УДК 539.4

ПРО МІЦНІСТЬ ІЗОТРОПНИХ МАТЕРІАЛІВ З ПРОСТОРОВИМ СТОХАСТИЧНИМ РОЗПОДІЛОМ ДЕФЕКТІВ

Р. І. Квіт

Національний університет «Львівська політехніка»;
79013, Львів, вул. С. Бандери, 12; e-mail: kvit_rom@ukr.net

Розглянуто модель стохастично дефектного тіла, дослідження міцності якого базується на функції розподілу руйнівного навантаження типу Вейбула. Тіло знаходиться за умов дії однорідного осесиметричного навантаження і в ньому рівномірно розподілені дископодібні тріщини, що не взаємодіють між собою. Отримано співвідношення для знаходження ряду статистичних характеристик міцності: ймовірності зруйнування, середнього значення, дисперсії і коефіцієнта варіації міцності. Досліджено вплив на вказані статистичні характеристики міцності виду прикладеного навантаження, кількості дефектів (розмірів тіла) і неоднорідності матеріалу.

Ключові слова: *осесиметричне навантаження, дископодібна тріщина, ізотропний матеріал, розподіл Вейбула, імовірність зруйнування, статистичні характеристики міцності.*

Вступ

При дослідженні міцності деталей машин та елементів конструкцій актуальним завданням є вивчення напруженого стану і руйнування матеріалів, ослаблених дефектами різних типів. Імовірнісна оцінка руйнівного стану при заданому навантаженні є важливим етапом у розрахунках надійності і довговічності. Міцність матеріалу залежить від дефектів структури і завжди є деякою випадковою величиною. Тому при розв'язуванні задач прогнозування граничного стану конструкційних матеріалів важливим є комплексне застосування детерміністичних та ймовірнісно-статистичних методів. Ці методи, застосовані до вивчення міцності матеріалів з дефектами структури за останні роки отримали розвиток у [1-5].

Метою даного дослідження є побудова співвідношень для визначення ряду статистичних характеристик міцності крихких модельних матеріалів на базі функції розподілу руйнівного навантаження у вигляді типу Вейбула за умов дії осесиметричного навантаження.

Постановка задачі

Розглянемо модель тривимірного тіла (ізотропний матеріал) об’єму V за умов дії однорідного осесиметричного навантаження P та $Q = \eta P$ (рис. 1). У ньому рівномірно розподілені N дефектів типу тріщин, які є плоскими круглими в плані (дископодібними), та не взаємодіють між собою (число N пропорційне об'єму V: $N = N_0 V$, де N_0 – кількість дефектів у одиниці об'єму). Тріщиностійкість матеріалу K_{IC} будемо вважати однаковою в усьому тілі. Така модель дозволяє значно спростити розрахунки зменшенням числа параметрів. Дископодібна тріщина в осесиметричному полі напружень характеризується двома статистично незалежними параметрами – радіусом R та кутом орієнтації α між нормаллю $\vec{n}$ до площини тріщини і віссю симетрії Oz.

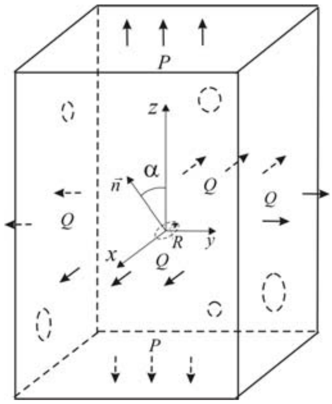

Рис. 1. Модель стохастично дефектного тіла

Нехай радіус дефекту R є випадковою величиною, яка змінюється на певному інтервалі: $0 \le R \le d$, де d – скінченна структурна характеристика. Щільність ймовірності розподілу випадкової величини R виберемо у вигляді узагальненого β-розподілу [6]: $f(R) = \dfrac{r+1}{d}\left(1 - \dfrac{R}{d}\right)^r$, де $r \ge 0$ – структурний параметр матеріалу (зі збільшенням r ймовірніші малі тріщини). Відповідна функція розподілу: $F(R) = 1 - \left(1 - \dfrac{R}{d}\right)^{r+1}$.

Для ізотропного матеріалу всі орієнтації тріщин є однаково ймовірними $(0 \le \alpha \le \pi/2)$. Тоді кінець нормалі $\vec{n}$ з однаковою ймовірністю покриває площу півсфери $2\pi|\vec{n}|^2$. Кінці нормалей з кутами орієнтації α, які не перевищують заданого значення α^*, покривають площу сферичного сегмента $2\pi|\vec{n}|^2(1-\cos\alpha)$. Імовірність того, що кут орієнтації α тріщини не перевищить заданого значення α^*, визначається як відношення площ сегмента і півсфери: $P = F(\alpha < \alpha^*) = 1 - \cos\alpha$ [7]. Відповідна щільність імовірності розподілу: $f(\alpha) = \sin\alpha$.

Функція розподілу руйнівного навантаження

У роботі [8] отримано вирази функції розподілу руйнівного навантаження для елемента тіла з одною дископодібною тріщиною для таких випадків:

усесторонній розтяг для $P \ge Q \ge 0$ $(0 \le \eta \le 1)$

$$F_1(p,\eta)=\begin{cases}\Psi_1(p,\eta)=(1-p^{-2})^{r+1}-\dfrac{r+1}{\sqrt{1-\eta}}\int\limits_{p^{-2}}^{1}(1-x)^r\sqrt{(p\sqrt{x})^{-1}-\eta}\,dx, 1\le p\le 1/\eta;\\ \Psi_2(p,\eta)=(1-p^{-2})^{r+1}-\dfrac{r+1}{\sqrt{1-\eta}}\int\limits_{p^{-2}}^{p^{-2}\eta^{-2}}(1-x)^r\sqrt{(p\sqrt{x})^{-1}-\eta}\,dx, 1/\eta\le p<\infty;\end{cases} \quad (1)$$

усесторонній розтяг для $Q \ge P \ge 0$ $(1 \le \eta < \infty)$

$$F_1(p,\eta)=\begin{cases}\Psi_3(p,\eta)=\dfrac{r+1}{\sqrt{1-\eta}}\int\limits_{p^{-2}\eta^{-2}}^{1}(1-x)^r\sqrt{(p\sqrt{x})^{-1}-\eta}\,dx,\ 1/\eta\le p\le 1;\\ \Psi_4(p,\eta)=(1-p^{-2})^{r+1}+\dfrac{r+1}{\sqrt{1-\eta}}\int\limits_{p^{-2}\eta^{-2}}^{p^{-2}}(1-x)^r\sqrt{(p\sqrt{x})^{-1}-\eta}\,dx,\ 1\le p<\infty;\end{cases} \quad (2)$$

розтяг у осьовому і стиск у бокових напрямках для $P \ge 0,\ Q \le 0$ $(-\infty < \eta \le 0)$

$$F_1(p,\eta)=\Psi_5(p,\eta)=(1-p^{-2})^{r+1}-\frac{r+1}{\sqrt{1-\eta}}\int\limits_{p^{-2}}^{1}(1-x)^r\sqrt{(p\sqrt{x})^{-1}-\eta}\,dx,\ 1\le p<\infty; \quad (3)$$

стиск у осьовому і розтяг у бокових напрямках для $P \le 0,\ Q \ge 0$ $(-\infty < \eta \le 0)$

$$F_1(-p,\eta)=\Psi_6(-p,\eta)=\frac{r+1}{\sqrt{1-\eta}}\int\limits_{p^{-2}\eta^{-2}}^{1}(1-x)^r\sqrt{(p\sqrt{x})^{-1}-\eta}\,dx,\ -1/\eta\le -p<\infty. \quad (4)$$

У виразах (1-4) введено безвимірне навантаження $p=\dfrac{2P\sqrt{d}}{\sqrt{\pi}K_{IC}}$.

Вирази функції розподілу руйнівного навантаження (1-4) є базою для визначення статистичних характеристик міцності осесиметрично навантаженого тіла.

Виберемо функцію розподілу руйнівного навантаження, яка визначає ймовірність зруйнування тіла, у вигляді типу Вейбула [9]

$$F_N(p,\eta)=P_f=1-\exp\left(-cN(p-p_{\min})^m\right),\ c>0,\ m>0. \quad (5)$$

Тут c та m – параметри розподілу, зокрема m – параметр однорідності матеріалу (зі збільшенням m матеріал більш однорідний), що зв'язаний певним співвідношенням з параметром r, яке буде знайдене нижче. Вираз (5) базується на гіпотезі про те, що міцність крихкого тіла повністю визначається міцністю його найслабшого елемента, тобто руйнування цього елемента веде до руйнування тіла в цілому.

Тоді середнє значення, дисперсія та коефіцієнт варіації руйнівного навантаження визначаються за формулами [6]

$$\langle p \rangle = p_{\min} + \frac{\Gamma(1+1/m)}{(cN)^{1/m}}; \tag{6}$$

$$D(p) = \frac{\Gamma(1+2/m) - \Gamma^2(1+1/m)}{(cN)^{2/m}}; \tag{7}$$

$$W(p) = \sqrt{D(p)} / \langle p \rangle . \tag{8}$$

Тут $\Gamma(y)$ – гамма-функція $\Gamma(y) = \int\limits_0^\infty t^{y-1} e^{-t} dt$.

Для визначення параметрів c та m розподілу (5) використовуємо співвідношення [6]

$$c = \lim_{p \to p_{\min}} \frac{F_1(p,\eta)}{(p - p_{\min})^m} . \tag{9}$$

Підставивши вирази функції розподілу $F_1(p,\eta)$ (1-4) у співвідношення (9), отримуємо наступні значення параметрів розподілу c та m:

для усестороннього розтягу $P \ge Q \ge 0$ ($0 \le \eta < 1$, $1 \le p < \infty$) та розтягу у осьовому і стиску в бокових напрямках $P \ge 0, Q \le 0$ ($-\infty < \eta \le 0$, $1 \le p < \infty$)

$$m = r+2, \quad c = \frac{2^r}{(1-\eta)(r+2)}; \tag{10}$$

для однакового усестороннього розтягу $P = Q$ ($\eta = 1$, $1 \le p < \infty$)

$$m = r+1, \quad c = 2^{r+1}; \tag{11}$$

для усестороннього розтягу $Q \ge P \ge 0$, ($1 \le \eta < \infty$, $1 \le p < \infty$)

$$m = r+1{,}5, \quad c = \frac{(r+3)2^r \eta^{r+2}}{(r+2)\sqrt{\eta - 1}}; \tag{12}$$

для стиску в осьовому і розтягу в бокових напрямках $P \le 0, Q \ge 0$ ($-\infty < \eta \le 0$, $-1/\eta \le -p < \infty$)

$$m = r+1{,}5, \quad c = \frac{(r+3)2^r |\eta|^{r+2}}{(r+2)\sqrt{|\eta|+1}} . \tag{13}$$

Статистичні характеристики руйнівного навантаження.

На основі виразів (5-13) знаходимо імовірність зруйнування, середнє значення, дисперсію та коефіцієнт варіації міцності.

Імовірність зруйнування визначається так:

для усестороннього розтягу $P \geq Q \geq 0$ ($0 \leq \eta < 1$, $1 \leq p < \infty$) та розтягу у осьовому і стиску в бокових напрямках $P \geq 0, Q \leq 0$ ($-\infty < \eta \leq 0$, $1 \leq p < \infty$)

$$P_f = 1 - \exp\left(-\frac{2^r}{(1-\eta)(r+2)} N(p-1)^{r+2} \right); \tag{14}$$

для однакового усестороннього розтягу $P = Q$ ($\eta = 1$, $1 \leq p < \infty$)

$$P_f = 1 - \exp\left(-2^{r+1} N(p-1)^{r+1} \right); \tag{15}$$

для усестороннього розтягу $Q \geq P \geq 0$, ($1 \leq \eta < \infty$, $1 \leq p < \infty$)

$$P_f = 1 - \exp\left(-\frac{(r+3)2^r \eta^{r+2}}{(r+2)\sqrt{\eta - 1}} N(p-1)^{r+1,5} \right); \tag{16}$$

для стиску в осьовому і розтягу в бокових напрямках $P \leq 0, Q \geq 0$ ($-\infty < \eta \leq 0$, $-1/\eta \leq -p < \infty$)

$$P_f = 1 - \exp\left(-\frac{(r+3)2^r |\eta|^{r+2}}{(r+2)\sqrt{|\eta| + 1}} N(p-1)^{r+1,5} \right). \tag{17}$$

Середнє значення та дисперсія руйнівного навантаження запишуться так:

для усестороннього розтягу $P \geq Q \geq 0$ ($0 \leq \eta < 1$, $1 \leq p < \infty$) та розтягу у осьовому і стиску в бокових напрямках $P \geq 0, Q \leq 0$ ($-\infty < \eta \leq 0$, $1 \leq p < \infty$)

$$\langle p \rangle = 1 + \frac{\Gamma\left(\frac{r+3}{r+2}\right)}{\left(\frac{2^r N}{(1-\eta)(r+2)}\right)^{1/m}}, \; D(p) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+4}{r+2}\right) - \Gamma^2\left(\frac{r+3}{r+2}\right)}{\left(\frac{2^r N}{(1-\eta)(r+2)}\right)^{2/m}}; \tag{18}$$

для однакового усестороннього розтягу $P = Q$ ($\eta = 1$, $1 \leq p < \infty$)

$$\langle p \rangle = 1 + \frac{\Gamma\left(\frac{r+2}{r+1}\right)}{(2^{r+1} N)^{1/m}}, \; D(p) = \frac{\Gamma\left(\frac{r+3}{r+1}\right) - \Gamma^2\left(\frac{r+2}{r+1}\right)}{(2^{r+1} N)^{2/m}}; \tag{19}$$

для усестороннього розтягу $Q \geq P \geq 0$, ($1 \leq \eta < \infty$, $1 \leq p < \infty$)

$$\langle p \rangle = 1 + \frac{\Gamma\left(\frac{2r+5}{2r+3}\right)}{\left(\frac{(r+3)2^r \eta^{r+2} N}{(r+2)\sqrt{\eta - 1}}\right)^{1/m}}, \qquad D(p) = \frac{\Gamma\left(\frac{2r+7}{2r+3}\right) - \Gamma^2\left(\frac{2r+5}{2r+3}\right)}{\left(\frac{(r+3)2^r \eta^{r+2} N}{(r+2)\sqrt{\eta - 1}}\right)^{2/m}}; \tag{20}$$

для стиску в осьовому і розтягу в бокових напрямках $P \leq 0, Q \geq 0$ ($-\infty < \eta \leq 0$, $-1/\eta \leq -p < \infty$)

$$\langle p \rangle = -\frac{1}{\eta} + \frac{\Gamma\left(\dfrac{2r+5}{2r+3}\right)}{\left(\dfrac{(r+3)2^r\,|\eta|^{r+2}\,N}{(r+2)\sqrt{|\eta|+1}}\right)^{1/m}}, \quad D(p) = \frac{\Gamma\left(\dfrac{2r+7}{2r+3}\right) - \Gamma^2\left(\dfrac{2r+5}{2r+3}\right)}{\left(\dfrac{(r+3)2^r\,|\eta|^{r+2}\,N}{(r+2)\sqrt{|\eta|+1}}\right)^{2/m}}. \quad (21)$$

Відповідно до виразів (14-17) на рис. 2 побудовано залежності ймовірності зруйнування P_f (за заданого навантаження $p = 1,4$) від кількості тріщин і виду напруженого стану.

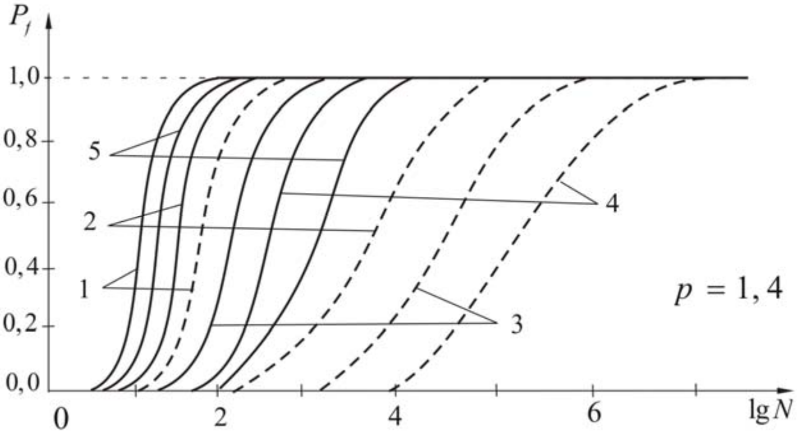

Рис. 2. Імовірність зруйнування (суцільні для $r = 5$, штрихові для $r = 10$) за різних видів напруженого стану (1 – однаковий усесторонній розтяг; 2 – двовісний розтяг; 3 – одновісний розтяг; 4 – розтяг у осьовому і рівний йому стиск у бокових напрямках; 5 – стиск у осьовому і рівний йому розтяг у бокових напрямках)

Відповідно до виразів (8), (18-21) на рис. 3-5 побудовано графіки статистичних характеристик руйнівного навантаження за різних видів напруженого стану для матеріалів з різною кількістю дефектів та різною неоднорідністю.

Висновки.

Як видно з рис. 2, величина P_f залежить від кількості N тріщин у заданому об'ємі тіла, від закону розподілу розміру тріщин (параметр r), рівня навантаження (p) і виду напруженого стану (від η). Імовірність зруйнування зростає зі збільшенням кількості тріщин (об'єму тіла). Кожній однорідності матеріалу і виду напруженого стану відповідає певний діапазон розмірів тіла, за якого спостерігається різка зміна величини P_f. За однакових умов імовірність зруйнування є найбільшою за однакового усестороннього розтягу і найменшою за розтягу в осьовому і рівному йому стиску в бокових напрямках.

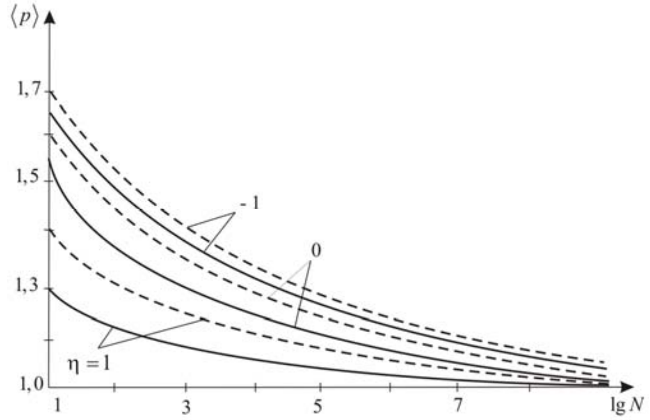

Рис. 3. Середнє значення руйнівного навантаження (суцільні для $r = 5$, штрихові для $r = 10$) за різних видів напруженого стану

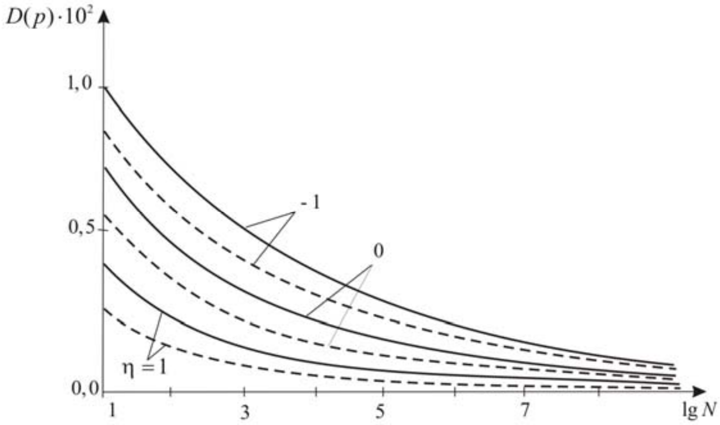

Рис. 4. Дисперсія руйнівного навантаження (суцільні для $r = 5$, штрихові для $r = 10$) за різних видів напруженого стану

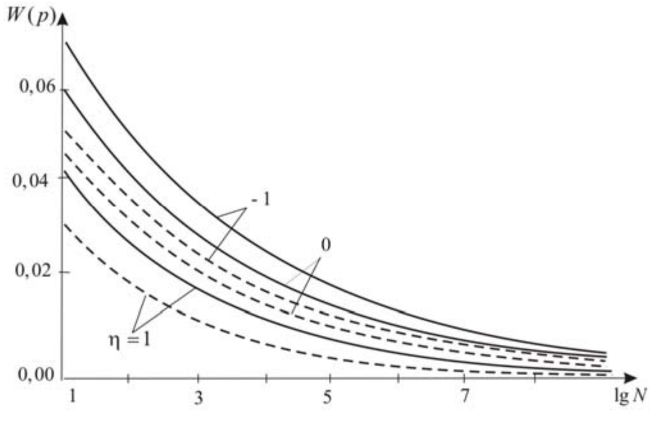

Рис. 5. Коефіцієнт варіації міцності (суцільні для $r = 5$, штрихові для $r = 10$) за різних видів напруженого стану

На рис. 3 бачимо впив кількості тріщин, виду навантаження та однорідності матеріалу на середнє значення руйнівного навантаження $\langle p \rangle$. Величина $\langle p \rangle$ збільшується зі збільшенням однорідності матеріалу. За однакових умов найменша міцність тіла буде за однакового усестороннього розтягу і найбільша за розтягу в осьовому і рівному йому стиску в бокових напрямках. Такі закономірності спостережені і у роботі [8]. Зі збільшенням кількості тріщин у тілі середнє значення міцності спадає, асимптотично наближаючись до свого мінімального значення і на певному діапазоні майже не залежить від кількості дефектів.

На рис. 4 показано залежність дисперсії руйнівного навантаження $D(p)$ від кількості тріщин, співвідношення навантаження та однорідності матеріалу. Дисперсія міцності є спадною функцією від кількості тріщин у тілі і характер цього спадання не залежить від однорідності матеріалу і виду навантаження. Найбільша інтенсивність зменшення величини $D(p)$ відбувається за розтягу в осьовому і рівному йому стиску в бокових напрямках. Зі зміною параметра r дисперсія міцності змінюється на величину, яка майже не залежить від виду напруженого стану. На певному діапазоні розмірів тіла, як і у випадку $\langle p \rangle$, існує певний діапазон розмірів тіла, для якого дисперсія міцності майже не залежить від кількості дефектів.

На рис. 5 досліджено залежність коефіцієнта варіації міцності $W(p)$ від кількості тріщин, однорідності матеріалу та виду напруженого стану. Величина $W(p)$ зменшується зі збільшенням параметра r та числа тріщин. На певному діапазоні розмірів спостерігаємо різке зменшення зміни величини $W(p)$ і асимптотичне наближення до нуля. Ці закономірності не залежать від виду напруженого стану. Проведені дослідження добре узгоджуються з результатами роботи [10].

Література

1. Strnadel B. Statistical scatter in the fracture toughness and charpy impact energy of perlitic steel / B. Strnadel, P. Hausild // Mater. Sci. and Eng.: A. – 2008. – Vol. 486, No 1-2. – P. 208-214.
2. Bazant Z.P. Statistical aspects of quasibrittle size effect and lifetime with consequences for safety and durability large structures / Z.P. Bazant, J.-L. Le, Q. Yu // Proc. of FraMCoS-7. – 2010. – P. 1-8.
3. Zsolt Bertalan. Fracture Strength: Stress concentration, extreme value statistics, and the fate of the Weibull distribution / Zsolt Bertalan, Ashivni Shekhawat, James P. Sethna, Stefano Zapperi // Phys. Rev. – 2014.– Vol. 2, Is.3. – P. 034008.
4. Heckmann K. Comparative analysis of deterministic and probabilistic fracture mechanical assessment tools / K. Heckmann, Q. Saifi // Kerntechnik. – 2016. – Vol. 81, No. 5. – P. 484-497.

5. Wen Luo. Fishnet statistics for probabilistic strength and scaling of nacreous imbricated lamellar materials / Wen Luo, Zdeněk P. Bažant // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 2017. – Vol. 109. – P. 264-287.
6. Витвицкий П.М. Прочность и критерии хрупкого разрушения стохастически дефектных тел / П.М. Витвицкий, С.Ю. Попина. – К.: Наукова думка, 1980. – 186 с.
7. Витвицький П.М. Визначення ймовірності руйнування при осессиметричному напруженому стані тіла з внутрішніми дископодібними тріщинами / П.М. Витвицький // Физ.-хим. механика материалов. – 1989. – №6. – С. 50-57.
8. Витвицький П.М. Імовірнісні критерії міцності для тіл зі стохастично розподіленими дископодібними тріщинами при осесиметричному напруженому стані / П.М. Витвицький, Р.І. Квіт // Физ.-хим. механика материалов. – 1990. – №3. – С. 53-58.
9. Weibull W.A. A statistical theory of the strength of materials / W.A. Weibull // Proc. Roy. Swed. Inst. Eng. Res. – 1939. – №151. – P. 5-45.
10. Matsuo Yotaro. A probabilistic analysis of the brittle fracture loci under biaxial stress state / Matsuo Yotaro // Bulletin of the JSME. – 1981. – 24, №188. – P. 290-294.

Стаття надійшла до редакційної колегії 26.06.2018 р.
*Рекомендовано до друку д.т.н., професором **Кузьом І.В.**,*
*д.ф.-м.н., професором **Сулимом Г.Т.***

ABOUT THE STRENGTH OF ISOTROPIC MATERIALS WITH SPATIAL STOCHASTIC DISTRIBUTION OF DEFECTS

R. I. Kvit
Lviv Polytechnic National University;
79013, Lviv, Stepan Bandera St., 12; e-mail: kvit_rom@ukr.net

The model of a stochastically defective body is considered, the strength study of which is based on the distribution function of failure loading in the form of the Weibull type. The body is under the conditions of a homogeneous axisymmetric loading and has evenly distributed disc-shaped cracks that do not interact with each other. The correlations for finding a number of fracture statistical characteristics are obtained: probability of failure, mean value, dispersion and variation coefficient of failure loading. The influence of applied loading type, the number of defects (body sizes) and material heterogeneity on the specified fracture statistical characteristics have been investigated.

Key words: *axisymmetric loading, disc-shaped crack, isotropic material, Weibull distribution, probability of failure, statistical characteristics of strength.*