Диференціальні рівняння і математична фізика

УДК 517.95
DOI: 10.31471/2304-7399-2021-16(60)-11-19

РЕГУЛЯРИЗАЦІЯ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ З МІШАНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Я. М. Глинський[1], С. М. Репетило[2]
[1]Національний університет «Львівська Політехніка»; 79013, м. Львів, вул. Степана Бандери, 12;
[2]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України; 79060, м. Львів, вул. Наукова 3-б;
e-mail: repetylosofiya@gmail.com

Розглянуто питання коректної розв’язності та побудови розв’язку за системою ортогональних функцій крайової задачі з даними на всій межі області для лінійного однорідного гіперболічного рівняння другого порядку зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами. Для випадку, коли праві частини крайових умов задано з похибкою, побудовано регуляризуючий алгоритм для знаходження наближеного розв’язку розглядуваної задачі.

Ключові слова: *крайова задача, гіперболічні рівняння, малі знаменники, міра Лебега, метод регуляризації, наближений розв’язок*

Крайові задачі з даними на всій межі області для гіперболічних рівнянь та систем рівнянь є, взагалі кажучи, некоректними (наприклад, задача типу Діріхле для хвильового рівняння [1, с. 23]). Розв’язність таких задач у багатьох випадках пов’язана з проблемою малих знаменників (див. [1 – 6] та бібліографію в них). Крайові задачі для гіперболічних рівнянь другого порядку у різних аспектах досліджено, зокрема, у працях [5, 7 – 10].

Некоректно поставлені задачі виникають і під час розв’язування різних прикладних задач, вихідні (початкові) дані яких отримують внаслідок експерименту або безпосередніх замірів, тобто є відомими лише наближено. При розв'язуванні таких задач чисельними методами виникають труднощі, оскільки як завгодно малі похибки у початкових умовах або правих частинах крайових умов можуть спричиняти значну відмінність чисельного розв'язку від точного. Одним із найбільш відомих і широко використовуваних методів розв'язування некоректних задач є метод регуляризації (див., наприклад [11, 12]), застосуванню якого у випадку задач для гіперболічних рівнянь присвячено, зокрема, праці [13 – 19].

У даній роботі результати праць [5, 17] поширено на випадок крайової задачі з даними на всій межі області для лінійного однорідного гіперболічного рівняння другого порядку зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами, коли праві частини крайових умов задано наближено. За умови існування єдиного розв'язку при точно заданих крайових умовах, побудовано регуляризуючий алгоритм знаходження наближеного розв'язку розглядуваної задачі.

1. Позначення: $\mathbb{Z}_+^p$ – множина точок $\mathbb{R}^p$ з цілими невід'ємними координатами; $s=(s_1,\ldots,s_p)\in\mathbb{Z}_+^p$; $|s|=|s_1|+\cdots+|s_p|$; $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\mathbb{R}^p$; $\Omega\subset\mathbb{R}^p$ − обмежена однозв'язна область з гладкою межею $\partial\Omega=\Gamma$; $D=\{\,(t,x):0<t<\mathrm{T}\,,\,x\in\Omega\,\}$; $\Sigma=\Gamma\times[0,\mathrm{T}]$; $C^{j,\nu}$, $0<\nu<1$, − клас визначених в $\overline{\Omega}$ функцій, j-ті похідні яких задовольняють в $\overline{\Omega}$ умову Гельдера з показником ν; $A^{j,\nu}$ – клас замкнених областей, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межових поверхонь цих областей, належать класу $C^{j,\nu}$; $C^r(\overline{\Omega})$ − банахів простір функцій $\upsilon(x):=\upsilon(x_1,\ldots,x_p)$, неперервних із усіма похідними до порядку r включно в $\overline{\Omega}$, $\|\upsilon\|_{C^r(\overline{\Omega})}=\sum\limits_{|s|\le r}\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}\left|\partial^{|s|}\upsilon(x)\Big/\left(\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}\right)\right|$.

2. Задача у точній постановці. В області D розглядаємо задачу

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}-Lu(t,x)=0\,,\quad (t,x)\in D,\tag{1}$$

$$a_1u(0,x)+a_2\frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=\varphi_1(x),\quad b_1u(T,x)+b_2\frac{\partial u(T,x)}{\partial t}=\varphi_2(x),\quad x\in\overline{\Omega}\,,\tag{2}$$

$$u\big|_{\Sigma}=0\,,\qquad (x,t)\in\Sigma\,,\tag{3}$$

де $a_j,b_j\in\mathbb{R}$, $a_1^2+a_2^2\ne0$, $b_1^2+b_2^2\ne0$, $L:=\sum\limits_{i,j=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right)-q(x)$ − диференціальний вираз, еліптичний в Ω, з дійснозначними достатньо гладкими в $\overline{\Omega}$ коефіцієнтами $p_{ij}(x)$ та $q(x)\ge0$.

Нехай $\Lambda=\{\lambda_k, k\in\mathbb{N}\}$ та $F=\{X_k(x), k\in\mathbb{N}\}$ − множини власних чисел та власних (нормованих) функцій задачі

$$LX(x)=-\lambda X(x),\quad X(x)\big|_{\Gamma}=0. \qquad (4)$$

Відомо [20], що коли $\overline{\Omega}\in A^{2,\nu}$, $p_{ij}(x)\in C^{1,\nu}, i,j=1,...,p$, $q(x)\in C^{0,\nu}$, то система F є повною ортонормованою в просторі $L_2(\Omega)$, а власні значення $\lambda_k, k\in\mathbb{N}$, є різні і додатні; при цьому $X_k(x)\in C^2(\overline{\Omega}),\ k\in\mathbb{N}$, і справедливі оцінки

$$c_0k^{2/p}\le\lambda_k\le c_1k^{2/p},\ 0<c_0\le c_1,\ k\in\mathbb{N}, \qquad (5)$$

$$\max_{x\in\overline{\Omega}}\left|\partial^{|s|}X_k(x)\Big/\left(\partial x_1^{s_1}\cdots\partial x_p^{s_p}\right)\right|\le c_2\lambda_k^{p/4+|s|/2},\ |s|=0,1,2. \qquad (6)$$

Тут і надалі $c_j, j=0,1,2,\ldots$ − додатні сталі, які не залежать від λ_k.

На підставі праці [5] легко бачити, що формальний розв’язок задачі (1) – (3) має вигляд

$$u(t,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\Delta(\lambda_k)}\Big(\varphi_{1k}\left(b_1\sin\left(\sqrt{\lambda_k}(T-t)\right)+b_2\sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}(T-t)\right)\right)+$$
$$+\varphi_{2k}\left(a_1\sin\left(\sqrt{\lambda_k}t\right)-a_2\sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}t\right)\right)\Big)X_k(x), \qquad (7)$$

де

$$\Delta(\lambda_k)=(a_1b_1+a_2b_2\lambda_k)\sin\left(\sqrt{\lambda_k}T\right)+(a_1b_2-a_2b_1)\sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}T\right),\ k\in\mathbb{N}, \quad (8)$$

а φ_{1k} та φ_{2k} – коефіцієнти розвинення в ряди Фур’є за системою F функцій $\varphi_1(x)$ та $\varphi_2(x)$, відповідно.

Умови єдиності та існування розв’язку задачі (1) – (3) визначають наступні теореми (див. [5]).

Теорема 1. *Для єдиності розв’язку задачі (1) – (3) у просторі $C^2(\overline{D})$ необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$(\ \forall\lambda_k\in\Lambda\ )\quad \Delta(\lambda_k)\ne 0, \qquad (9)$$

де $\Delta(\lambda_k)$ обчислюється за формулою (8).

Оскільки величина $|\Delta(\lambda_k)|$, будучи відмінною від нуля, може приймати як завгодно малі значення для нескінченної кількості значень $\lambda_k\in\Lambda$, то ряд (7), взагалі, є розбіжним. Тому питання про існування розв’язку задачі (1) – (3) пов’язане з проблемою малих знаменників.

Теорема 2. *Нехай справджується умова (9) і нехай існують константи $A>0$ і $\gamma\in\mathbb{R}_+$ такі, що для всіх (крім скінченного числа) значень $\lambda_k\in\Lambda$ виконується нерівність*

$$|\Delta(\lambda_k)|\ge Ak^{-\gamma}. \qquad (10)$$

Якщо $\varphi_j \in C^{2r}(\overline{\Omega})$, $L^q \varphi_j\big|_\Gamma = 0$, $j = 1,2$, $q = 0,1,\ldots,r-1$, *де* $r = [(5 + p(1,5+\gamma))/2] + 1$, *то існує розв'язок задачі (1) – (3) з простору* $C^2(\overline{D})$, *який зображується формулою (7) і неперервно залежить від функцій* $\varphi_j(x)$, $j = 1,2$.

Теорема 3. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *нерівність (10) виконується для всіх (крім скінченного числа) значень* $\lambda_k \in \Lambda$ *при:*

1) $\gamma > 1$, *якщо* $a_2 = b_2 = 0$;

2) $\gamma > 1 - 2/p$, *якщо* $a_1 = b_1 = 0$ *або* $\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = q$, $0 < |q| < \infty$.

Теорема 4. *Якщо* $a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}$*) чисел* T *нерівність (10) виконується для всіх (крім скінченного числа) значень* $\lambda_k \in \Lambda$ *при:*

1) $\gamma > 1 - 2/p$, *якщо* $a_2 b_2 \neq 0$;

2) $\gamma > 1 - 1/p$, *якщо* $a_2 b_2 = 0$.

3. Задача з наближеними крайовими умовами. Надалі вважатимемо, що умови теорем 1 і 2 виконуються, тобто для задачі (1) – (3) у точній постановці розв'язок у вигляді ряду (7) існує і є єдиним.

Нехай крайові умови задані наближено з похибкою $\delta > 0$, тобто відомі $\varphi_j^\delta(x) \in L_2(\Omega)$, $j = 1,2$, такі, що

$$\left\|\varphi_j - \varphi_j^\delta\right\|_{L_2(\Omega)} \le \delta, \ j = 1,2. \tag{11}$$

Покажемо, що при певних значеннях $N = N(\delta)$ скінченну суму

$$u_N^\delta(t,x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{\Delta(\lambda_k)} \Big(\phi_{1k}^\delta \left(b_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k}(T-t)\right) + b_2 \sqrt{\lambda_k} \cos\left(\sqrt{\lambda_k}(T-t)\right)\right) +$$
$$+ \phi_{2k}^\delta \left(a_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k} t\right) - a_2 \sqrt{\lambda_k} \cos\left(\sqrt{\lambda_k} t\right)\right)\Big) X_k(x), \tag{12}$$

можна взяти в якості регуляризуючого алгоритму для знаходження наближеного розв'язку задачі (1) – (3), (11).

Теорема 5. *Для задачі (1)–(3), (11) існує така цілочислова функція* $N = N(\delta)$, $N(\delta) \to \infty$ *при* $\delta \to 0$, *що* $\forall t \in [0,T]$ $\Theta = \max\limits_{t\in[0,T]} \left\| u - u_N^\delta \right\|_{L_2(\Omega)} \to 0$ *при* $\delta \to 0$.

Доведення проведемо за схемою доведення теореми 1 з [1]. Зауважимо, що

$$\max_{t\in[0,T]} \|u(t,x)\|_{L_2(\Omega)}^2 = \max_{t\in[0,T]} \int_\Omega (u(t,x))^2 dx.$$

Легко бачити, що

$$\Theta \le \max_{t\in[0,T]} \left\| u - u_N^0 \right\|_{L_2(\Omega)} + \max_{t\in[0,T]} \left\| u_N^0 - u_N^\delta \right\|_{L_2(\Omega)} \equiv \Theta_1 + \Theta_2 .$$

Розглянемо спочатку $\Theta_1 = \max\limits_{t\in[0,T]} \left\| u - u_N^0 \right\|_{L_2(\Omega)}$, а саме:

$$\Theta_1 = \max_{t\in[0,T]} \left\| \sum_{k=N+1}^{\infty} \left(\frac{\varphi_{1k} \left(b_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\,(T-t)\right) + b_2 \sqrt{\lambda_k} \cos\left(\sqrt{\lambda_k}\,(T-t)\right)\right)}{\Delta(\lambda_k)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\varphi_{2k} \left(a_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\, t\right) - a_2 \sqrt{\lambda_k} \cos\left(\sqrt{\lambda_k}\, t\right)\right)}{\Delta(\lambda_k)} \right) X_k(x) \right\|_{L_2(\Omega)} .$$

Оскільки, згідно з припущенням, розв'язок задачі (1) – (3) існує, то ряд (7) є збіжним, тобто для $\forall t \in [0,T]$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\Delta(\lambda_k)} \left(\varphi_{1k} \left(b_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\,(T-t)\right) + b_2 \sqrt{\lambda_k} \cos\left(\sqrt{\lambda_k}\,(T-t)\right)\right) + \right.$$
$$\left. + \varphi_{2k} \left(a_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\, t\right) - a_2 \sqrt{\lambda_k} \cos\left(\sqrt{\lambda_k}\, t\right)\right)\right) X_k(x) < \infty .$$

З останньої нерівності випливає, що залишок ряду $\Theta_1 \to 0$ при $N \to \infty$.

Розглянемо тепер $\Theta_2 = \max\limits_{t\in[0,T]} \left\| u_N^0 - u_N^\delta \right\|_{L_2(\Omega)}$, а саме:

$$\Theta_2 = \max_{t\in[0,T]} \left\| \sum_{k=1}^{N} \left(\frac{\left(\varphi_{1k} - \varphi_{1k}^\delta\right) \left(b_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\,(T-t)\right) + b_2 \sqrt{\lambda_k} \cos\left(\sqrt{\lambda_k}\,(T-t)\right)\right)}{\Delta(\lambda_k)} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\left(\varphi_{2k} - \varphi_{2k}^\delta\right) \left(a_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_k}\, t\right) - a_2 \sqrt{\lambda_k} \cos\left(\sqrt{\lambda_k}\, t\right)\right)}{\Delta(\lambda_k)} \right) X_k(x) \right\|_{L_2(\Omega)} \equiv$$
$$\equiv \max_{t\in[0,T]} \left\| \sum_{k=1}^{N} u_k^\delta(t)\, X_k(x) \right\|_{L_2(\Omega)} .$$

Таким чином,

$$\Theta_2^2 = \max_{t\in[0,T]} \left\| \sum_{k=1}^{N} u_k^\delta(t)\, X_k(x) \right\|_{L_2(\Omega)}^2 = \max_{t\in[0,T]} \int_\Omega \left(u_k^\delta(t)\, X_k(x) \right)^2 dx \le$$
$$\le \int_\Omega X_k^2(x)\, dx \max_{t\in[0,T]} \sum_{k=1}^{N} \left(u_k^\delta(t) \right)^2 = \max_{t\in[0,T]} \sum_{k=1}^{N} \left(u_k^\delta(t) \right)^2 ,$$

оскільки власні функції $\left\{ X_k(x), k \in \mathbb{N} \right\}$ є ортонормованими. Тоді

$$\Theta_2^2 \le \max_{t\in[0,T]} \sum_{k=1}^{N} \left(u_k^\delta(t) \right)^2 \le$$

$$\leq \max_{t\in[0,T]}\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\left|\varphi_{1k}-\varphi_{1k}^{\delta}\right|\left|b_1\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\,(T-t)\right)+b_2\sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\,(T-t)\right)\right|}{\Delta(\lambda_k)}+\right.$$

$$\left.+\frac{\left|\varphi_{2k}-\varphi_{2k}^{\delta}\right|\left|a_1\sin\left(\sqrt{\lambda_k}\,t\right)-a_2\sqrt{\lambda_k}\cos\left(\sqrt{\lambda_k}\,t\right)\right|}{\Delta(\lambda_k)}\right]^2\leq$$

$$\leq\sum_{k=1}^{N}\left[\frac{\left|\varphi_{1k}-\varphi_{1k}^{\delta}\right|\left(|b_1|+|b_2|\sqrt{\lambda_k}\right)}{\Delta(\lambda_k)}+\frac{\left|\varphi_{2k}-\varphi_{2k}^{\delta}\right|\left(|a_1|+|a_2|\sqrt{\lambda_k}\right)}{\Delta(\lambda_k)}\right]^2\leq$$

$$\leq 2\sum_{k=1}^{N}\frac{\left(\varphi_{1k}-\varphi_{1k}^{\delta}\right)^2\left(|b_1|+|b_2|\sqrt{\lambda_k}\right)^2+\left(\varphi_{2k}-\varphi_{2k}^{\delta}\right)^2\left(|a_1|+|a_2|\sqrt{\lambda_k}\right)^2}{\left(\Delta(\lambda_k)\right)^2}. \quad (13)$$

На підставі умови (11), враховуючи, що

$$\left\|\varphi_j-\varphi_j^{\delta}\right\|_{L_2(\Omega)}^2=\int_{\Omega}\left(\varphi_j-\varphi_j^{\delta}\right)^2dx=$$

$$=\int_{\Omega}X_k^2(x)\,dx\sum_{k=1}^{N}\left(\varphi_{jk}-\varphi_{jk}^{\delta}\right)^2=\sum_{k=1}^{N}\left(\varphi_{jk}-\varphi_{jk}^{\delta}\right)^2,\ \ j=1,2,$$

отримаємо оцінку

$$\sum_{k=1}^{N}\left(\varphi_{jk}-\varphi_{jk}^{\delta}\right)^2\leq\delta^2,\ \ j=1,2. \quad (14)$$

Введемо позначення $M(N)=\max\limits_{k=1,\ldots,N}\frac{1}{\left|\Delta(\lambda_k)\right|}$.

З нерівності (13), врахувавши оцінки (5), знайдемо

$$\Theta_2^2\leq 2\left(\Delta(\lambda_k)\right)^{-2}\times$$

$$\sum_{k=1}^{N}\left[\left(\varphi_{1k}-\varphi_{1k}^{\delta}\right)^2\left(|b_1|+|b_2|\sqrt{\lambda_k}\right)^2+\left(\varphi_{2k}-\varphi_{2k}^{\delta}\right)^2\left(|a_1|+|a_2|\sqrt{\lambda_k}\right)^2\right]\leq$$

$$\leq 2[M(N)]^2\left[\left(|b_1|+c_1|b_2|N^{2/p}\right)^2\sum_{k=1}^{N}\left(\varphi_{1k}-\varphi_{1k}^{\delta}\right)^2+\right.$$

$$\left.+\left(|a_1|+c_1|a_2|N^{2/p}\right)^2\sum_{k=1}^{N}\left(\varphi_{2k}-\varphi_{2k}^{\delta}\right)^2\right]\leq$$

$$\leq 2[M(N)]^2\left[\left(|b_1|+c_1|b_2|N^{2/p}\right)^2+\left(|a_1|+c_1|a_2|N^{2/p}\right)^2\right]\delta^2,$$

тоді

$$\Theta_2\leq\delta\sqrt{\left(|b_1|+c_1|b_2|N^{2/p}\right)^2+\left(|a_1|+c_1|a_2|N^{2/p}\right)^2}\,M(N).$$

Використовуючи теорему 2, яка дає оцінку знизу для $|\Delta(\lambda_k)|$, отримаємо, що $M(N) \le AN^{\gamma}$.

Отже,

$$\Theta_2 \le \delta\sqrt{N^{4/p}\left(|b_1|+c_1|b_2|\right)^2 + N^{4/p}\left(|a_1|+c_1|a_2|\right)^2}\,AN^{\gamma} =$$

$$= \delta N^{2/p} A\sqrt{\left(|b_1|+c_1|b_2|\right)^2 + \left(|a_1|+c_1|a_2|\right)^2}\,N^{\gamma} = c_3\delta\, N^{2/p+\gamma}, \qquad (15)$$

де $c_3 = A\sqrt{\left(|b_1|+c_1|b_2|\right)^2 + \left(|a_1|+c_1|a_2|\right)^2}$.

З нерівності (15) випливає, що можна так підібрати

$$N = [N(\delta)] = \left[\left(c_3\sqrt{\delta}\right)^{\frac{-1}{2/p+\gamma}}\right] + 1, \qquad (16)$$

що при $\delta \to 0$ матимемо: $\Theta_2 \to 0$ і $N(\delta) \to \infty$. Таким чином, $\Theta \to 0$ при $\delta \to 0$. Теорему доведено.

Зрозуміло, що ефективність регуляризації задачі (1) – (3), (11) за допомогою скінченної суми (12) залежить від вибору параметра $N = N(\delta)$. Оптимальним значенням параметра $N(\delta)$ (для фіксованої похибки δ наближення крайових умов) буде те, яке визначає формула (16).

Висновки. Отримані результати можна перенести на випадок рівняння високого порядку. У випадку, коли множини власних чисел та власних функцій задачі (4) є відомими (наприклад, у випадках рівняння коливань струни або прямокутної мембрани), отримані результати можуть бути реалізовані програмно.

Література

1. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б.И. Пташник. – К.: Наук. думка, 1984. – 264с.
2. Bilusyak N.I. Boundary-value problem with mixed conditions for weakly nonlinear hyperbolic equations / N.I. Bilusyak, B.Yo. Ptashnyk, S.M. Repetylo // J. Math. Sci. – 2012. – 180, № 1. – P. 68–80.
3. Бобик І.О. Крайові задачі для гіперболічних рівнянь зі сталими коефіцієнтами / І.О. Бобик, Б.Й. Пташник // Укр. мат. журн., 1994. – 46, № 7. – С. 795–802.
4. Пташник Б.Й. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, І.Я. Кміть, В.М. Поліщук. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
5. Репетило С.М. Крайова задача для лінійного гіперболічного рівняння зі змінними коефіцієнтами / С.М. Репетило // Вісник НУ "Львівська політехніка". Серія "фіз.-мат. науки". – 2009. – Вип. 660, № 660. – С. 28–33.

6. Репетило С.М. Задача Діріхле-Неймана для системи слабко нелінійних гіперболічних рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами / С.М. Репетило, М.М. Симотюк // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2019. – Вип. 17. – С. 105–112.
7. Асанова А.Т. Периодические на плоскости решения системы гиперболических уравнений второго порядка / А.Т. Асанова // Матем. заметки. – 2017. – 101, № 1. – С. 20–30. DOI: 10.4213/mzm10881.
8. Лажетич Н.Л. О классической разрешимости смешанной задачи для одномерного гиперболического уравнения второго порядка / Н.Л. Лажетич // Дифференц. Уравнения. – 2006. – 42, № 8. – С. 1072–1077.
9. Павленко В.Н., Петраш Т.А. Периодические решения уравнения колебаний струны с граничными условиями Неймана и Дирихле и разрывной нелинейностью / В.Н. Павленко, Т.А. Петраш // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – 18, № 2. – С. 199–204.
10. Gentile G. Periodic solutions for completely resonant nonlinear wave equations with Dirichlet boundary conditions / G. Gentile, V. Mastropietro, M. Procesi // Commun. Math. Phys. – 2005. – 256, No. 2. – P. 437–490. – DOI: 10.1007/s00220-004-1255-8.
11. Тихонов А.Н. О рещении некорректно поставленных задач и методе регуляризации / А.Н. Тихонов // Докл. АН СССР. – 1963. – 153, № 1.– С. 49-52.
12. Тихонов А.Н. Методы рещения некорректных задач / А.Н. Тихонов, В.Я. Арсенин. – М.: Наука, 1974. – 233 с.
13. Droniou J. Global solution and smoothing effect for a non-local regularization of an hyperbolic equation / J. Droniou, T. Gallouët, J. Vovelle // Journal of Evolution Equations, Springer Verlag. – 2003. – 3, № 3. – pp. 499 – 521. Doi: 10.1007/s00028-003-0503-1. hal-00003438
14. Kabanikhin S.I. Numerical comparison of iterative regularization methods for a parameter estimation problem in a hyperbolic PDE / S. I. Kabanikhin, R. Kowar, O. Scherzer, V.V. Vasin // Journal of Inverse and Ill-posed Problems. Doi: 10.1515/jiip.2001.9.6.615
15. Yousefi H. Directly simulation of second order hyperbolic systems in second order form via the regularization concept / H. Yousefi, S. Sh. Ghorashi, T. Rabczuk // Commun. Comput. Phyz. – 2016. – 20, No. 1, pp. 86-135. Doi: 10.4208/cicp.101214.011025a.
16. Гой Т.П. Розв'язність, стійкість та побудова наближеного розв'язку нелокальної крайової задачі для гіперболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами / Т.П. Гой // Вісн. Прикарпат. ун-ту. Сер. природн.-мат. наук. – 1996. – Вип. 2. – С. 30-41.
17. Мельникова И.В. О регуляризации краевой задачи для уравнения колебаний / И.В. Мельникова, А.Ю. Фрейберг // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1985. – 25, №5.– С. 783–789.

18. Поліщук В.М. Стійкість задачі з нелокальними крайовими умовами для гіперблічних рівнянь / В.М. Поліщук // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2007. – 50, № 1. – С. 24-31.
19. Пташник Б.Й. Розв'язність, стійкість і регуляризація багатоточкової задачі для гіперболічних рівнянь / Б.Й. Пташник, В.В. Фіголь, П.І. Штабалюк // Мат. студії. – 1991. – Вип. 1. – С. 16–32.
20. Ильин В.А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных / В.А. Ильин, И.А. Шишмарев // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – 24, №6. – С. 883-896.

Стаття надійшла до редакційної колегії 30.08.2021 р.

REGULARIZATION OF THE BOUNDARY–VALUE PROBLEM WITH MIXED CONDITIONS FOR A SECOND ORDER HYPERBOLIC EQUATION

Ya. M. Hlynsky[1], S. M. Repetylo[2]
[1]Lviv Polytechnic National University;79000, Lviv, S.Bandery Str., 12;
[2]Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine; 79060, Lviv, Naukova Str., 3-b;
e-mail: repetylosofiya@gmail.com

A boundary value problem with data on the whole boundary of the domain for a linear homogeneous second-order hyperbolic equation with coefficients variable in spatial coordinates is considered. The issues of correct solvability and construction of a solution in the form of a series according to the system of orthogonal functions are studied. For the case when the right-hand sides of the boundary conditions are given with an error, a regularizing algorithm for the finding the approximate solution of the considered problem is constructed.

Key words: *boundary value problem, hyperbolic equations, small enominators, Lebesgue measure, regularization method, approximate solution.*