

УДК 531.36

DOI: 10.31471/2304-7399-2020-1(59)-91-97

РІВНЯННЯ РУХУ МАХОВИКА В АМОРТИЗОВАНОМУ КАРДАННОМУ ПІДВІСІ ТА ЇХ АНАЛІЗ

І. В. Цідило, І. Р. Михайлюк

*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу;
76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
тел. +38(095) 303-14-56; e-mail: irinamihajluk@gmail.com*

У статті досліджується механічна транспортна система з маховичним двигуном, яка знаходить все ширше застосування в техніці, є екологічно чистим джерелом енергії, має високу питому потужність, а також є надійною і довговічною. Механічна система займає проміжне місце між гіроскопом і маховиком, що обертається в жорстко закріплених опорах. Для створення таких механічних систем необхідно провести ряд досліджень з вібростійкості, оцінити їх динамічні властивості і видати рекомендації для створення транспортних засобів з інерційними накопичувачами енергії. В роботі наведено формули для знаходження функції Релея, кінетичної та потенціальної енергії системи, враховано демпфування пружних елементів опор, а також отримано рівняння руху механічної системи. Проведено аналіз руху маховика і оцінено вплив нелінійних членів рівнянь на стійкість механічної системи. Визначено зміну частот руху маховика в залежності від параметрів механічної системи та оцінено її придатність для практичного використання. Отримані залежності зміни частот коливань від кутової швидкості маховика.

Встановлено, що зі збільшенням кутової швидкості маховика частота нутації зростає, а частота прецесії зменшується. З ростом жорсткості пружних елементів опор частота нутації також зростає, причому коливання маховика і параметри механічної системи є взаємопов'язаними.

Ключові слова: *маховичний двигун, гіроскоп, маховик, амортизатор, математична модель, рівняння руху, стійкість руху.*

1. Актуальність дослідження

Механічні транспортні системи з маховичним двигуном мають екологічно чисте джерело енергії, яке характеризується високою питомою потужністю, виділенням енергії безпосередньо у вигляді механічного обертання, а також швидкою зарядкою, надійністю та довговічністю. Дослідженням таких маховичних двигунів в різних областях машинобудування присвячені роботи Н.В. Гуліа [3], Г.Ю. Дзьоби [9], Н.А. Забавнікова [2] та ін. Вони знаходять все ширше застосування на тран-

спорті, нафтогазовій промисловості, при роботі у вибухонебезпечних кар'єрах, шахтах і т.д. Ведуться розробки нових транспортних засобів з гібридним приводом «двигун внутрішнього згорання – маховик», «електропривід – маховик».

Механічна система, що досліджується нами, займає проміжне місце між гіроскопом і маховиком, який обертається в жорстко закріплених опорах. Питаннями вібростійкості, динаміки роторних віброуючих гіроскопічних систем присвячені роботи багатьох вітчизняних і зарубіжних дослідників [8]. Стійкість їх руху є одним із основних показників при дослідженні динамічних властивостей систем з інерційним накопичувачем енергії [4]. Тому, актуальним завданням є розробка математичної моделі такої інерційної системи і оцінка їх придатності для практичного використання.

2. Рівняння руху маховика, встановленого на амортизаторах

Досліджується стійкість руху механічної системи, зображеної на рис. 1, яка є гіроскоп у карданному підвісі в корпусі приладу на амортизаторах. Механічна система складається з маховика 1, внутрішньої рамки 2, зовнішньої рамки 3, віброуючої основи 4, пружних елементів 5 (амортизатора), які займають проміжне положення між гіроскопом і маховиком.

Складемо рівняння руху механічної системи, проаналізуємо рух маховика і оцінимо вплив нелінійних членів рівняння на стійкість.

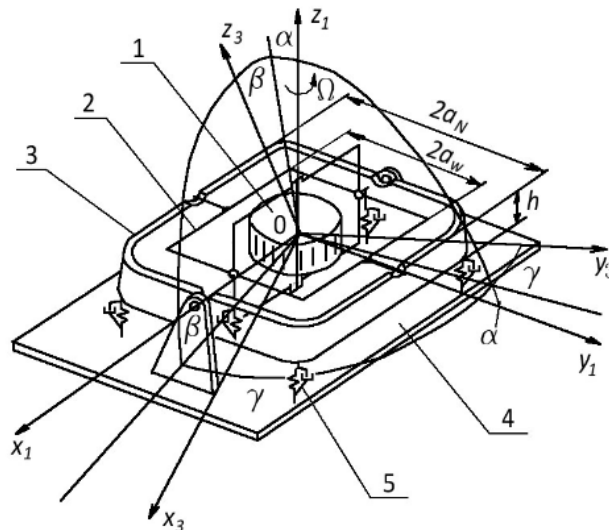


Рис.1 Схема розміщення маховика в кардановому підвісі на віброуючій основі

Для складання рівнянь руху маховика, встановленого на амортизаторах, введемо такі системи координат:

$Oxyz$ – жорстко зв'язана з основою; $Ox_iy_iz_i$ – жорстко зв'язана при $i=1$ з зовнішньою рамкою, при $i=2$ з внутрішньою рамкою, інерцією якої нех-

туємо, при $i=3$ з маховиком. Осі координат є головними центральними осями. Під час руху взаємне розміщення осей визначається трьома кардановими кутами α , β і γ , а рух основи задається кутовою швидкістю ω_x .

Кінетична енергія такої механічної системи [6] визначається за формулою:

$$2T = I_{x_1} \cdot \omega_{x_1}^2 + I_{x_3} \cdot \omega_{x_3}^2 + I_{y_3} \cdot \omega_{y_3}^2 + I_{z_3} \cdot \omega_{z_3}^2. \quad (1)$$

Моменти інерції маховика I_{x_3} , I_{y_3} , I_{z_3} приймаємо рівними $I_{x_3} = I_{y_3} = I_e$, $I_{z_3} = I$.

Проекції кутової швидкості на рухомі осі виражені через карданові кути та їх похідні мають вигляд:

$$\begin{aligned} \omega_{x_1} &= \omega_x + \dot{\alpha}; \\ \omega_{x_1} &= \omega_x \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma + \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \cdot \cos\gamma + \dot{\beta} \cdot \sin\gamma; \\ \omega_{y_3} &= -\omega_x \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma - \dot{\alpha} \cdot \cos\beta \cdot \sin\gamma + \dot{\beta} \cdot \cos\gamma; \\ \omega_{z_3} &= \omega_x \cdot \sin\beta + \dot{\alpha} \cdot \sin\beta + \dot{\gamma}. \end{aligned} \quad (2)$$

Кінетичну енергію системи, враховуючи (2), запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} 2T &= I_{x_1} (\dot{\alpha} + \omega_x)^2 + I_e \cdot (\dot{\alpha}^2 \cdot \cos^2\beta + 2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \omega_x \cdot \cos^2\beta + \\ &+ \omega_x^2 \cdot \cos^2\beta \cdot \sin^2\gamma + 2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \omega_x \cdot \sin^2\beta \cdot \cos\gamma + \\ &+ 2 \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\gamma} \cdot \sin\beta + \omega_x^2 \sin^2\beta + 2 \cdot \omega_x \cdot \dot{\gamma} \cdot \sin\beta + \dot{\gamma}^2). \end{aligned} \quad (3)$$

Розглядаємо елементи амортизаторів умовно показаних у вигляді пружини. При повороті маховика на кут α переміщення точки кріплення зовнішнього амортизатора до контура в проекції на вісь Oz буде дорівнювати:

$$S_{N_z} = h \cdot \left[\frac{\sin(\alpha_c + \alpha)}{\sin \alpha_c} - 1 \right], \quad (4)$$

де $\alpha_c = \arctg\left(\frac{h}{\alpha_N}\right)$; h ; α_N – координати точки кріплення амортизатора.

Переміщення точки кріплення внутрішнього амортизатора до внутрішньої рамки в проекції на вісь Oz , при повороті маховика на кут β , дорівнює:

$$S_{W_z} = a_W \cdot \sin\beta. \quad (5)$$

Потенціальна енергія пружної деформації елементів визначається за формулою:

$$\Pi = 2c_N h^2 \left[\frac{\sin(\alpha_c + \alpha)}{\sin \alpha_c} - 1 \right]^2 + c_W a_W^2 \sin^2\beta, \quad (6)$$

де c_N , c_W – жорсткості відповідно зовнішнього і внутрішнього пружних елементів, α_c , h , a_W – координати точок кріплення амортизатора.

Обмежимося функцією Релея, яка враховує демпфування пружних елементів:

$$\Phi = 2 \frac{b_N \cdot h^2}{\sin^2 \alpha_c} \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \cos^2(\alpha_c + \alpha) + b_W \cdot a_W^2 \cdot \dot{\beta}^2 \cdot \cos^2\beta, \quad (7)$$

де b_N , b_W – коефіцієнти демпфування відповідно зовнішнього і внутрішнього пружних елементів.

Нехай момент сил відносно осі обертання маховика такий, що маховик обертається відносно своєї осі з постійною швидкістю. Рівняння

Лагранжа другого роду з урахуванням виразів (3), (6), (7), а також того, що $\dot{\gamma} = \Omega$, отримаємо:

$$\begin{aligned} & (I \cdot \sin^2 \beta + I_e \cdot \cos^2 \beta + I_{x_1}) \cdot \ddot{\alpha} + (I - I_e) \cdot \dot{\alpha} \cdot \dot{\gamma} \cdot \sin 2\beta + I \cdot \Omega \cdot \dot{\beta} \cdot \cos \beta + \\ & + I_{x_1} \cdot \dot{\omega}_x + I_e \cdot \dot{\omega}_x \cdot \cos^2 \beta + (I - I_e) \cdot \dot{\beta} \cdot \omega_x \cdot \sin 2\beta + I \cdot \dot{\omega}_x \cdot \sin^2 \beta = \\ & = -\frac{4 \cdot c_N \cdot h^2}{\sin a_c} \left[\frac{\sin(a_c + a)}{\sin a_c} - 1 \right]^2 \cdot \cos(a_c + a) - \frac{4 \cdot b_N \cdot h^2}{\sin^2 a_c} \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos^2(a_c + a); \quad (8) \\ & I_e \cdot \ddot{\beta} - \frac{I - I_e}{2} \cdot \dot{\alpha}^2 \cdot \sin 2\beta - (I - I_e) \cdot \omega_x \cdot \sin 2\beta - \frac{I - I_e}{2} \cdot \omega_x^2 \cdot \sin 2\beta - \\ & - I \cdot \omega_x \cdot \Omega \cdot \cos \beta - I \cdot \dot{\alpha} \cdot \Omega \cdot \cos \beta = -c_W \cdot a_W^2 \cdot \sin 2\beta - 2 \cdot b_W \cdot a_W^2 \cdot \dot{\beta} \cdot \cos^2 \beta. \end{aligned}$$

Розкладемо тригонометричні функції в системі рівнянь (8) у степеневий ряд в околі точки нуль (обмежимося кубічними складовими) і запишемо систему у формі Коші, ввівши такі позначення:

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha; \quad x_2 = \dot{\alpha}; \quad x_3 = \beta; \quad x_4 = \dot{\beta} \\ \dot{x}_1 &= x_2; \\ \dot{x}_2 &= -\frac{4 \cdot c_N \cdot a_N^2}{I_e + I_{x_1}} \cdot x_1 - \frac{4 \cdot b_N \cdot a_N^2}{I_e + I_{x_1}} \cdot x_2 - \frac{I \cdot \Omega}{I_e + I_{x_1}} \cdot x_4 + \frac{6 \cdot c_N \cdot h \cdot \operatorname{ctg} \alpha_c}{I_e + I_{x_1}} \times \\ & \times x_1^2 + \frac{8 \cdot b_N \cdot h^2 \cdot \operatorname{ctg} \alpha_c}{I_e + I_{x_1}} \cdot x_1 \cdot x_2 + \frac{2 \cdot c_N \cdot h^2}{3 \cdot (I_e + I_{x_1})} \cdot (4 \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha_c - 3) \cdot x_1^3 + \\ & + \frac{4 \cdot b_N \cdot a_N}{I_e + I_{x_1}} \cdot x_2 \cdot x_2 + \frac{4 \cdot b_N \cdot h^2}{I_e + I_{x_1}} \cdot \left(\frac{I - I_{x_1}}{I_e + I_{x_1}} \cdot \operatorname{ctg}^2 \alpha_c + 1 \right) \cdot x_2 \cdot x_3 + \\ & + \frac{4 \cdot c_N \cdot a_N^2 \cdot (I - I_e)}{(I_e + I_{x_1})^2} \cdot x_1 \cdot x_3^2 + \frac{I \cdot \Omega}{I_e + I_{x_1}} \cdot \left(\frac{1}{2} + \frac{I - I_e}{I_e + I_{x_1}} \right) \cdot x_3^2 \cdot x_4 - \\ & - \dot{\omega}_x - \frac{2 \cdot (I - I_e)}{I_e + I_{x_1}} \cdot \omega_x \cdot x_3 \cdot x_4; \quad (9) \\ \dot{x}_3 &= x_4; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_4 &= \frac{-2 \cdot c_W \cdot a^2}{I_e} \cdot x_3 - \frac{2 \cdot b_W \cdot a_W^2}{I_e} \cdot x_4 + \frac{I \cdot \Omega}{I_e} \cdot x_2 + \frac{4 \cdot c_W \cdot a_W^2}{3 \cdot I_e} \cdot x_3^3 + \\ & + \frac{2 \cdot b_W \cdot a_W^2}{I_e} \cdot x_3^2 \cdot x_4 - \frac{I \cdot \Omega}{2 \cdot I_e} \cdot x_2 \cdot x_3^2 + \frac{I - I_e}{I_e} \cdot x_2^2 \cdot x_3 + \frac{I \cdot \Omega}{I_e} \cdot \omega_x + \\ & + \frac{I - I_e}{I_e} \cdot \omega_x^2 \cdot x_3 + \frac{2 \cdot (I - I_e)}{I_e} \cdot \omega_2 \cdot x_2 \cdot x_3 - \frac{I \cdot \Omega}{2 \cdot I_e} \cdot \omega_x \cdot x_3^2. \end{aligned}$$

Параметри системи (9) будуть безрозмірними, якщо ввести такі (позначені з ризику зверху) величини:

$$\begin{aligned} \bar{b}_N &= \frac{b_N \cdot a_N^2}{I \cdot \Omega}; \quad \bar{b}_W = \frac{b_W \cdot a_W^2}{I \cdot \Omega}; \quad \bar{c}_N = \frac{c_N \cdot a_N^2}{I \cdot \Omega}; \quad \bar{c}_W = \frac{c_W \cdot a_W^2}{I \cdot \Omega^2}; \quad (10) \\ \bar{a}_{I_e} &= \frac{I_e}{I}; \quad \bar{I}_{x_1} = \frac{I_{x_1}}{I}; \quad \bar{a}_W = \frac{a_W}{a_N}; \quad \bar{\Omega} = \frac{\Omega}{\Omega}; \quad \bar{a}_N = \frac{a_N}{a_N}; \quad \bar{I} = \frac{I}{I}. \end{aligned}$$

Систему рівнянь (9) можна представити в загальному вигляді:

$$\dot{x}^\sigma = a_k^\sigma \cdot x^k + X^\sigma(t, x), \quad k, \sigma = 1, \dots, 4. \quad (11)$$

3. Попередній аналіз руху механічної системи

Проаналізуємо зміну частот систем рівнянь (9) або (11) в залежності від зміни параметрів механічної системи.

Коливання маховика в амортизаторах є сильно взаємопов'язаними, про що свідчать складові в системі рівнянь (8) $I \cdot \Omega \cdot \dot{\beta} \cos \beta$ і $I \cdot \Omega \cdot \dot{\alpha} \cdot \cos \beta$. Цей зв'язок посилюється із збільшенням кутової швидкості Ω маховика і пояснюється тим, що осі зовнішньої і внутрішньої рамок лежать в одній площині.

Виділяючи із системи рівнянь (9) рівняння лінійного наближення, маємо два сильно зв'язаних осцилятори, на які діє збурення, викликане вібрацією основи.

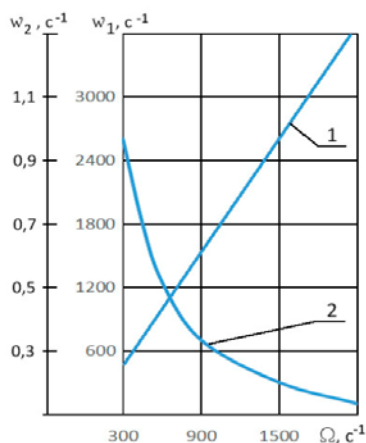
Для аналізу залежностей частот від параметрів Ω , c_N і c_W підставимо $c_N = c_W = c$, виключивши з рівнянь дисипативні члени. Частоти визначаються як корені бікватратного рівняння:

$$\lambda^4 = \lambda^2 \cdot (a_1^2 + a_3^4 + a_4^2 \cdot a_2^2) + a_1^2 \cdot a_3^4 = 0, \quad (12)$$

де a_k^i – додатні корені.

Із рівняння (12) і системи (9) видно, що коли маховик не обертається, тобто при $\Omega=0$, мають місце дві низькі частоти. Із збільшенням Ω коефіцієнти a_4^2 і a_2^2 в (12) збільшуються; одна частота із збільшенням Ω зростає, друга зменшується.

Можна вважати, згідно теорії К. Магнуса [7], швидкі коливання з частотою ω_1 – нутацією, а повільні з частотою ω_2 – прецесією. На рис. 2 побудовано графік зміни частот ω_1 і ω_2 зі збільшенням кутової швидкості Ω ротора при наступних величинах параметрів механічної системи:



$$\begin{aligned} I &= 450 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; I_e = 225 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \\ I_{x_1} &= 50 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; a_N = a_W = 0,5 \text{ м}; \\ h &= 0,2 \text{ м}; c_N = c_W = 2 \cdot 10^5 \text{ Н/м}; \\ b_N &= b_W = 500 \text{ Н/с}; \omega_x = 0,001 \text{ с}^{-1}. \end{aligned}$$

Рис. 2. Розрахункові залежності зміни частот ω_1 і ω_2 від кутової швидкості Ω

Висновки

Розв'язок системи нелінійних рівнянь (9) методом Боголюбова-Митропольського [1] дозволив встановити наступне:

1. При збільшенні кутової швидкості Ω маховика частота нутації ω_1 зростає (крива 1), а частота прецесії ω_2 зменшується (крива 2). З ростом жорсткості пружних елементів частота нутації також слабо зрос-

тає, а при монтуванні маховика в карданному підвісі без амортизаторів зменшується на малу величину.

2. Коливання гіроскопа в амортизаторах є взаємопов'язані, про що свідчать складові в системі рівнянь $I\Omega\dot{\beta}\cos\beta$ і $I\dot{\Omega}\cos\beta$, причому цей зв'язок посилюється із збільшенням кутової швидкості Ω і пояснюється тим, що осі зовнішньої і внутрішньої рамок лежать в одній площині.

Література

1. Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А., Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М.: Наука, 1974. – 504 с.
2. Герасимов А.Н., Забавніков Н. А., Иванов С.Ю., Корсунский В. А. Оценка эффективности вторичного подрессоривания маховика при колебаниях транспортного средства // Изв. высш. учебн. завед. – 1983, №8. – С. 105–108.
3. Гулиа Н.В. Маховичные двигатели. – М.: Машиностроение, 1986.– 170 с.
4. Збруцкий А.В., Гавриленко В.В., Стеценко Т.В. Измерение угловых переменных вибрационными гироскопами. Вісник Черкаського держ. техн. ун-ту. Спецвипуск, 2006. – С. 29 – 35.
5. Зубов В.И. Устойчивость движения. – М.: Высшая школа, 1973. – 277 с.
6. Кузьо І.В., Векерик В.І., Цідило І.В. та ін. Теоретична механіка: підручник для студ. вищ. навч. техн. закл. – Харків: Фоліо, 2017. – 780 с.
7. Мангус К. Гироскоп. Теория и применение. – М.: Мир, 1974. – 526 с.
8. Павловский М.А., Збруцкий А.В. Динамика роторных вибрационных гироскопов. – Киев: Высшая школа, 1984. – 191 с.
9. Хрисанов М. И., Дзюба Г.Ю. К вопросу исследования гироскопических явлений и некоторых параметров колебаний карьерных автомобилей с инерционным аккумулятором // Автомобильный транспорт. – Киев: Техника, 1983. – №20.

Стаття надійшла до редакційної колегії 01.10.2020 р.

EQUATION OF FLYWHEEL MOVEMENT IN AMORTIZED GIMBAL AND THEIR ANALYSIS

I. V. Tsidylo, I. R. Mykhaylyuk

Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;

15, str. Carpatska, Ivano-Frankivsk, 76019;

ph. +38(095) 303-14-56; e-mail: irinamuhajluk@gmail.com

The article examines the transport system with flywheel engine, which is increasingly used in technology. It is an ecologically clean energy source with a high specific power. It is reliable and durable.

The mechanical system occupies an intermediate place between the gyroscope and the flywheel, which rotates in rigidly fixed supports. It is ne-

cessary to conduct the row of researches on vibrofirmness for creation of such mechanical systems, to estimate them dynamic properties and to give out recommendations on creation of transport vehicles with the inertia stores of energy. Dependences of system kinetic and potential energy changes, Rayleigh function was brought by researchers. Damping of supports resilient elements was taken into account. Equalizations of the mechanical system motion were gotten. The analysis of fly-wheel motion was conducted and influence of equalizations nonlinear members on firmness of the mechanical system is conducted. The change of fly-wheel motion frequencies with depending on the parameters of the mechanical system was certain and its fitness for the practical use was appraised. Dependences of vibrations frequencies changes on the angulator of fly-wheel were gotten.

It was set that frequency of nutation at the increase of angulator of fly-wheel grows, and frequency of recession diminishes. Frequency of nutation with the increase of resilient elements inflexibility of supports grows also and the oscillations of the flywheel and the parameters of the mechanical system are interrelated

Key words: *flywheel engine, gyroscope, flywheel, shock absorber, mathematical model, equation of motion, stability of motion.*