УДК 519.218. 24
DOI: 10.31471/2304-7399-2021-16(60)-33-46

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ ЗАГАЛЬНОЇ КІЛЬКОСТІ ЧАСТИНОК В КРИТИЧНИХ ГІЛЛЯСТИХ ПРОЦЕСАХ, З ПЕРЕТВОРЕННЯМИ ЗАЛЕЖНИМИ ВІД ВІКУ ЧАСТИНОК

Т. Б. Лисецький, Я. І. Єлейко
Львівський національний університет імені Івана Франка;
79000, м. Львів, вул. Університетська 1;
e-mail: taraslysetskiyy@gmail.com, yikts@yahoo.com

У статті розглядаються критичні гіллясті процеси зі скінченною кількістю типів частинок та перетвореннями, що залежать від віку частинок. Відомо, що у випадку зі сталими перехідними ймовірностями в процесах з іммграцією загальна кількість частинок в процесі, які існували до моменту t, розділена на t^2 збігається до нескінченно подільного розподілу, перетворення Лапласа якого є явно заданим, а в процесах без іммграції має місце подібна збіжність але при умові невиродженості процесу в момент t. Доведено справедливість цих результатів для випадку зі змінними перехідними ймовірностями.

Ключові слова: *гіллясті процеси, рівняння відновлення, перонів корінь, критичний процес.*

1. Вступ.

В даній статті ми будемо розглядати випадковий гіллястий процес $\xi(t)$ зі скінченною кількістю типів частинок та перетвореннями, залежними від віку частинок.

Детальний опис процесу $\xi(t)$ можна знайти в [5] на ст. 229. Побудова ймовірнісного простору для $\xi(t)$ є доволі трудомісткою і її можна знайти в [1], розділ VI. Тут ми надамо короткий опис розглядуваного процесу.

В процесі беруть участь n типів частинок $T_1, T_2, \dots, T_n$. Кожна частинка типу T_i еволюціонує незалежно від інших частинок, живе деякий випадковий час τ_i і в момент τ_i перетворюється випадковим чином в сукупність $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ частинок типів $T_1, T_2, \dots, T_n$, де $\mathbb{N} = \{0,1,2,\dots\}$, а α_j позначає кількість частинок типу T_j.

Нехай $G^i(t)$ – функція розподілу часу життя частинок типу T_i, $i = \overline{1,n}$. Умовну ймовірність перетворення частинки типу T_i (при умові, що перетворення цієї частинки відбулось і її вік в цей момент дорівнював u) в α частинок відповідних типів позначимо через $p_\alpha^i(u)$.

Якщо $p_\alpha^i(u)$ не залежать від віку частинок, тобто $p_\alpha^i(u) = p_\alpha^i$ для всіх u, то такий процес називатимемо процесом 1 типу, а загальний процес – процесом 2 типу.

Вектор $\mu^i(t) = \left(\mu_1^i(t), \dots, \mu_n^i(t)\right)$ позначає кількість частинок типів $T_1, T_2, \dots, T_n$, що існують у процесі в момент t, при умові що в початковий момент часу була одна частинка типу T_i, а вектор $N^i\ (t) = \left(N_1^i(t), \dots, N_n^i(t)\right)$ характеризує кількість частинок типів $T_1, T_2, \dots, T_n$ які існували до моменту t (включно з тими, що існують в момент t), при тій же умові.

Також вважатимемо що функції розподілу $G^i(t)$ нерешітчасті.

Нехай $s = (s_1, \dots, s_n), z = (z_1, \dots, z_n)$. Позначимо через s^z добуток $s^z = s_1^{z_1} \cdots s_n^{z_n}$. Введемо твірні функції

$$h^i(u,s) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} p_\alpha^i(u) s^\alpha \ , \ F^i(t,s) = E\left(s^{N^i\ (t)}\right) \text{ та}$$

$$\tilde{F}^i(t,s) = E\left(s^{N^i\ (t)}; \sum_{j=1}^n \mu_j^i(t) = 0\right).$$

$$h(u,s) = \left(h^1(u,s), \dots, h^n(u,s)\right), F\ \ (t,s) = \left(F^1(t,s), \dots, F^n(t,s)\right),$$

$$\tilde{F}\ \ (t,s) = \left(\tilde{F}^1(t,s), \dots, \tilde{F}^n(t,s)\right).$$

Вважатимемо, що ці твірні функції визначені принаймні на $D = \{|s_i| \le 1, i = \overline{1,n}\}$.

Покладемо

$$a_j^i(u) = \frac{\partial h^i(u,s)}{\partial s_j}\bigg|_{s\ =\ \mathbb{1}}, A_j^i = \int_0^{+\infty} a_j^i(u)\, dG^i(u),$$

$$b_{jk}^i(u) = \frac{\partial h^i(u,s)}{\partial s_j \partial s_k}\bigg|_{s\ =\ \mathbb{1}}, B_{jk}^i = \int_0^{+\infty} b_{jk}^i(u)\, dG^i(u),$$

де $\mathbb{1}$ (тут і надалі) – це вектор довжини n, в якому всі елементи рівні одиниці.

Процес $\xi(t)$ називатимемо критичним, якщо перонів корінь матриці $A = \left\|A_j^i\right\|_{i,j=\overline{1,n}}$ рівний одиниці. Позначимо через $u = (u^1, \dots, u^n)$та $v = (v^1, \dots, v^n)$ правий та лівий додатні власні вектори цієї матриці, для яких виконується $(u, v) = (u, \mathbb{1}) = 1$ (такі вектори завжди існують за теоремою Фробеніуса [5], ст. 130, бо елементи матриці A додатні).

Також введемо наступні позначення:

$$B = \sum_{l,k,m=1}^n B_{mk}^l v^l\ u^k\ u^m\ , M_a^{lk} = \ \int_0^{+\infty} a_k^l(u) u\, dG^k(u),$$

$$M_a = \sum_{l,k=1}^n M_a^{lk} v^l\ u^k\ ,$$

$$Q^i(t) = P\left(\sum_{j=1}^k \mu_j^i(t) > 0\right) = 1 - P\left(\sum_{j=1}^k \mu_j^i(t) = 0\right),$$

$$Q(t) = \left(Q^1(t), \dots, Q^k(t)\right).$$

Крім того ми розглянемо гіллястий процес $\eta(t)$ з імміграцією та перетвореннями, що залежать від віку частинок. Такий процес найпростіше визначати шляхом введення додаткового типу частинок T_0. Вважатимемо, що в початковий момент часу в процесі є одна частинка типу T_0. Функцію розподілу тривалості життя частинки цього типу $G^0(t)$

також вважатимемо нерешітчастою. В кінці життя частинка типу T_0 з ймовірністю $p_\alpha^0(u)$ (при умові, що перетворення відбулось в момент u) перетворюється в одну частинку свого ж типу та сукупність частинок типів $T_1, T_2, \dots, T_n, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. Частинки типів $T_1, T_2, \dots, T_n$ еволюціонують так як і в процесі $\xi(t)$.

Вектор $N^0(t) = \left(N_1^0(t), \dots, N_n^0(t)\right)$ характеризує кількість частинок типів $T_1, T_2, \dots, T_n$, які існували в процесі $\eta(t)$ до моменту t (при умові що в початковий момент часу була одна частинка типу T_0).

Введемо твірні функції $h^0(u,s) = \sum_\alpha p_\alpha^0(u) s^\alpha$ та $f(t,s) = E\left(s^{N^0(t)}\right)$.

Також введемо наступні позначення

$$a_j^0(u) = \frac{\partial h^i(u,s)}{\partial s_j}\Big|_{s\,=\,\mathbb{1}}, A_j^0 = \int_0^{+\infty} a_j^0(u)\, dG^i(u),$$

$$M_0 = \int_0^{+\infty} u\, dG^0(u),\ A^0 = \sum_{j=1}^k A_j^0 u^j.$$

В [3] було показано, що для процесів 1 типу $\xi(t)$ та $\eta(t)$ мають місце наступні збіжності:

$$E\left(\exp\left\{-\sum_{j=1}^n \frac{\beta^j N_j^i(t)}{v^j t^2}\right\}\Big|\sum_{j=1}^n \mu_j^i(t) > 0\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow}$$

$$\underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{2B\sum_{j=1}^n \beta^j}}{M_a}\left(sh\frac{\sqrt{2B\sum_{j=1}^n \beta^j}}{M_a}\right)^{-1}, \beta^j \geq 0 \qquad (1)$$

для процесу $\xi(t)$ ([3], ст. 468, теорема 4), та

$$E\left(\exp\left\{-\sum_{j=1}^n \frac{\beta^j N_j^0(t)}{v^j t^2}\right\}\right) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \left(ch\sqrt{\frac{B\sum_{j=1}^n \beta^j}{2M_a}}\right)^{-\frac{2A^0 M_a}{BM_0}}, \beta^j \geq 0 \qquad (2)$$

для процесу $\eta(t)$ ([3], ст. 467, теорема 3).

Нашою метою є показати, що дані результати вірні для процесів 2 типу.

Передусім сформулюємо теорему відновлення, яку ми будемо використовувати в зручному для нас вигляді.

Теорема 1 (Шуренков, [7]). *Нехай векторна функція $g(x) = (g_1(x), \dots, g_n(x))$ розмірності n така, що для деякого $\gamma \geq 0$ виконується $sup_{x\in\mathbb{R}} \frac{g(x)}{\max\{1, x^\gamma\}} < \infty$ і $\frac{g(x)}{x^\gamma} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} c = (c_1, \dots, c_n)$. Тоді якщо перонів корінь матриці $\left\|\int_0^{+\infty} a_j^i(u) dG^i(u)\right\|_{i,j=\overline{1,n}}$ рівний одиниці та*

$$\int_0^{+\infty} u a_j^i(u)\, dG^i(u) < +\infty, i, j = \overline{1,n},$$

то

$$\frac{1}{x^{1+\gamma}} \int_0^x g(x-y) dH(y) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{c}{(1+\gamma)M_a} \left\|u^i v^j\right\|_{i,j=\overline{1,n}},$$

де $G^i(u)$ – не решітчаста функція розподілу, а $H(y)$ – матриця відновлення, що відповідає матриці $\left\|\int_0^y a_j^i(u) dG^i(u)\right\|_{i,j=\overline{1,n}}$.

2. Гранична теорема для процесів без імміграції.

Лема 1. *Якщо в процесі 1 типу з одним типом частинок скінченні усі моменти $h(s)$ та $1-G(t)=o(t^{-2})$, то*

$$\frac{2\mu}{h''(1)}\frac{\sqrt{2h''(1)\beta}}{\mu}\left(sh\frac{\sqrt{2h''(1)\beta}}{\mu}\right)^{-1}=\sum_{k=0}^{+\infty}(a_k-b_k)\frac{\beta^k}{k!}, \qquad (3)$$

де

$$\mu=\int_0^{+\infty}u\,dG(u), a_0-b_0=\frac{2\mu}{h''(1)}, a_1=\frac{1}{\mu}, a_k=\frac{h''(1)}{(2k-1)\mu}\sum_{l=1}^{k}C_{k-1}^{l}a_l a_{k-l},$$

$$b_1=\frac{1}{3\mu}, b_k=\frac{h''(1)}{(2k+1)\mu}\sum_{l=1}^{k}C_{k-1}^{l}b_l b_{k-l}.$$

Доведення. Доведення слідує з представлень (2.32) роботи [2] з $\alpha=1$ та (4.1) роботи [3].

Теорема 2. *Якщо* $M_a, B<\infty, 1-G(t)=1-\int_0^t a_j^i(u)\,dG^i(u)=o(t^{-2})$, $B_{jk}^i\neq 0, i,j,k=\overline{1,n}$ *то для моделі 2 має місце збіжність (1).*

Доведення. Ми будемо використовувати метод доведення теореми 1 з [6].

Спочатку зауважимо, що

$$E\left(\exp\left\{-\sum_{j=1}^{k}\frac{\beta^j N_j^i(t)}{v^j t^2}\right\}\middle|\sum_{k=1}^{n}\mu_k^i(t)>0\right)=$$

$$=\frac{E\left(\exp\left\{-\sum_{j=1}^{k}\frac{\beta^j N_j^i(t)}{v^j t^2}\right\}\right)-E\left(\exp\left\{-\sum_{j=1}^{k}\frac{\beta^j N_j^i(t)}{v^j t^2}\right\}\middle|\sum_{k=1}^{n}\mu_k^i(t)=0\right)}{P\left(\sum_{j=1}^{k}\mu_j^i(t)>0\right)}.$$

В [4] було показано, що в умовах теореми

$$tQ^i(t)\sim\frac{2u^i M_a}{B}, \qquad (4)$$

Тому достатньо показати, що

$$\lim_{t\to+\infty}tE\left(\exp\left\{-\sum_{j=1}^{k}\frac{\beta^j N_j^i(t)}{v^j t^2}\right\}\right)-$$

$$-\lim_{t\to+\infty}tE\left(\exp\left\{-\sum_{j=1}^{k}\frac{\beta^j N_j^i(t)}{v^j t^2}\right\}\middle|\sum_{k=1}^{n}\mu_k^i(t)=0\right)=$$

$$=\frac{2u^i M_a}{B}\cdot\frac{\sqrt{2B\sum_{j=1}^{n}\beta^j}}{M_a}\left(sh\frac{\sqrt{2B\sum_{j=1}^{n}\beta^j}}{M_a}\right)^{-1}. \qquad (5)$$

Представимо вектор $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ у вигляді $\beta=\lambda(x_1,\dots,x_n)$ де $\lambda\le 0, x_i\ge 0, i=\overline{1,n}.$

За формулою повної ймовірності (як і в [3], ст. 463) можна показати, що компоненти вектора $F\ (t,\lambda)=F\ \left(t,e^{\frac{\lambda x}{v}}\right)=\left(F^1(t,\lambda),\dots,F^n(t,\lambda)\right)$ $\left(\frac{\lambda x}{v}=\frac{\lambda x_1}{v^1}+\dots+\frac{\lambda x_n}{v^n}\right)$ задовольняють рівняння

$$F^i(t,s)=e^{\frac{\lambda x_i}{v^i}}\left(\left(1-G^i(t)\right)+\int_0^t h^i\left(u,F\ \ (t-u,s)\right)dG^i(u)\right) \qquad (6)$$

За теоремою 1 з [5], ст.112, функції $h^i(u,s)$ можна представити як

$$1+\sum_{j=1}^{n} a_j^i(u)\left(y^j-1\right)+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} b_{jk}^i(u)\left(y^j-1\right)(y^k-1)-$$
$$-\sum_{j,k=1}^{n}\varepsilon_{jk}^i(u,y)\left(y^j-1\right)(y^k-1) \qquad (7)$$

де $0\le \varepsilon_{jk}^i(u,y)\le b_{jk}^i(u)$ і $\lim\limits_{y\to 1}\varepsilon_{jk}^i(u,y)=0$.

Розглянемо вектор $F_0\ \ (t,\lambda)=\left(F_0^1(t,\lambda),\dots,F_0^n(t,\lambda)\right)$, де компоненти $F_0^i(t,\lambda)$ задовольняють інтегральні рівняння

$$F_0^i(t,\lambda)=\frac{\lambda x_i}{v^i}+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t F_0^j(t-u,\lambda)a_j^i(u)dG^i(u)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{n}\int_0^t F_0^j(t-u,\lambda)F_0^l(t-u,\lambda)b_{jl}^i(u)dG^i(u), \qquad (8)$$

розв'язки яких шукатимемо у вигляді

$$F_0^i(t,\lambda)=\sum_{k=1}^{+\infty}\psi_k^i(t)\frac{\lambda^k}{k!}. \qquad (9)$$

Якщо такі розв'язки існують, то функції $\psi_k^i(t)$ задовольняють наступні рекурентні співвідношення

$$\psi_1^i(t)=\frac{x_i}{v^i}+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \psi_1^j(t-u)a_j^i(u)dG^i(u),$$
$$\psi_k^i(t)=\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \psi_k^j(t-u)a_j^i(u)dG^i(u)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k-1}C_k^r\sum_{j,l=1}^{n}\int_0^t \psi_r^j(t-u)\psi_{k-r}^l(t-u)b_{jl}^i(u)dG^i(u)\,,k\ge 2. \qquad (10)$$

Доведення збіжності ряду (9) значною мірою повторює міркування з [6] ст. 551-552 (див. також [8], ст. 231), проте для наочності ми його проведемо.

Використовуючи, теорему 1 з $\gamma=0$, встановлюємо, що

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\psi_1^i(t)}{t}=u^i\sum_{j=1}^{n}x_j\ \psi_1,. \qquad (11)$$

де $\psi_1=\frac{1}{M_a}$.

Тому можна стверджувати, що

$$0\le\psi_1^i(t)\le ct, c>0. \qquad (12)$$

Крім того вважатимемо, що

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{\sum_{j=1}^{n}H_j^i(t)}{t}\le c,\ \ i=\overline{1,n}. \qquad (13)$$

Покажемо, що

$$\psi_k^i(t)\le c_k(Lct)^{2k-1}, k\ge 1, i=\overline{1,n}. \qquad (14)$$

де

$$L=\frac{1}{2}\max\nolimits_l\sum_{k,m=1}^{n}B_{mk}^l\,,$$
$$c_1=c, c_k=\sum_{r=1}^{k-1}C_k^r\,c_r c_{k-r}, k\ge 2. \qquad (15)$$

При $k=1$ нерівність (14) випливає з (12). Нехай (14) виконується для всіх $l\le k-1$. Тоді з припущення індукції отримаємо

$$\psi_k^i(t)\le\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\left|\psi_k^j(t-u)\right|a_j^i(u)dG^i(u)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k-1}C_k^r\,c_r c_{k-r}\sum_{j,l=1}^{n}\int_0^t\left|(Lc(t-u))^{2k-2}\right|b_{jl}^i(u)dG^i(u)\le$$
$$\le L(Lct)^{2k-2}c_k+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t\left|\psi_k^j(t-u)\right|a_j^i(u)dG^i(u).$$

Ітеруючи дану нерівність встановлюємо

$$\psi_k^i(t) \le c_k \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \left| L^{2k-1}\big(c(t-u)\big)^{2k-2} \right| dH_j^i(u).$$

Звідси і з (13) слідує (14).

Запишемо рівність

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{1-\sqrt{1-4c\lambda}}{2}, \tag{16}$$

де $\lambda \le \frac{1}{4c}$, а c_k визначені в (14). Правильність цієї рівності можна встановити розклавши ліву частину в ряд Маклорена.

З (14) і (16) отримуємо збіжність ряду (9) при $|\lambda| \le \frac{1}{4c^3 \max\{1,(Lt)^2\}}$, а також нерівність

$$\left| F_0^i(t,\lambda) \right| \le \max\{1, 2c\lambda\}. \tag{17}$$

Домноження (10) на $\frac{\lambda^k}{k!}$ і сумування по k показує, що (9) є розв'язком (8).

Покажемо, що

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\psi_k^i(t)}{t^{2k-1}} = u^i \psi_k, k \ge 2, \tag{18}$$

де $\psi_k = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^k \frac{B}{2} \sum_{r=1}^{k-1} C_k^r \psi_r \psi_{k-r}}{(2k-1)M_a}$.

Для $k = 2$ маємо

$$\psi_2^i(t) = \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \psi_2^j(t-u) a_j^i(u) dG^i(u) +$$
$$+ \sum_{j,l=1}^{n} \int_0^t \psi_1^j(t-u) \psi_1^l(t-u) b_{jl}^i(u) dG^i(u),$$

Враховуючи (11) і використовуючи теорему 1 з $\gamma = 2$ отримуємо що

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\psi_2^i(t)}{t} = u^i \psi_2,$$

де $\psi_2 = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^2 B}{{M_a}^3}$.

Отже базу індукції задано. Нехай (18) виконується для всіх $r \le k-1$. Тоді

$$\frac{1}{2t^{2k-2}} \sum_{r=1}^{k-1} C_k^r \sum_{j,k=1}^{n} \int_0^t \psi_r^j(t-u) \psi_{k-r}^l(t-u) b_{jl}^i(u) dG^i(u) \xrightarrow[t\to+\infty]{}$$
$$\xrightarrow[t\to+\infty]{} \frac{B}{2} \sum_{r=1}^{k-1} C_k^r \psi_r \psi_{k-r}, \tag{19}$$

і (18) слідує з (19) і знову ж таки з теореми 1, на цей раз із $\gamma = 2k-2$.

Подібно до (6) для $\tilde{F}^i(t,\lambda) = F\left(t, e^{\frac{\lambda x}{v}}\right), i = \overline{1,n}$ справедливі формули

$$\tilde{F}^i(t,\lambda) = e^{\frac{\lambda x_i}{v^i}} \int_0^t h^i\left(u, \tilde{F}(t-u,\lambda)\right) dG^i(u). \tag{20}$$

Зрозуміло, що $h^i\left(u, \tilde{F} \quad (t,0)\right) = h^i\big(u, \mathbb{1} - Q(t-u)\big)$, тому розкладаючи функції $h^i\left(u, \tilde{F} \quad (t-u,\lambda)\right)$ в ряд Тейлора за другою змінною (подібно до теореми 1 з [5], ст. 112), встановлюємо що

$$h^i\left(u, \tilde{F} \quad (t-u,\lambda)\right) = h^i(u,y)=$$

$$= h^i\big(u, \mathbb{1} - Q(t-u)\big) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial h^i\big(u,\mathbb{1}-Q(t-u)\big)}{\partial y^j}\big(y^j - 1\big)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 h^i\big(u,\mathbb{1}-Q(t-u)\big)}{\partial y^j \partial y^k}\big(y^j - 1\big)(y^k - 1) -$$

$$-\sum_{j,k=1}^{n} \varepsilon_{jk}^i (u,y)\,\big(y^j - 1\big)(y^k - 1),$$

де $0 \le \varepsilon_{jk}^i (u,y) \le \frac{\partial^2 h^i(u,y)}{\partial y^j \partial y^k}\Big|_{y\, =\, \mathbb{1} - Q(t-u)}, \lim\limits_{y\to 1}\varepsilon_{jk}^i (u,y) = 0,$

$\frac{\partial h^i(u,1-Q(t-u))}{\partial y^j} = \frac{\partial h^i(u,y)}{\partial y^j}\Big|_{y\, =\, \mathbb{1} - Q(t-u)}$ і

$\frac{\partial^2 h^i(u,1-Q(t-u))}{\partial y^j \partial y^k} = \frac{\partial^2 h^i(u,y)}{\partial y^j \partial y^k}\Big|_{y\, =\, \mathbb{1} - Q(t-u)}.$

Розглянемо ще одну систему рівнянь

$$\tilde{F}_0^i(t,\lambda) = \frac{\lambda x_i}{v^i}\int_0^t h^i\big(u, \mathbb{1} - Q(t-u)\big)dG^i(u)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \tilde{F}_0^j(t-u,\lambda)\frac{\partial h^i\big(u,\mathbb{1}-Q(t-u)\big)}{\partial y^j}dG^i(u)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{n}\int_0^t \tilde{F}_0^j(t-u,\lambda)\tilde{F}_0^l(t-u,\lambda)\frac{\partial^2 h^i\big(u,\mathbb{1}-Q(t-u)\big)}{\partial y^j \partial y^l}dG^i(u). \qquad (21)$$

Як і у (9) розв'язки цієї системи спробуємо знайти у вигляді ряду

$$\tilde{F}_0^i(t,\lambda) = \sum_{k=1}^{+\infty}\tilde{\psi}_k^i(t)\frac{\lambda^k}{k!}. \qquad (22)$$

де

$$\tilde{\psi}_1^i(t) = \frac{x_i}{v^i}\int_0^t h^i\big(u, \mathbb{1} - Q(t-u)\big)dG^i(u)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\int_0^t \tilde{\psi}_1^j(t-u)\frac{\partial h^i\big(u,\mathbb{1}-Q(t-u)\big)}{\partial y^j}dG^i(u), \qquad (23)$$

$$\tilde{\psi}_k^i(t) = \sum_{j=1}^{n}\int_0^t \tilde{\psi}_k^j(t-u)\frac{\partial h^i\big(u,\mathbb{1}-Q(t-u)\big)}{\partial y^j}dG^i(u)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k-1}C_k^r\sum_{j,l=1}^{n}\int_0^t \tilde{\psi}_r^j(t-u)\tilde{\psi}_{k-r}^l(t-u)\frac{\partial^2 h^i\big(u,\mathbb{1}-Q(t-u)\big)}{\partial y^j \partial y^l}dG^i(u). \qquad (24)$$

Зважаючи на те, що $\tilde{\psi}_k^i(t) \le \psi_k^i(t)$, ряд (22) збігається абсолютно при $|\lambda| \le \frac{1}{4c^3\max\{1,(Lt)^2\}}$і$\left|\tilde{F}_0^i(t,\lambda)\right| \le \max\{1{,}2c\lambda\}$.

Домноження (23) і (24) на $\frac{\lambda^k}{k!}$ і підсумовування по k показує, що (22) є розв'язком (21).

Спочатку встановимо існування $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\tilde{\psi}_1^i(t)}{t}$.

Розкладаючи $\frac{\partial h^i\big(u,\mathbb{1}-Q(t-u)\big)}{\partial y^j} = \frac{\partial h^i(u,y)}{\partial y^j}\Big|_{y\, =\, \mathbb{1} - Q(t-u)}$ в ряд Тейлора у точці 1 отримуємо

$$\tilde{\psi}_1^i(t) = \frac{x_i}{v^i}\int_0^t h^i\big(u, \mathbb{1} - Q(t-u)\big)dG^i(u) -$$
$$- \sum_{j,l=1}^n \int_0^t \tilde{\psi}_1^j(t-u)\frac{\partial^2 h^i(u,\rho(t,u))}{\partial z^l \partial y^j}Q^l(t-u)dG^i(u) +$$
$$+ \sum_{j=1}^n \int_0^t \tilde{\psi}_1^j(t-u)a_j^i(u)dG^i(u), \qquad (25)$$

де $\mathbb{1} - Q(t-u) \le \rho(t,u) \le \mathbb{1}$ і $\frac{\partial^2 h^i(u,\rho(t,u))}{\partial z^l \partial y^j} = \frac{\partial}{\partial z^l}\left(\frac{\partial h^i(u,z)}{\partial y^j}\right)\Big|_{z=\rho(t,u)}$.

Зважаючи, на (18) і той факт, що $\tilde{\psi}_1^i(t) \le \psi_1^i(t)\ \forall\, t \ge 0$, можна вважати, що $\frac{\tilde{\psi}_1^i(t)}{t}$ обмежена послідовність. Припустимо, що

$$\tilde{\psi}_1^i(t) = o(t) \qquad (26)$$

Тоді, враховуючи (4)

$$\tilde{\psi}_1^i(t) = \frac{x_i}{v^i} + o(1) + \sum_{j=1}^n \int_0^t \tilde{\psi}_1^j(t-u)a_j^i(u)dG^i(u),$$

а отже за теоремою 1 $\tilde{\psi}_1^i(t) \sim \frac{u^i \sum_{j=1}^n x_j}{M_a} t$, що суперечить (26).

Нехай $\tilde{\psi}_1^i$ є границею (можливо частковою) $\frac{\tilde{\psi}_1^i(t)}{t}$. Тоді $\tilde{\psi}_1^i(t) \sim \tilde{\psi}_1^i t$ і з (25) та (4) отримуємо

$$\tilde{\psi}_1^i t \sim \frac{x_i}{v^i} - \frac{2M_a}{B}\sum_{j,l=1}^n B_{lj}^i u^l \tilde{\psi}_1^j +$$
$$+ \sum_{j=1}^n \tilde{\psi}_1^j \int_0^{\frac{t}{2}} (t-u)a_j^i(u)dG^i(u) + o(1) \qquad (27)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при t ми отримуємо, що $\tilde{\psi}_1^i = \sum_{j=1}^n A_j^i \tilde{\psi}_1^j$, а отже $\tilde{\psi}_1^i = u^i \tilde{\psi}_1$.

Домноження (27) на v^i та сумування по i дає таке

$$\tilde{\psi}_1 t \sim \sum_{j=1}^n x_j - 2M_a\tilde{\psi}_1 + \sum_{i,j=1}^n A_j^i u^j v^i \tilde{\psi}_1 t - M_a\tilde{\psi}_1 + o(1). \qquad (28)$$

Прирівнюючи вільні члени (28) отримуємо, що $\tilde{\psi}_1 = \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{3M_a}$, а отже всі часткові границі $\tilde{\psi}_1^i$ рівні $u^i \frac{\sum_{j=1}^n x_j}{3M_a}$.

Покажемо, що

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\tilde{\psi}_k^i(t)}{t^{2k-1}} = u^i \tilde{\psi}_k, k \ge 2, \qquad (29)$$

де $\tilde{\psi}_k = \frac{\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^k \frac{B}{2}\sum_{r=1}^{k-1} C_k^r \tilde{\psi}_r \tilde{\psi}_{k-r}}{(2k+1)M_a}$.

Аналогічні до (26-(28) міркування показують, що часткові границі $\tilde{\psi}_2^i = \lim_{t\to+\infty} \frac{\tilde{\psi}_2^i(t)}{t^3}$ задовольняють наступне співвідношення

$$\tilde{\psi}_2^i(t) \sim \sum_{j,l=1}^n \frac{u^l u^j B_{lj}^i \left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^2}{9M_a} t^2 - \frac{2M_a}{B}\sum_{j,l=1}^n B_{lj}^i u^l \tilde{\psi}_2^j t^2 +$$
$$+ \sum_{j=1}^n A_j^i \tilde{\psi}_2^j t^3 - 3\sum_{j=1}^n M_a^{ij} \tilde{\psi}_2^j t^2 + o(t^2). \qquad (30)$$

Прирівнюючи коефіцієнти при t^3 приходимо до висновку, що $\tilde{\psi}_2^i = u^i \check{\psi}_2$.

Домножуючи (30) на v^i, сумуючи по i та прирівнюючи коефіцієнти при t^2 отримуємо, що

$$\tilde{\psi}_2^i = u^i \tilde{\psi}_2, \qquad (31)$$

де $\tilde{\psi}_2 = \frac{u^i B\left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^2}{5\cdot 9 {M_a}^3}$.

Тому базу індукцію задано. Нехай формула (29) виконується для всіх $r \le k-1$ і $\tilde{\psi}_k^i = \frac{\tilde{\psi}_k^i(t)}{t^{2k-1}}$.

Застосовуючи кроки (30)-(31) до (24) і використовуючи базу індукції встановлюємо, що

$$\tilde{\psi}_k^i t^{2k-1} \sim \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^n \sum_{r=1}^{k-1} C_k^r\, \tilde{\psi}_r^l \tilde{\psi}_{k-r}^j B_{lj}^i \left(\sum_{j=1}^n x_j\right)^k t^{2k-2} -$$
$$-\frac{2M_a}{B}\sum_{j,l=1}^n B_{lj}^i u^l \tilde{\psi}_k^j\, t^{2k-2} +$$
$$+\sum_{j=1}^n A_j^i \tilde{\psi}_k^j\, t^{2k-1} - (2k-1)\sum_{j=1}^n M_a^{ij}\, \tilde{\psi}_k^j\, t^{2k-2} + o(t^{2k-2}). \qquad (32)$$

Домножуючи (32) на v^i, сумуючи по i та прирівнюючи коефіцієнти при степенях $2k-1$ та $2k-2$ отримуємо формулу (29).

Використовуючи (4), (18) та (29), отримуємо, що

$$\lim_{t\to+\infty} t\left(Q^i(t) + F_0^i\left(t, \frac{\lambda}{t^2}\right) - \tilde{F}_0^i\left(t, \frac{\lambda}{t^2}\right)\right) =$$
$$= u^i \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\psi_k - \tilde{\psi}_k\right)\frac{\left(\lambda\sum_{j=1}^n x_j\right)^k}{k!}, \qquad (33)$$

де $\psi_0 - \tilde{\psi}_0 = \frac{2M_a}{B}$.

Поклавши $B = h''(1), \frac{2M_a}{B} = \mu$ і враховуючи, що $\sum_{r=1}^{k-1} C_{k-1}^r = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k-1} C_k^r$, з (3) та (33) виводимо таке

$$\lim_{t\to+\infty} t\left(Q^i(t) + F_0^i\left(t, \frac{\lambda}{t^2}\right) - \tilde{F}_0^i\left(t, \frac{\lambda}{t^2}\right)\right) =$$
$$= u^i\, \frac{2M_a}{B}\frac{\sqrt{2B\lambda\sum_{j=1}^n \beta^j}}{M_a}\left(sh\frac{\sqrt{2B\lambda\sum_{j=1}^n \beta^j}}{M_a}\right)^{-1}. \qquad (34)$$

Тому зважаючи на (5) та (34) достатньо показати, що

$$\lim_{t\to+\infty} t\left(F^i\left(t, \frac{\lambda}{t^2}\right) - \tilde{F}^i\left(t, \frac{\lambda}{t^2}\right) - F_0^i\left(t, \frac{\lambda}{t^2}\right) + \tilde{F}_0^i\left(t, \frac{\lambda}{t^2}\right) - Q^i(t)\right) = 0. \qquad (35)$$

Використовуючи (6)-(8) отримуємо нерівність

$$\left|F^i\left(t, \frac{\lambda}{\tau^2}\right) - 1 - F_0^i\left(t, \frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right| \le \left|e^{\frac{\lambda x_i}{\tau^2 v^i}} - 1 - \frac{\lambda x_i}{\tau^2 v^i}\right| +$$
$$+\left|e^{\frac{\lambda x_i}{\tau^2 v^i}} - 1\right| \int_0^t \left|h^i\left(u, F\left(t-u, \frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right) - 1\right| dG^i(u) +$$
$$+\sum_{j,l=1}^n \int_0^t \left|\varepsilon_{jk}^i\left(u, 1 + F_0\left(t-u, \frac{\lambda}{t^2}\right)\right) F_0^j\left(t-u, \frac{\lambda}{\tau^2}\right) F_0^k\left(t-u, \frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right| dG^i(u) +$$
$$+\int_0^t \left|h^i\left(u, F\left(t-u, \frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right) - h^i\left(u, 1 + F_0\left(t-u, \frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right)\right| dG^i(u). \qquad (36)$$

Перший член правої частини (36) за абсолютною величиною не перевищує $\left(\frac{\lambda x_i}{\tau^2 v^i}\right)^2$. Третій член, в силу нерівності $\left|F_0^i(t,\frac{\lambda}{\tau^2})\right| \leq \max\left\{1{,}2c\,\frac{\lambda}{\tau^2}\right\}(\tau \geq t)$, за абсолютною величиною не перевищує $\left(\frac{2c\lambda x_i}{\tau^2 v^i}\right)^2$.

Перейдемо до оцінки другого члену. Очевидно, що $\left|e^{\frac{\lambda x_i}{\tau^2 v^i}} - 1\right| \leq \frac{|\lambda| x_i}{\tau^2 v^i}$, крім того

$$h^i\left(u, F\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right) - 1 = \sum_{j=1}^n a_j^i(u)\left(F^j\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)-1\right) +$$
$$+\sum_{j,l=1}^n b_{jk}^i(u)\left(F^j\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)-1\right)\left(F^k\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)-1\right) -$$
$$-\sum_{j,l=1}^n \varepsilon_{jk}^i\left(u, F\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right)\left(F^j\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)-1\right)\left(F^k\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)-1\right),$$

і $F^j\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right) - 1 \xrightarrow[\tau\to+\infty]{} 0, j = \overline{1,n}.$

Тому другий член не перевищує $\frac{|\lambda| x_i}{\tau^2 v^i}\omega(\tau)$, де $\omega(\tau)\tau \to +\infty$.

За теоремою 4.1.2 з [5]

$$\left|h^i\left(u, F\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right) - h^i\left(u, 1 + F_0\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right)\right| \leq$$
$$\leq \sum_{j=1}^n a_j^i(u)\left|F^j\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right) - 1 - F_0^j\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right|.$$

Поклавши $\sigma(t,\lambda,\tau) = \max_{i=\overline{1,n}}\left\{\left(\frac{\lambda x_i}{\tau v^i}\right)^2 + \frac{|\lambda| x_i}{v^i}\omega(\tau) + \left(\frac{2c\lambda x_i}{\tau v^i}\right)^2\right\}$, отримуємо нерівність

$$\left|F^i\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right) - 1 - F_0^i\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right| \leq \frac{1}{\tau^2}\sigma^i(t,\lambda,\tau) +$$
$$+\sum_{j=1}^n \int_0^t a_j^i(u)\left|F^j\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right) - 1 - F_0^j\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right| dG^i(u), \quad (37)$$

де

$$\lim_{t,\tau\to+\infty} \sigma(t,\lambda,\tau) = 0, i = \overline{1,n}. \quad (38)$$

Ітеруючи нерівність (37) встановлюємо, що

$$\left|F\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right) - 1 - F_0\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right| \leq \frac{1}{\tau^2}\int_0^t \sigma(t-u,\lambda,\tau)\, d(H(u) * \mathbb{1}), \quad (39)$$

де $X * y$ позначає добуток матриці і вектора.

Покладемо $t = \tau$. Тоді зважаючи на (38) і той факт, що $\lim_{t\to+\infty}\frac{H_j^i(t)}{t} = c < \infty,\ i,j = \overline{1,n}$, встановлюємо що

$$\lim_{t\to+\infty} t\left(F^i\left(t-u,\frac{\lambda}{t^2}\right) - 1 - F_0^i\left(t-u,\frac{\lambda}{t^2}\right)\right) = 0. \quad (40)$$

Майже дослівно повторюючи міркування (36)-(39) показуємо, що

$$\lim_{t\to+\infty} t\left(\tilde{F}^i\left(t-u,\frac{\lambda}{t^2}\right) - 1 + Q^i(t) - \tilde{F}_0^i\left(t-u,\frac{\lambda}{t^2}\right)\right) = 0. \quad (41)$$

Тепер (35) слідує з (40) та (41).

Теорему доведено.

3. Гранична теорема для процесів з імміграцією.

Лема 2. *Нехай*

$$\theta = \int_0^{+\infty} u\, dG^0(u) < \infty, \mu = \int_0^{+\infty} u\, dG(u) < \infty.$$

Тоді, якщо в процесі 1 типу з одним типом частинок та імміграцією скінченні усі моменти твірних функцій $h^0(s)$ та $h(s)$, то

$$\lim_{t\to+\infty} E\left(\frac{N^0(t)}{t^2}\right)^k = r_k, \tag{42}$$

де $r_0 = 1, r_k = \frac{(h^0)'(1)}{2k\theta}\sum_{l=0}^{k-1} C_k^l r_l a_{k-l}$, а a_k такі як в лемі 1, і крім того

$$1 + \sum_{k=0}^{+\infty} r_k \frac{\lambda^k}{k!} = \left(ch\sqrt{\frac{\lambda}{2\mu}}\right)^{-\frac{2(h^0)'(1)\mu}{\theta h''(1)}}, \tag{43}$$

де μ також визначено в лемі 1.

Доведення. Справедливість формули для $k = 1$ та k=2 встановлена в [3] на сторінці 467 (співвідн. (3.43)).

Також з [3], ст. 465 відомо, що твірна функція $f(t,s) = E\left(s^{N^0(t)}\right)$ задовольняє рівняння

$$f(t,s) = 1 - G^i(t) + \int_0^t h^0\left(u, F\quad(t-u,s)\right) f(t-u,s) dG^0(u) \tag{44}$$

Тож нехай (42) виконується для всіх $l \le k-1, k \ge 2$.

Продиференціювавши (44) k разів по s використовуючи правило Лейбніца отримуємо

$$\left.\frac{\partial^k f\quad(t,s)}{t^{2k-1}\partial s^k}\right|_{S=1} = K(t) +$$

$$+\sum_{l=1}^{k-1} C_k^l \int_0^t (h^0)'(1) \left.\frac{\partial^{k-l}F\quad(t-u,s)}{t^{2(k-l)-1}\partial s^{k-l}}\right|_{S=1} \left.\frac{\partial^l f\quad(t-u,s)}{t^{2l}\partial s^l}\right|_{S=1} dG^0(u) +$$

$$+\int_0^t \left.\frac{\partial^k f\quad(t-u,s)}{t^{2k-1}\partial s^k}\right|_{S=1} dG^0(u),$$

де $K(t)$ містить члени з похідним функції $h^0\left(u, F\quad(t-u,s)\right)$, які мають порядок не менше двох. Тоді використовуючи припущення індукції і той факт, що $a_k = \lim_{t\to+\infty} \left.\frac{\partial^k F\quad(t,s)}{t^{2k-1}\partial s^k}\right|_{S=1}$, можна стверджувати, що $K(t) = o(t^{2k-1})$ і

$$\frac{1}{t^{2k-1}}\sum_{l=1}^{k-1} C_k^l \int_0^t (h^0)'(1) \left.\frac{\partial^{k-l}F\quad(t-u,s)}{t^{2(k-l)-1}\partial s^{k-r}}\right|_{S=1} \left.\frac{\partial^r f\quad(t-u,s)}{t^{2r-1}\partial s^r}\right|_{S=1} dG^0(u) \xrightarrow[t\to+\infty]{}$$

$$\xrightarrow[t\to+\infty]{} (h^0)'(1)\sum_{l=1}^{k-1} C_k^l r_l a_{k-l} \tag{45}$$

Твердження леми тепер слідує з (45) та теореми 1 із $\gamma = 2k-1$.

(43) слідує з (42) та представлення (3.6) з [3].

Лему доведено.

Теорема 3. *Якщо $M_0, A^0 < +\infty$, то в умовах теореми 2 виконується (2).*

Доведення. Ми використаємо метод доведення теореми 2 з [6]. Знову представимо вектор $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ у вигляді $\beta = \lambda(x_1, \dots, x_n)$ де $\lambda \leq 0, x_i \geq 0, i = \overline{1,n}$.

Неважко показати, що формула (44) справедлива і для процесів 2 типу.

Знову ж таки використовуючи теорему 1 з [5], ст. 112, функцію $h^0(u, y)$ можна представити у вигляді

$$1 + \sum_{j=1}^{n} a_j^0(u)\left(y^j - 1\right) - \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^0(u, y)\left(y^j - 1\right), \tag{46}$$

де $0 \leq \varepsilon_j^0(u, y) \leq a_j^0(u)$ і $\lim\limits_{y \to 1} \varepsilon_j^0(u, y) = 0$.

Ми будемо порівнювати $f(t, \lambda) = f\left(t, e^{\lambda x}\right)$ із розв'язком рівняння

$$f^0(t, \lambda) = 1 - G^0(t) +$$
$$+ \int_0^t f^0\left(u, F\quad(t - u, \lambda)\right)\left(1 + \sum_{j=1}^{n} a_j^0(u)\, F_0^j(t, \lambda)\right) dG^0(u), \tag{47}$$

де $F_0^j(t, \lambda)$ визначені в (8).

Розв'язок (47) шукатимемо у вигляді ряду

$$f^0(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \varphi^k(t) \frac{\lambda^k}{k!}, \tag{48}$$

коефіцієнти якого визначаються з рекурентних співвідношень

$$\varphi^k(t) = \sum_{r=0}^{k-1} C_k^r \sum_{j=1}^{n} \int_0^t \varphi^r(t - u)\psi_{k-r}^j(t - u) a_j^0(u) dG^0(u) +$$
$$+ \int_0^t \varphi^k(t - u) dG^0(u), \tag{49}$$

де $\varphi^0(t) \equiv 1$, а $\psi_k^j(t)$ визначені в (9).

Знову ж таки індуктивно можна встановити (див.[6] на сторінках 556-557), що ряд (48) збігається абсолютно при $|\lambda| \leq \frac{\delta}{\max\{1, t^2\}}, \delta > 0$, а також довести, що виконується нерівність

$$\left| f^0\left(t - u, \frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right| \leq 2. \tag{50}$$

Крім того, подібно до леми 2 можна встановити, що

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\varphi^k(t)}{t^{2k}} = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^k, \tag{51}$$

де $\varphi^k = \frac{\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right)^k A^0 \sum_{r=0}^{k-1} C_k^r \varphi^l \psi_{k-r}}{2kM_a}, k \geq 1$.

Покажемо, що

$$\lim_{t \to +\infty}\left(f\left(t, \frac{\lambda}{t^2}\right) - f^0\left(t, \frac{\lambda}{t^2}\right)\right) = 0. \tag{52}$$

Користуючись (44), (46) та (47) можна записати

$$f\left(t, \frac{\lambda}{\tau^2}\right) - f^0\left(t, \frac{\lambda}{\tau^2}\right) =$$
$$= \int_0^t h^0(u, F)\left(f\left(t - u, \frac{\lambda}{\tau^2}\right) - f^0\left(t - u, \frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right) dG^0(u) +$$
$$+ \int_0^t f^0(u, F)\left(h^0(t, F) - h^0\left(t, 1 + F_0\quad\right)\right) dG^0(u) +$$
$$+ \int_0^t f^0(u, F) \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j^0(u, 1 + F_0)\, F_0^j(t - u, \lambda) dG^0(u), \tag{53}$$

де $F = F\quad\left(t - u, \frac{\lambda}{\tau^2}\right), F_0 = F_0\quad\left(t - u, \frac{\lambda}{\tau^2}\right)$.

Абсолютна величина першого доданку в (53) не перевищує

$$\int_0^t \left|f\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)-f^0\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right| dG^0(u).$$

За допомогою теореми 4.1.2 з [5] та (50) встановлюємо, що абсолютна величина другого доданку в (53) не перевищує

$$2\int_0^t \sum_{j=1}^n a_j^0(u)\left|F^j\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)-1-F_0^j\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right| dG^0(u)$$

і тому, в свою чергу враховуючи (39), не перевищує

$$\frac{2}{\tau^2}\int_0^t \left(\int_0^{t-u}\sigma(t-u-y,\lambda,\tau)d(H(y)*\mathbb{1}),a^0(u)\right)dG^0(u),$$

де $a^0(u)=\left(a_1^0(u),\dots,a_n^0(u)\right)$, а$(x,y)$ позначає скалярний добуток.

Третій член в (53) зважаючи на (17) та (50) не перевищує

$$\frac{4|\lambda|c_0}{\tau^2}\int_0^t \sum_{j=1}^n \left|\varepsilon_j^0\left(u,1+F_0\quad\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right)\right| dG^0(u),$$

і крім того, враховуючи (46)

$$\sum_{j=1}^n \left|\varepsilon_j^0\left(u,1+F_0\quad\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right)\right| \xrightarrow[\tau\to+\infty]{} 0.$$

Тоді прийнявши

$$\sigma_1(t,\lambda,\tau)=\frac{2}{\tau}\int_0^t\left(\int_0^t\sigma(t-u,\lambda,\tau)d(H(u)*\mathbb{1}),a^0(u)\right)dG^0(u)+$$
$$+\frac{4|\lambda|c_0}{\tau}\int_0^t \sum_{j=1}^n \left|\varepsilon_j^0\left(u,1+F_0\quad\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right)\right| dG^0(u),$$

отримаємо оцінку

$$\left|f\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)-f^0\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right|\le\frac{1}{\tau}\sigma_1(t,\lambda,\tau)+$$
$$+\int_0^t\left|f\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)-f^0\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right|dG^0(u),$$

де $\lim\limits_{t,\tau\to+\infty}\sigma_1(t,\lambda,\tau)=0.$

Ітеруючи останню нерівність отримуємо таке

$$\left|f\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)-f^0\left(t-u,\frac{\lambda}{\tau^2}\right)\right|\le\frac{1}{\tau}\int_0^t\sigma_1(t-u,\lambda,\tau)dH^0(u),$$

де $H^0(u)$ – функція відновлення, що відповідає $G^0(u)$.

Поклавши $t=\tau$, і враховуючи те, що $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{H^0(t)}{t}=\mathrm{C}^0<\infty$, отримуємо (52).

Поклавши в (43) $(h^0)'(1)=A^0,\mu=M_a,h''(1)=B,\theta=M_0,$ враховуючи (48), (51) та (52) приходимо до (2).

Теорему доведено.

Література

1. Harris, T.E. The Theory of Branching Processes/Harris, T.E. –Berlin: Springer, 1963. – 232 p. (Die Grundelhren der Matematishen Wissenschaften; Vol. 119).
2. Weiner, H.J. Conditional Moments in a Critical Age-Dependent Branching Process / Weiner, H.J. // Journal of Applied Probability. – 1975. – 12, №3, – P. 581–587.

3. Weiner, H.J. Total Progeny in a Multitype Critical Age Dependent Branching Process with Immigration / Weiner, H.J. // Journal of Applied Probability. – 1974. – 11, №3, – P. 458–470.
4. Ватутин, В.А. Асимптотика вероятности продолжения критического ветвящегося процесса / Ватутин, В.А. // Теория вероятн. и ее применения. – 1977. – 22, № 1. – С. 143–149.
5. Севастьянов, Б.А. Ветвящиеся процессы / Севастьянов, Б.А. – Москва: Наука, 1971. – 436 с.
6. Шуренков, В.М. Две предельные теоремы для критических ветвящихся процессов / Шуренков, В.М. // Теория вероятн. и ее применения. – 1976. – 21, № 3. – С. 548–558.
7. Шуренков, В.М. Переходные явления теории восстановления в асимптотических задачах теории случайных процессов. I / Шуренков, В.М. // Матем. сб. – 1980. – 112(154), № 1(5). – С. 115–132.
8. Шуренков, В.М. Переходные явления теории восстановления в асимптотических задачах теории случайных процессов. II/ Шуренков, В.М. // Матем. сб.– 1980. –112(154), № 2(6). – С. 226–241.

Стаття надійшла до редакційної колегії 14.07.2021 р.

LIMIT THEOREMS FOR TOTAL NUMBER OF PARTICLES IN CRITICAL AGE-DEPENDENT BRANCHING PROCESSES

T. B. Lysetskyi, Ya. I. Yeleiko
Ivan Franko National University of Lviv;
79000, Lviv, Universytetska Str., 1;
e-mail: taraslysetskiyy@gmail.com, yikts@yahoo.com

In this paper we considercritical multitype age-dependent branching processes. It is known, that in case with constant transition probabilities in processes with immigration total numbers of particles in process born by t, divided by t^2tends in probability to infinitely divisiblelaw, whose Laplace transform is explicitly given and in processes without immigration similar convergence holds but under the condition of non-extinction of process by t. Here we prove given results in case with variable transition probabilities.

Key words: *branching process, renewal equations, Perron root, critical process.*