Теорія ймовірностей та математична статистка

УДК 519.21+517.95
DOI: 10.31471/2304-7399-2021-16(60)-20-32

ЗБУРЕННЯ РОТАЦІЙНО-ІНВАРІАНТНОГО α-СТІЙКОГО ВИПАДКОВОГО ПРОЦЕСУ ОПЕРАТОРОМ ПСЕВДОГРАДІЄНТА

М. В. Бойко, М. М. Осипчук
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; вул. Шевченка, 57, м. Івано-Франківськ;
e-mail: boikocasper@gmail.com, mykhailo.osypchuk@pnu.edu.ua

Будується узагальнений фундаментальний розв'язок лінійного параболічного псевдодиференціального рівняння зі старшим оператором, який є твірним оператором ротаційно-інваріантного α-стійкого випадкового процесу Маркова в багатовимірному евклідовому просторі з α, що лежить в межах від 1 до 2 невключно. Оператор меншого порядку є "псевдоградієнтом" з коефіцієнтом, що є векторною функцією з одного з класів: обмежені неперервні чи інтегровні в деякому степені.

Ключові слова: *α-стійкий випадковий процес, твірний оператор, псевдоградієнт, псевдодиференціальне рівняння, фундаментальний розв'язок.*

1. Вступ

Ротаційно інваріантним α-стійким випадковим процесом в d-вимірному евклідовому просторі $\mathbb{R}^d$ зветься однорідний процес Маркова $(x(t))_{t\geq 0}$, що задається своїм твірним оператором $\boldsymbol{A}$, символом якого є функція $\left(-c|\xi|^{\alpha}\right)_{\xi\in\mathbb{R}^d}$ з фіксованими сталими $c > 0$ та $\alpha \in (0,2]$. Тут і далі в залежності від контексту символом $|\cdot|$ позначатиметься як евклідова норма в $\mathbb{R}^d$, так і абсолютна величина дійсного числа. Іноді такий оператор представляють як $-c(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$, де Δ – оператор Лапласа. Такий оператор, очевидно є оператором диференціювання чи псевдодиференціальним оператором порядку α.

Псевдоградієнтом називатимемо оператор $\boldsymbol{B}$, який задається символом $\left(i|\xi|^{\beta-1}\xi\right)_{\xi\in\mathbb{R}^d}$ і вважатимемо, що $0 < \beta < \alpha$.

Під збуренням випадкового процесу $(x(t))_{t\geq 0}$ маємо на увазі побудову випадкового процесу Маркова (якщо це можливо) з твірним оператором $\boldsymbol{A} + (a(\cdot), \boldsymbol{B})$, де $(a(x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ деяка $\mathbb{R}^d$ – значна функція, а позначення $(\cdot,\cdot)$ означає скалярний добуток в $\mathbb{R}^d$. В цій роботі будуть вивчатися умови на порядок β оператора $\boldsymbol{B}$ та на функцію $(a(x)_{x\in\mathbb{R}^d}$, за яких таке збурення може бути побудоване.

При $\alpha = 2$ випадковий процес, $(x(t))_{t\geq 0}$ є вінеровим процесом чи, іншими словами, процесом броунівського руху. Якщо ж $\beta = 1$, маємо звичайний градієнт в якості оператора $\boldsymbol{B}$. Побудові збурень вінерового процесу оператором градієнта присвячено значна кількість робіт (див., наприклад, [1-4]). Відомі також результати при $1 < \alpha < 2, \beta = \alpha - 1$ (див. [5-12]). В згаданих роботах розглядалися функції $(a(x)_{x\in\mathbb{R}^d}$ з різноманітних функціональних класів, зокрема, обмежені, інтегровні в певному степені, деякі узагальнені.

2. Основні поняття та попередні результати

Добре відомо (див., наприклад, [13, 14]), що щільністю ймовірності переходу випадкового процесу $(x(t))_{t\geq 0}$ є функція

$$g(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left\{i(\xi, y-x) - ct|\xi|^\alpha\right\} d\xi$$

визначена при всіх $t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$. В подальшому нам знадобляться деякі оцінки функцій g, а саме:

- існують такі сталі $0 < N' < N$, що при всіх $t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$ виконуються нерівності

$$N' \frac{t}{\left(t^{1/\alpha} + |y-x|\right)^{d+\alpha}} \leq g(t,x,y) \leq N \frac{t}{\left(t^{1/\alpha} + |y-x|\right)^{d+\alpha}}; \quad (1)$$

- при кожному натуральному k існує стала $N_k > 0$ така, що при всіх $t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$ виконується нерівність

$$|\mathfrak{D}^k g(t,\cdot,y)(x)| \leq N_k \frac{t}{\left(t^{1/\alpha} + |y-x|\right)^{d+\alpha+k}}; \quad (2)$$

де $\mathfrak{D}^k g(t,\cdot,y)(x)$ означає довільну похідну порядку k від функції g за аргументами $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$;

- існують сталі $N_\varkappa > 0$ такі, що при всіх $t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$ виконуються нерівності

$$|\mathfrak{D}^\varkappa g(t,\cdot,y)(x)| \leq N_\varkappa \frac{1}{\left(t^{1/\alpha} + |y-x|\right)^{d+\varkappa}}, \quad (3)$$

в яких $\mathfrak{D}^\varkappa$ означає псевдодеференціальний оператор, чий символ є однорідною порядку $\varkappa > 0$ досить гладкою (крім, можливо, в точці 0) функцією.

Зауважимо, що вимоги останнього пункту виконуються для символа оператора $\boldsymbol{B}$ при довільному із зазначених вище β. Наведені оцінки (1)-(3) одержані в роботі [13] (див. також [14]).

В статті [13] доведена корисна для нас нерівність, яка складає зміст наступної леми.

<u>Лема 1.</u> При всіх $t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$ та кожних дійсних $k, l, \varkappa$ та λ, що задовольняють співвідношення $-1 < \frac{k}{\alpha} < \varkappa,\ -1 < \frac{l}{\alpha} < \lambda$**,** виконується нерівність**:**

$$\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(t-\tau)^{\varkappa}}{\left((t-\tau)^{1/\alpha} + |z-x|\right)^{d+\alpha+k}} \cdot \frac{\tau^{\lambda}}{\left(\tau^{1/\alpha} + |y-z|\right)^{d+\alpha+l}} dz \le$$
$$\le K\left(B\left(\varkappa - \frac{k}{\alpha}, 1+\alpha\right) \frac{t^{\varkappa+\lambda-\frac{k}{\alpha}}}{\left(t^{1/\alpha} + |y-x|\right)^{d+\alpha+l}} + \right.$$
$$\left. + B\left(1+\varkappa, \lambda - \frac{l}{\alpha}\right) \frac{t^{\varkappa+\lambda-\frac{l}{\alpha}}}{\left(t^{1/\alpha} + |y-x|\right)^{d+\alpha+l}} \right), \qquad (4)$$

в якій K деяка додатна стала, що залежить лише від d, α, k і l, а $B(\cdot,\cdot)$ бета-функція Ейлера.

З випадковим процесом $(x(t))_{t\ge 0}$ пов'язана напівгрупа операторів $(\boldsymbol{T}_t)_{t>0}$ заданих на множині $C_b\left(\mathbb{R}^d\right)$, обмежених неперервних на $\mathbb{R}^d$ скалярних функцій, рівністю

$$(\boldsymbol{T}_t\varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\varphi(y)dy, \varphi \in C_b\left(\mathbb{R}^d\right), t > 0, x \in \mathbb{R}^d .$$

Оператор $\boldsymbol{A}$ є генератором цієї напівгрупи операторів. Відповідно до основних положень теорії збурень лінійних операторів напівгрупа операторів $(\widehat{\boldsymbol{T}}_t)_{t>0}$ з генератором $\boldsymbol{A} + (a(\cdot), \boldsymbol{B})$ повинна задовольняти наступну пару рівнянь збурення:

$$\left(\widehat{\boldsymbol{T}}_t\varphi\right)(x) = (\boldsymbol{T}_t\varphi)(x) + \int_0^t \boldsymbol{T}_{t-\tau}\left(a(\cdot), \boldsymbol{B}\left(\widehat{\boldsymbol{T}}_\tau\varphi\right)(\cdot)\right)(x)d\tau;$$

$$\left(\widehat{\boldsymbol{T}}_t\varphi\right)(x) = (\boldsymbol{T}_t\varphi)(x) + \int_0^t \widehat{\boldsymbol{T}}_{t-\tau}\left(a(\cdot), \boldsymbol{B}(\boldsymbol{T}_\tau\varphi)(\cdot)\right)(x)d\tau;$$

З другого рівняння видно, що оператори $\widehat{\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{t}}$ породжують заряди на σ-алгебрі борельових підмножин $\mathbb{R}^d$ абсолютно неперервні відносно лебегової міри. Тобто повинна існувати вимірна функція $\left(G(t,x,y)\right)_{t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d}$ така, що

$$\left(\widehat{\boldsymbol{T}}_t\varphi\right)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} G(t,x,y)\varphi(x)dy \tag{5}$$

при всіх $t > 0, x \in \mathbb{R}^d$ та $\varphi \in C_b\left(\mathbb{R}^d\right)$. Ця функція є розв'язком кожного з наступної пари рівнянь:

$$G(t,x,y) = g(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,z)\left(a(z), \boldsymbol{B}G(\tau,\cdot,y)(z)\right)dz \tag{6}$$

$$G(t,x,y) = g(t,x,y) + \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^d} G(t-\tau,x,z)\left(a(z), \boldsymbol{B}g(\tau,\cdot,y)(z)\right)dz \tag{7}$$

З точки зору теорії диференціальних рівнянь для вибраної функції $\varphi \in C_b\left(\mathbb{R}^d\right)$ функція $u(t,x) = (\boldsymbol{T}_t\varphi)(x), t > 0, x \in \mathbb{R}^d$ є розв'язком задачі Коші для рівняння ($t > 0, x \in \mathbb{R}^d$)$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \boldsymbol{A}u(t,\cdot)(x)$ з початковою умовою $u(0+,x) = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^d$. При цьому функція g зветься фундаментальним розв'язком цієї задачі або рівняння.

В наступних пунктах ми побудуємо розв'язок рівняння (6) та встановимо, що він є фундаментальним розв'язком задачі Коші для відповідного псевдодиференціального рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \boldsymbol{A}u(t,\cdot)(x) + \left(a(x), \boldsymbol{B}u(t,\cdot)(x)\right), t > 0, x \in \mathbb{R}^d. \tag{8}$$

3. Побудова збурень

В цій роботі ми розглядаємо дві ситуації щодо функцій $(a(x))_{x\in\mathbb{R}^d}$. В першій вважатимемо, що $a \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$, тобто є обмеженою вимірною функцією. Тоді нормою функції a вважатимемо число: $\|a\|_\infty = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^d}|a(x)|$.В другій ситуації матимемо $a \in L_p(\mathbb{R}^d)$ з деяким $p > 1$ і позначатимемо $\|a\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}^d} |a(x)|^p \, \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$.

В кожному з цих випадків будуємо розв'язок рівняння (6) методом послідовних наближень. Деякі технічні моменти змушують нас розглядати ці випадки окремо. Розв'язавши рівняння (6), ми зможемо побудувати фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння:

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \boldsymbol{A}u(t,\cdot)(x) + \left(a(x), \boldsymbol{B}u(t,\cdot)(x)\right). \tag{9}$$

Тому займемося побудовою розв'язку рівняння (6). Для початку формально застосуємо оператор $\boldsymbol{B}$ до обох частин рівняння (6). Позначивши $V_0(t,x,y) = \boldsymbol{B}g(t,\cdot,y)(x)$ та $V(t,x,y) = \boldsymbol{B}G(t,\cdot,y)(x)$, одержимо

$$V(t,x,y)=V_0(t,x,y)+\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d}V_0(t-\tau,x,y)\big(a(z),V(\tau,\cdot,y)(z)\big)dz \quad (10)$$

і розв'язок рівняння (6) шукатимемо у вигляді:

$$G(t,x,y)=g(t,x,y)++\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d}g(t-\tau,x,y)\big(a(z),V(\tau,\cdot,y)(z)\big)dz, \quad (11)$$

в якому функція V є розв'язком рівняння (22). Оскільки

$$\left|V_0(t,x,y)\right|\le N\frac{1}{\left(t^{1/\alpha}+|y-x|\right)^{d+\beta}},t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d \quad (12)$$

(див.(3)), то рівняння (10) розв'язуватимемо методом послідовних наближень. Тобто шукаємо його розв'язок у вигляді суми ряду

$$V(t,x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}V_k(t,x,y), \quad (13)$$

для членів якого справджується ($t>0,\ x\in\mathbb{R}^d,\ y\in\mathbb{R}^d$), при $k\ge 1$

$$V(t,x,y)=\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d}V_0(t-\tau,x,y)\big(a(z),V_{k-1}(\tau,z,y)\big)dz \quad (14)$$

Індукцією по k з використанням оцінки (3) та твердження Леми 1 одержуємо наступні оцінки. Якщо $a\ \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$, то

$$\left|V_k(t,x,y)\right|\le R_k\frac{t^{k\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)}}{\left(t^{\frac{1}{\alpha}}+|y-x|\right)^{d+\beta}},t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d, \quad (15)$$

де числова послідовність $\{R_k,k\ge 0\}$ задовольняє рекурентне співвідношення (при $k\ge 1$)

$$R_k=R_{k-1}\|a\|_\infty KN_\beta\left(B\left(1,k\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)\right)+B\left(1-\frac{\beta}{\alpha},k-(k-1)\frac{\beta}{\alpha}\right)\right)$$

з $R_0=N_\beta$. Якщо $a\ \in L_p(\mathbb{R}^d)$ з деякими $p>\frac{d+\alpha}{\alpha-\beta}$, то при кожному $T>0$ нерівність (15) виконується для всіх $t\in(0;T],x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d$ з послідовністю $\{R_k,k\ge 0\}$, для членів якої справджується (при $k\ge 1$) співвідношення

$$R_k=R_{k-1}\|a\|_p T^{\frac{1}{p}+k\left(1-\frac{\beta}{\alpha}-\frac{1}{p}\frac{(d+\alpha)}{\alpha}\right)}N_\beta K^{1/q}\left(B\left(1,1+\frac{d}{\alpha}-q\frac{(d+\beta)}{\alpha}\right)+\right.$$

$$+B\left(1+\frac{d}{\alpha}-q\frac{(d+\beta)}{\alpha}(k-1),1+\frac{d}{\alpha}-q\frac{(d+\beta)}{\alpha}\right)\Bigg)^{1/q}$$

з $R_0 = N_\beta$.

Це означає, що ряд в (12) збігається рівномірно на $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$ по (x,y) та локально рівномірно по $t > 0$.

Таким чином функція $V(t,x,y)_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$, що задається рівністю (12) є розв'язком рівняння (10). Крім того, ця функція задовольняє нерівність

$$\left|V(t,x,y)\right| \le C_T \frac{1}{\left(t^{1/\alpha}+|y-x|\right)^{d+\beta}} \tag{16}$$

для кожного $T > 0$ при всіх $t \in (0;T], x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$ з деякою сталою $C_T > 0$, що залежить від T. Як легко зрозуміти, такий розв'язок єдиний в класі функцій, які задовольняють нерівність(16). Дійсно, для різниці кожних двох таких розв'язків рівняння (10), виконується оцінка (15) з кожним $k \ge 0$. Тобто ця різниця тотожно рівна нулю.

Рівність (11), тепер, задає шукану функцію $G(t,x,y)_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ Ця функція задовольняє наступну оцінку

$$|G(t,x,y)| \le C_T \frac{t^{\frac{\beta}{\alpha}}}{\left(t^{\frac{1}{\alpha}}+|y-x|\right)^{d+\beta}} t \in (0;T], x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d, \tag{17}$$

правильну для кожного $T > 0$ з деякими сталими $C_T > 0$.

Враховуючи, що $\int_{\mathbb{R}^d} g(t,x,y)\,dy \equiv 1$ одержуємо рівність $\int_{\mathbb{R}^d} G(t,x,y)\,dy \equiv 1$. Напівгрупова властивість функції G:

$$\int_{\mathbb{R}^d} G(s,x,z)G(t,z,y)\,dz = G(s+t,x,y), s>0, t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d,$$

доводиться стандартним способом (див., наприклад, [3]).

Таким чином можемо сформулювати твердження.

Теорема 1. Нехай функція $a: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ належить до класу $L_p(R^d)$ ($\mathbb{R}^d$) з $p > \frac{d+\alpha}{\alpha-\beta}$ (включно з $p = +\infty$). Тоді існує збурення $G(t,x,y)_{t>0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}$ щільності ймовірності переходу ротаційно інваріантного α-стійкого ($\alpha \in (1;2)$) випадкового процесу оператором $(a(\cdot), \boldsymbol{B})$, в якому оператор $\boldsymbol{B}$ заданий своїм символом $\left(i|\xi|^{\beta-1}\xi\right)_{\xi\in\mathbb{R}^d}$ з $0 < \beta < \alpha$. Це збурення породжує на множині неперервних обмежених функцій напівгрупу операторів $\hat{T}_t\varphi(x) = \int_{\mathbb{R}^d} G(t,x,y)\varphi(x)dy, t > 0, x \in \mathbb{R}^d$, для яких виконується $\hat{T}_t 1 \equiv 1$.

Зауваження. В теоремі 1 ми не стверджуємо, що існує випадковий процес Маркова зі щільністю ймовірності переходу $G(t,x,y)_{t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d}$. Ця функція не є, взагалі кажучи, невід'ємною.

4. Задача Коші для відповідного псевдодиференціального рівняння

Додатково припустимо, що функція a є досить гладкою. А саме, нехай $a \in C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$, тобто нескінченно диференційовна з компактним носієм. Вибравши довільну функцію $\varphi \in C_b\left(\mathbb{R}^d\right)$ матимемо (див.[13,14]) той факт, що функція $U(t,x,y) = \int_{\mathbb{R}^d} G(t,x,y)\varphi(x)dy$ є єдиним в класі функцій, що прямують до нуля на нескінченності за просторовою змінною, розв'язком задачі Коші

$$\frac{\partial}{\partial t}u(t,x) = \boldsymbol{A}u(t,\cdot)(x) + f(t,x), t > 0, x \in \mathbb{R}^d,$$
$$u(0+,x) = \varphi(x), x \in R^d,$$

в якій $f(t,x) = \int_{\mathbb{R}^d} \left(V(t,x,y), a(x)\right)\varphi(y)dy$. Нагадаємо, що використана тут функція V задається рівністю (13). Наступна лема допомагає будувати узагальнені розв'язки задачі Коші для рівняння (9).

Лема 2. Нехай функції $\left(\hat{a}(x)\right)_{x\in\mathbb{R}^d}$, $\left(\tilde{a}(x)\right)_{x\in\mathbb{R}^d}$ задовольняють умови теореми 1 (належать до одного і того класу L_p чи L_∞). Тоді для відповідних функції $\widehat{G}$ та $\widetilde{G}$ при кожному $T > 0$ і всіх $t \in (0;T], x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$ виконуються нерівності:

$$\left|\widehat{G}(t,x,y) - \widetilde{G}(t,x,y)\right| \le C_T \left\|\hat{a} - \tilde{a}\right\|_p \frac{t^{\frac{\beta}{\alpha}}}{\left(t^{\frac{1}{\alpha}} + |y-x|\right)^{d+\beta}},$$

якщо $\hat{a}$, $\tilde{a} \in L_p\left(\mathbb{R}^d\right)$ з $p > \dfrac{d+\alpha}{\alpha-\beta}$;

$$\left|\widehat{G}(t,x,y) - \widetilde{G}(t,x,y)\right| \le C_T \left\|\hat{a} - \tilde{a}\right\|_\infty \frac{1}{\left(t^{\frac{1}{\alpha}} + |y-x|\right)^{d+\beta}}$$

$$t \in (0;T], x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d,$$

якщо $\hat{a}, \tilde{a} \in L_\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$, зі сталими $C_T > 0$, що залежать від c, α, β, $\left\|\hat{a}\right\|_p$ або $\left\|\hat{a}\right\|_\infty$, $\left\|\tilde{a}\right\|_p$ або $\left\|\tilde{a}\right\|_\infty$, T.

Доведення: Використовуючи представлення (11) функцій $\widehat{G}$ і $\widetilde{G}$, одержимо, що при всіх $t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$

$$\widehat{G}(t,x,y) - \widetilde{G}(t,x,y) = \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,y) W(\tau,z,y)\, dz, \tag{18}$$

де $W(t,z,y) = \left(\hat{a}(x), \widehat{V}(t,x,y)\right) - \left(\tilde{a}(x), \widetilde{V}(t,x,y)\right)$, а $\widehat{V}$ і $\widetilde{V}$ – розв’язки рівняння виду (10) з функціями $\hat{a}$ і $\tilde{a}$, відповідно. З рівняння (10) маємо, що при всіх $t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$

$$W(t,z,y) = W_0(t,x,y) + \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{V}_0(t-\tau,x,z) W(\tau,z,y)\, dz +$$
$$+ \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} W_0(t-\tau,x,z)\left(\tilde{a}(z), \widetilde{V}(t,z,y)\right) dz, \tag{19}$$

де $W_0(t,x,y) = \left(\hat{a}(x) - \tilde{a}(x), \boldsymbol{B}g(\tau,\cdot,y)(x)\right)$

Враховуючи (3), одержимо нерівність

$$\left|W_0(t,z,y)\right| \le N_\beta \left|\hat{a}(x) - \tilde{a}(x)\right| \frac{1}{\left(t^{1/\alpha} + |y-x|\right)^{d+\beta}},$$

правильну при всіх $t > 0, x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$. Далі, використовуючи (16) та Лему 1, у випадку скінченного p одержуємо нерівність

$$\left|\int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} W_0(t-\tau,x,z)\left(\tilde{a}(z), \widetilde{V}(t,z,y)\right) dz\right| \le C_T N_\beta \left|\hat{a}(x) - \tilde{a}(x)\right| \left\|\tilde{a}\right\|_p T^{\frac{1}{p}} \times$$

$$\times \left(\int_0^t d\tau \int_{R^d} \frac{1}{\left(\left(t-\tau\right)^{1/\alpha} + |z-x|\right)^{(d+\beta)q}} \cdot \frac{1}{\left(\tau^{1/\alpha} + |y-z|\right)^{(d+\beta)q}}\, dz\right) \le$$

$$\le C_T\left|\hat{a}(x)-\tilde{a}(x)\right|\frac{t^{1-\frac{\beta}{\alpha}-\frac{1}{p}\frac{d+a}{a}}}{\left(\tau^{1/\alpha}+|y-z|\right)^{d+\beta}}.$$

(тут сталі $p>1,\ q>1$ пов'язані співвідношенням $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), яка справджується при всіх $t\in(0;T], x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d$ для кожного $T>0$ з деякою сталою $C_T>0$.

Як легко бачити, подібна нерівність справджується і при $p=+\infty$. А саме, для $t\in(0;T], x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d$

$$\left|\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d}W_0(t-\tau,x,z)\left(\tilde{a}(z),\tilde{V}(t,z,y)\right)dz\right|\le$$

$$\le C_T\left|\hat{a}(x)-\tilde{a}(x)\right|\frac{t^{1-\frac{\beta}{\alpha}}}{\left(t^{1/\alpha}+|y-z|\right)^{d+\beta}},$$

при кожному $T>0$ з деякою сталою $C_T>0$.

Таким чином, знову враховуючи (16), маємо

$$\left|W(t,x,y)\right|\le C_T\frac{\left|\hat{a}(x)-\tilde{a}(x)\right|}{\left(t^{\frac{1}{\alpha}}+|y-x|\right)^{d+\beta}}+C_T\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\left|W(\tau,x,y)\right|}{\left((t-\tau)^{1/\alpha}+|z-x|\right)^{d+\beta}}dz.$$

Звідси одержуємо, що для кожного $T>0$ при всіх $t\in(0;T]$, $x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d$

$$\left|W(t,x,y)\right|\le\sum_{k=0}^{\infty}R_k(t,x,y),\qquad(20)$$

де $R_0(t,x,y)=C_T\frac{|\hat{a}(x)-\tilde{a}(x)|}{\left(t^{1/\alpha}+|y-x|\right)^{d+\beta}}$, а для $k\ge 1$

$$R_k(t,x,y)=C_T\int_0^t d\tau\int_{\mathbb{R}^d}\frac{R_{k-1}(\tau,z,y)}{\left((t-\tau)^{1/\alpha}+|z-x|\right)^{d+\beta}}dz.$$

Звідси індукцією по k одержуємо

$$\left|R_k(t,x,y)\right|\le\hat{R}_k\frac{t^{k\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)}}{\left(t^{1/\alpha}+|y-x|\right)^{d+\beta}}\left\|\hat{a}-\tilde{a}_\infty\right\|,$$

де $R_0 = C_T, \widehat{R}_k = \widehat{R}_{k-1} C_T \left[B\left(k\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right), 1\right) + B\left(k-(k-1)\frac{\beta}{\alpha}, 1-\frac{\beta}{\alpha}\right)\right]$ при $k \geq 1$, у випадку $\hat{a}, \tilde{a} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Якщо ж $\hat{a}, \tilde{a} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$ з $p > \frac{d+\alpha}{\alpha-\beta}$, то аналогічно одержуємо ($k \geq 1$)

$$\left| R_k(t,x,y) \right| \leq \widehat{R}_k \frac{t^{k\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\frac{1}{p}\cdot\frac{d+a}{a-\beta}}}{\left(t^{1/\alpha}+|y-x|\right)^{d+\beta}} \left\| \hat{a}-\tilde{a} \right\|_p,$$

де $R_1 = C_T^2 T^{\frac{1}{p}} \left(2B\left(1, 1-\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{p}\cdot\frac{d+a}{a-\beta}\right)\right)^{\frac{1}{q}}$, а при $k \geq 2$,

$$\widehat{R}_k = \widehat{R}_{k-1} C_T \left(B\left(1, k\left(1-\frac{\beta}{\alpha}\right)+\frac{1}{p}\cdot\frac{d+a}{a-\beta}\right) + B\left(1-\frac{\beta}{\alpha}, k(k-1)\frac{\beta}{\alpha}+\frac{1}{p}\cdot\frac{d+a}{a-\beta}\right)\right).$$

Таким чином в обох випадках ряд з (20) збігається рівномірно на кожній множині виду $(0;T] \times \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d, T > 0$, зміни аргументів (t,x,y). Крім того, маємо оцінку ($t \in (0;T], x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$)

$$\left| W(t,x,y) \right| \leq C_T \frac{1}{\left(t^{1/\alpha}+|y-x|\right)^{d+\beta}} \left\| \hat{a}-\tilde{a} \right\|_\infty$$

у випадку обмежених функцій $\hat{a}$ та $\tilde{a}$; чи оцінку ($t \in (0;T]$, $x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$)

$$\left| W(t,x,y) \right| \leq C_T \frac{\left| \hat{a}(x)-\tilde{a}(x) \right|}{\left(t^{1/\alpha}+|y-x|\right)^{d+\beta}} + C_T \frac{t^{1-\frac{\beta}{\alpha}-\frac{1}{p}\frac{d+a}{a}}}{\left(t^{1/\alpha}+|y-x|\right)^{d+\beta}} \left\| \hat{a}-\tilde{a} \right\|_p,$$

якщо $\hat{a}, \tilde{a} \in L_p(\mathbb{R}^d)$ з $p > \frac{d+\alpha}{\alpha-\beta}$. Тут $T > 0$ довільна стала, а $C_T > 0$ деяка стала, що залежить від T.

З рівності (18) при $t \in (0;T], x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$ одержуємо оцінки

$$\left| \widehat{G}(t,x,y) - \widetilde{G}(t,x,y) \right| \leq C_T \frac{1}{\left(t^{1/\alpha}+|y-x|\right)^{d+\beta}} \left\| \hat{a}-\tilde{a} \right\|_\infty$$

якщо $\hat{a}, \tilde{a} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$, чи

$$\left| \widehat{G}(t,x,y) - \widetilde{G}(t,x,y) \right| \leq C_T \frac{t^{\frac{\beta}{\alpha}}}{\left(t^{1/\alpha}+|y-x|\right)^{d+\beta}} \left\| \hat{a}-\tilde{a} \right\|_p,$$

якщо $\hat{a}, \tilde{a} \in L_p(\mathbb{R}^d)$ з $p > \frac{d+\alpha}{\alpha-\beta}$ правильні при кожному $T > 0$ з деякими сталими $C_T > 0$. Лема доведена.

В наступному твердженні побудовано узагальнений фундаментальний розв'язок задачі Коші для рівняння (9). Цей розв'язок є поточковою границею фундаментальних розв'язків задач Коші для рівнянь виду (9), в яких замість функції $\left(a\ (x)\right)_{x\in R^d}$ використано функції $\left(a_n\ (x)\right)_{x\in R^d}$, що при $n \to \infty$ збігаються в певному розумінні до функції a.

<u>Теорема 2.</u> Нехай $\mathbb{R}^d$ – значна функція $\left(a\ (x)\right)_{x\in R^d}$ належить до класу функцій $L_p(\mathbb{R}^d)$ з $p > \frac{d+\alpha}{\alpha-\beta}$ $(0 < \beta < \alpha, 1 < a < 2)$, включно з $p = +\infty$, і додатково неперервна, якщо $p = +\infty$. Тоді існує узагальнений фундаментальний розв'язок задачі Коші рівняння (9). Це розв'язок $G(t,x,y)_{t>0,x\in R^d,y\in R^d}$ при кожному $T > 0$ задовольняє нерівність:

$$\left|G(t,x,y)\right| \le C_T \frac{t^{\frac{\beta}{\alpha}}}{\left(t^{1/\alpha} + |y-x|\right)^{d+\beta}}, t \in (0;T], x \in \mathbb{R}^d, y \in \mathbb{R}^d$$

зі сталою, яка залежить від $c, a, \beta, \|a\|_p, T$.

<u>*Доведення.*</u> Для доведення теореми досить наблизити функцію a послідовністю функцій a_n із $C_0^\infty\left(\mathbb{R}^d\right)$ в розумінні рівномірної збіжності, якщо $p = +\infty$, чи збіжності в $L_p(\mathbb{R}^d)$, якщо $p > \frac{d+\alpha}{\alpha-\beta}$ (скінченне).

Твердження Леми 2 доводить існування поточкової границі послідовності функцій $\left(G_n(t,x,y)\right)_{t\in 0,x\in\mathbb{R}^d,y\in\mathbb{R}^d}, n \ge 1,$ які згідно Теореми 1 є збуреннями щільності ймовірності переходу g ротаційно-інваріантного α-стійкого випадкового процесу оператором $(a_n(\cdot), \boldsymbol{B})$. Ці збурення є фундаментальними розв'язками задач Коші для рівнянь

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t,x) = Au(t,\cdot)(x) + \left(a_n(x), Bu(t,\cdot)(x)\right), t > 0, x \in \mathbb{R}^d.$$

Враховуючи очевидну нерівність $\|a_n\|_p \le 2\|a\|_p$ правильну для всіх натуральних n, починаючи з деякого, та оцінку (17), одержуємо (21). Теорему доведено.

Література

1. Осипчук М.М. Дифузія з нерегулярним переносом/ М.М. Осипчук // Теорія ймовірностей та математична статистика. –1996. –Т.54. – С. 122-128.

2. Осипчук М.М. Щільність ймовірності переходу одного классу узагальнених дифузійних процесів/ М.М. Осипчук// Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, №10. – С. 1433-1437.
3. Portenko N.I. Generalized diffusion processes/ N.I. Portenko//. Translations of Mathematical Monographs, vol. 83, American Mathematical Society, 1990.
4. Portenko M.I. Diffusion Processes in Media with Membranes/ M.I. Portenko. Vol. 10 of Proceedings of the Institute of Mathematics of the Ukrainian National Academy of Sciences, 1995.
5. Бігун Г.С. Явний вигляд фундаментального розв'язку одного псевдодиференціального рівняння зі сталими коефіцієнтами/ М.М. Осипчук, Г.С. Бігун// Прикарпатський вісник НТШ. Число. – 2015. №1(29). – С. 123-131.
6. Льобус Й.-У. Про один класс збурень стійкого процесу/ Й.-У.Льобус, М.І. Портенко// Теорія ймовірностей і математична статистика. – 1995. №52. – С.102-111.
7. Osypchuk M.M. One type of singular perturbations of a multidimensional stable process/ M.M. Osypchuk, M.I. Portenko// Theory Stoch. Process. – 2014. – V.19(35), №2. – P.42-51.
8. Osypchuk M.M. On some perturbations of a stable process and solutions to the Cauchy problem for a class of pseudo-differential equations/ M.M. Osypchuk// Carpathian Math. Publ. – 2015. – V.7, №1. – P.101–107.
9. Osypchuk M.M. On some perturbations of a symmetric stable process and the corresponding Cauchy problems/ M.M. Osypchuk// Theory Stoch. Process. – 2016. – V.21, №1. – P.64-72.
10. Portenko N.I. Some perturbations of drift-type for symmetric stable processes/ N.I. Portenko// Random Operators and Stochastic Equations. – 1994. – V. 2, №3. – P. 211-224.
11. Portenko N.I. One class of transformations of a symmetric stable process/ N.I. Portenko// Theory Stoch. Process. – 1997. – V. 3(19), №3-4. – P.373-387.
12. Portenko N.I. On some perturbations of symmetric stable processes/ N.I. Portenko // Watanabe, S. (ed.) et al., Probability theory and mathematical statistics. Proceedings of the seventh Japan-Russia symposium, Tokyo, Japan, July 26-30, 1995. Singapore: World Scientific., 1996. – P. 414–422.
13. Кочубей А.Н. Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы/ А. Н.Кочубей// Изв. АНСССР. Сер. матем. – 1988. – Т.52, № 5. – С.909-934.
14. Eidelman S.D. Analytic Methods in the Theory of Differential and Pseudo-Differential Equations of Parabolic Type/ S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei// Operator theory: Adv. and Appl. V.152, Birkhauser Basel, 2004.

Стаття надійшла до редакційної колегії 28.08.2021 р.

PERTURBATION OF A ROTATIONALLY INVARIANT α-STABLE STOCHASTIC PROCESS BY A PSEUDO-GRADIENT OPERATOR

M. V. Boyko, M. M. Osypchuk
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenka Str. 57, Ukraine;
e-mail: boikocasper@gmail.com, mykhailo.osypchuk@pnu.edu.ua

A generalized fundamental solution of a linear parabolic pseudo-differential equation with a main operator, which is a generator of a rotational-invariant α-stable Markov stochastic process in a multidimensional Euclidean space with α, ranging from 1 to 2 not inclusive, is constructed. A smaller-order operator is a "pseudo-gradient" with a coefficient that is a vector function of one of the classes: bounded continuous or some powerintegrable functions.

Key words: *α-stable stochastic process, generator, pseudo-gradient, pseudo-differential equation, fundamental solution.*