглинає звукову енергію з поля і повітроносний шлях випромінює звукову енергію тільки зовнішньою частиною хрящів.

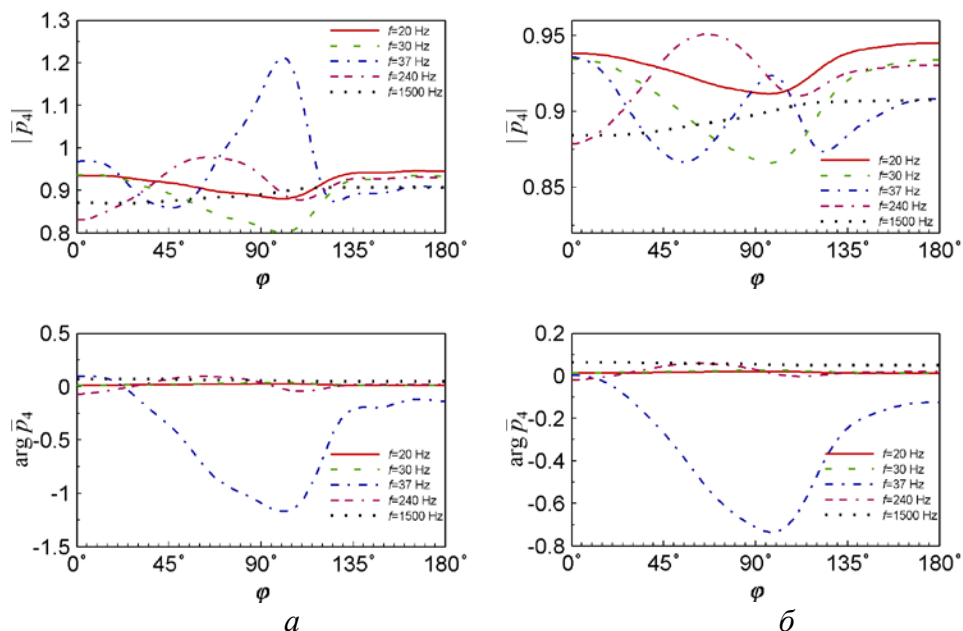


a – хряща трахеї; *b* – хряща головних бронхів

Рис. 5. Частотні залежності модулів коефіцієнтів розкладу за власними формами радіальної коливальної швидкості

Щоб глибше осмислити фізичні процеси під час випромінювання звуку трахеєю і головними бронхами, розглянемо кінематику хрящів в складі стінок повітроносних шляхів. На рис. 5 зображені частотні залежності нормованих щодо $p_0/\omega_*^2\rho_0R_0$ значень модулів коефіцієнтів розкладання швидкості коливань хрящів за їхніми власними формами коливань в вакуумі. Як бачимо з рис. 5, *a* основний внесок в коливання хрящів трахеї вносять перші три моди. Цікаво, що вклад кожної з них істотно залежить від частоти. На низьких частотах, приблизно до 30 Гц, основний внесок дає нульова мода. Тому хрящ тут рухається як єдине ціле. В області приблизно від 30 до 70 Гц головну роль відіграють коливання, які відповідають першій власній формі згинальних коливань хряща. Далі нульова і перша моди дають приблизно однаковий внесок і форма коливань хряща сильно ускладнюється. Поблизу частоти 240 Гц коливання хряща стають ще більш складними, оскільки внесок перших трьох мод приблизно однаковий. Нарешті, вище 270 Гц основний внесок в коливання трахейного хряща дають тільки перші дві моди.

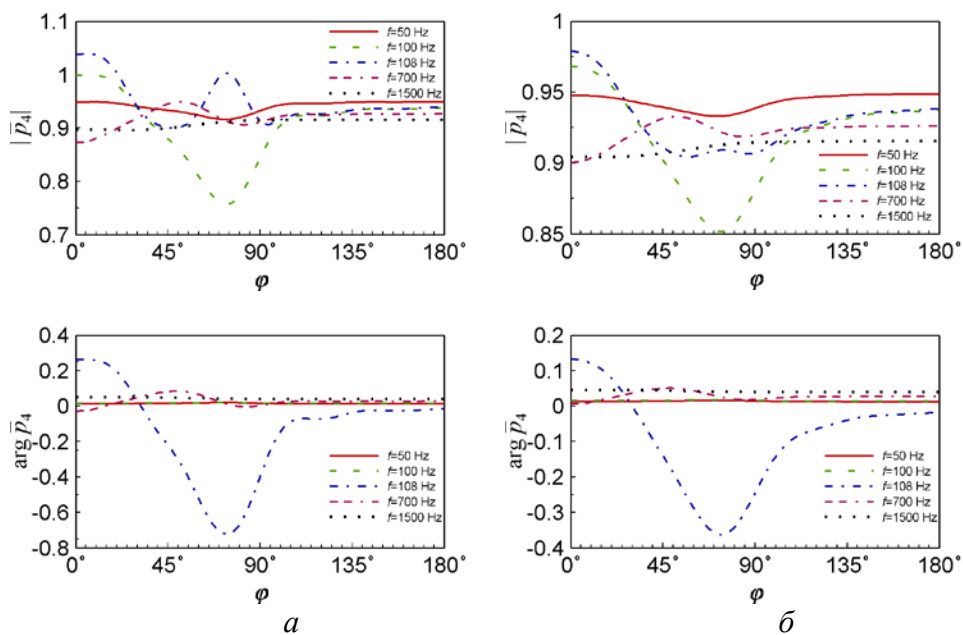
На відміну від трахейного хряща, коливання бронхіального хряща формують переважно дві перші моди, див. рис. 5, *б*. Тут на низьких частотах, приблизно до 90 Гц, основну роль відіграє нульова мода. У діапазоні частот від 90 до 140 Гц переважає перша мода. Вище за частотою внески цих двох мод приблизно однакові. Лише поблизу частоти 710 Гц можливий невеликий вплив третьої моди.



$$a - z = 0; \quad b - z = (h + a)/2$$

Рис. 6. Модуль і фаза розподілу тиску на зовнішній поверхні трахеї

Розглянемо тепер як впливає кінематика хрящів на розподіл тиску на зовнішній поверхні стінки повітронесних шляхів. Для цього використовуємо зображення потенціалу звукового поля в IV частковій області (8). На рис. 6 показані модуль і фаза безрозмірного тиску $p_4(r_3, \varphi, z)/p_0$ для $z = 0$ (горизонтальна площина симетрії хряща) і $z = (h + a)/2$ (горизонтальна площина симетрії міжхрящевої зв'язки) на зовнішній поверхні трахеї. Як і слід було очікувати, розподіл акустичного тиску на зовнішній поверхні трахеї загалом має досить складний характер. Тиск тут істотно залежить від кута φ і координати z , а також від частоти збудження трахеї f . Водночас на зовнішній поверхні міжхрящевої зв'язки масштаб зміни модуля тиску менший, ніж на поверхні хряща. Як бачимо, зміною фази тиску можна знехтувати по всій поверхні трахеї у всьому діапазоні частот, крім околу першої власної частини хряща $f = 37$ Гц. Тут теж різниця між максимальним значенням модуля тиску і мінімальним дорівнює $0.35 \cdot p_0$ на поверхні хряща і $0.07 \cdot p_0$ на поверхні міжхрящевої зв'язки. Слід зазначити, що тиск приблизно однаковий як за амплітудою, так і за фазою на поверхні м'яких тканин трахеї для кутів $135^\circ \leq |\varphi| \leq 180^\circ$ незалежно від осової координати z .



$$a - z = 0; \quad b - z = (h + a)/2$$

Рис. 7. Модуль і фаза розподілу тиску на зовнішній поверхні головних бронхів

Криві розподілу модуля і фази тиску на поверхні головних бронхів зображені на рис. 7. Загалом вони повторюють хід відповідних кри-

вих на рис. 6, але оскільки коливання хрящів в стінці головних бронхів визначають тільки дві перші їхні власні моди, то зміни характеристик тиску тут менші, ніж для трахеї. Тут теж поблизу першої власної частоти хрящів $f = 108$ Гц значення модуля і фази можуть істотно змінюватися на поверхні зовнішньої стінки головних бронхів.

Висновки

На основі аналізу анатомічних і фізичних характеристик стінок трахеї і головних бронхів людини побудована фізична модель їхніх коливань під впливом заданого рівномірно розподіленого тиску на внутрішній стінці цих повітроносних шляхів. Використовуючи метод часткових областей і теорію згинальних коливань кільцевих стрижнів запропонований метод оцінки акустичних властивостей верхніх повітроносних шляхів з урахуванням згинальних коливань хрящів в складі їхніх стінок. Встановлено, за допомогою числового аналізу, що змушені коливання хрящів мають складний характер, який визначається головно двома першими власними модами. Однак внесок окремих мод в загальний рух хрящів не однаковий та істотно залежить від частоти. Коливання хрящів може істотно впливати на розподіл акустичного тиску на поверхні повітроносних шляхів, особливо поблизу перших власних частот. Для трахеї це частота $f = 37$ Гц, а для головних бронхів – $f = 108$ Гц. Результати числового моделювання дозволяють стверджувати, що під дією осесиметричного розподілу звуку всередині трахеї і головних бронхів їхні стінки не завжди будуть коливатися на осесиметричній моді (як припускали раніше), а можуть коливатися за досить складними законами, що характеризується наявністю протифазних ділянок.

Література

1. Вовк И.В., Гринченко В.Т. Звук, рожденный потоком (очерки об аэрогидродинамической акустике). – К.: Наукова думка, 2010. – 221 с.
2. Wodicka G.R., Stevens K.N., Golub H.L., Cravalho E.G., Shannon D.C. A model of acoustic transmission in the respiratory system // IEEE Trans. Biomed. Eng. – 1989. – Vol. 36, Issue 9. – P. 925–933.
3. Вовк И.В., Гринченко В.Т., Олейник В.Н. Проблемы моделирования акустических свойств грудной клетки и измерения шумов дыхания // Акуст. ж. – 1995. – Том 41, № 5. – С. 758–768.
4. Вовк И.В., Косовец Л.И., Мацыпура В.Т., Олийнык В.Н. Моделирование процесса распространения звука в грудной клетке человека. Часть 1. Теория // Акуст. вісн. – 2011. – Том 14, № 5. – С. 16–25.
5. Басовский В.Г., Вовк И.В., Вовк О.И. Особенности колебаний стенок трахеи человека // Акуст. вісн. – 2001. – Том 4, № 3. – С. 10–21.
6. Сапин М.Р., Билич Г.Л. Анатомия человека. – М.: Высшая школа, 1989. – 544 с.
7. Применение ультразвука в медицине: Физические основы / Ред. К. Хилла. – М.: Мир, 1989. – 568 с.

8. Lambert R.K., Baile E.M., Moreno R., Bert J., Pare P.D. A method for estimating the young's modulus of complete tracheal cartilage // J. Appl. Physiol. – 1991. – Vol. 70, Issue 3. – P. 1152–1159.
9. Басовский В.Г., Вовк И.В. Собственные частоты и формы колебаний хрящей трахеи и бронхов человека // Акуст. вісн. – 2002. – Том 5, № 3. – С. 5–11.
10. Басовский В.Г., Вовк И.В. Вынужденные колебания хрящей трахеи и бронхов человека // Акуст. вісн. – 2006. – Том 9, № 1. – С. 10–14.
11. Басовский В.Г. Об одном методе оценки акустических свойств трахеи и главных бронхов человека // Акустичний симпозиум “Консонанс-2013”. Збірник праць. – Київ, 2013. – С. 20–25.
12. Гринченко В.Т., Вовк И.В. Волновые задачи рассеяния звука на упругих оболочках. – К.: Наукова думка, 1986. – 240 с.
13. Ляв А. Математическая теория упругости. – М.-Л.: ОНТИ, 1935. – 674 с.
14. Скучик Е. Простые и сложные колебательные системы. – М.: Мир, 1971. – 557 с.
15. Trabelsia O., Del Palomara A.P., Lopez-Villalobosb J.L., Ginel A., Doblare M. Experimental characterization and constitutive modeling of the mechanical behavior of the human trachea // Medical Engineering & Physics. – 2010. – Vol. 32, Issue 1. – P. 76–82.

Стаття надійшла до редакційної колегії 12.10.2021 р.

ON THE EFFECT ON THE ACOUSTIC PROPERTIES OF THE HUMEN TRACHEA AND MAIN BRONCHI OF BENDING VIBRATIONS OF CARTILAGES IN THEIR WALLS

V. G. Basovsky

*Institute of Hydromechanics of NAS of Ukraine;
03057, Kyiv, Marii Kapnist st. 8/4, Ukraine;
ph. +38(044)456-43-13; e-mail basovsky@ukr.net*

Using the theory of bending oscillations of annular open rods, a calculation scheme for quantitative estimation of forced oscillations of tracheal and bronchial cartilages in the composition of the corresponding airways has been developed. It has been studied how the oscillations of these cartilages affect the acoustic properties of the human trachea and main bronchi. An improved acoustic model of the human trachea and main bronchi has been constructed, which allows to take more fully into account the relevant transfer functions to study the patterns of sound transmission from the main human airways to the outer surface of the chest.

Key words: *sounds of breathing, trachea, main bronchi.*