

# Механіка

УДК 517.938

DOI: 10.31471/2304-7399-2020-1(59)-79-90

## БІФУРКАЦІЙНИЙ ПІДХІД ДО АНАЛІЗУ ДИВЕРГЕНТНОЇ ВТРАТИ СТІЙКОСТІ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ

**В. Г. Вербицький<sup>1</sup>, А. І. Безверхий<sup>1</sup>, І. Р. Михайлюк<sup>2</sup>, І. В. Цідило<sup>2</sup>**<sup>1</sup>Запорізький національний університет; м. Запоріжжя, пр. Соборний 226;  
тел. +38(061) 227-12-31; email: oxsidan@ukr.net<sup>2</sup>Івано-Франківський національний технічний університет нафти і  
газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;  
тел. +38(0342) 72-71-47; e-mail: mechtach@nung.edu.ua

*Представлено біфуркаційний підхід до аналізу дивергентної втрати стійкості тривіального розв'язку нелінійної динамічної системи. Показано, що біфуркаційна множина у критичному випадку одного нульового кореня локально збігається з дискримінантною множиною полінома третього степеня, який визначає множину стаціонарних станів системи в околі симетричного розв'язку системи. Цей підхід дає можливість отримати умови безпечної-небезпечної втрати стійкості симетричного розв'язку, що еквівалентні умовам М.М. Баутіна, з мінімально можливими обчислювальними витратами.*

**Ключові слова:** нелінійна динамічна система, дивергентна втрата стійкості, множина стаціонарних станів динамічної системи, біфуркація.

**Вступ.** Біфуркаційний підхід дозволяє отримати інтегральну характеристику стійкості усієї множини стаціонарних станів динамічної системи без попереднього знаходження самої множини стаціонарних станів моделі [7, 11, 12]. Такий висновок може здатися дещо несподіваним, проте відповідь лежить в самій природі дивергентної втрати стійкості стаціонарних режимів, а саме, він пов'язаний з фактом виникнення-зникнення кратних особливих точок (стаціонарних станів) динамічної системи при зміні деяких характерних параметрів [1, 2, 3, 4, 7, 10]. Тому при аналізі дивергентних біфуркацій системи визначальними є лише співвідношення між критичними значеннями параметрів, для

яких реалізуються кратні особливі точки (подібно до задачі визначення дискримінанта полінома, а не його коренів). Для реалізації цього підходу необхідно мати функцію, що визначає множину стаціонарних станів системи, наприклад, для потенціальної системи такою наперед відомою функцією є потенціал, або силова функції [10]. Для довільної динамічної системи таку функцію необхідно відшукати, що не завжди можливо. Але в роботі буде вказано на один з підходів, що дозволяє знайти поліноміальне наближення цієї функції для системи досить загального вигляду.

**Постановка проблеми.** Розглянемо динамічну систему, що має певну симетрію

$$\begin{aligned} dx/dt &= f(x, u), \quad x \in R^2, \quad f: R^2 \times R_+ \times R \rightarrow R^2, \\ u &= \{v, \theta\}, \quad v \in R_+, \quad \theta \in R, \quad f(-x, v, -\theta) = -f(x, v, \theta), \quad f(0, v, 0) = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Подібна симетрія характерна для моделей транспортних засобів, для яких властива еквівалентність правого-лівого поворотів. Тривіальний розв'язок для таких систем відповідає стаціонарному прямолінійному режиму. Будемо вважати, що при  $v = v^+$ ,  $\theta = 0$  відбувається дивергентна втрата стійкості тривіального розв'язку системи (1).

Стійкість нульового розв'язку при  $v = v^+$  (критичний випадок одного нульового кореня) визначається першим ненульовим ляпуновським коефіцієнтом  $g_3$  [8] (с. 216-222). Якщо  $g_3 < 0$ , симетричний розв'язок системи (1) асимптотично стійкий [8], а межа області стійкості в просторі параметрів є безпечною [3] (с. 229-231) – малі варіації параметрів системи, що призводять до перетину безпечної межі стійкості, породжують лише обмежене зростання фазових змінних в околі симетричного розв'язку. У випадку  $g_3 > 0$  симетричний розв'язок нестійкий, а межа області стійкості в просторі параметрів небезпечна – навіть малі варіації параметрів системи, що порушують нестійку межу стійкості в просторі параметрів, призводять до необмеженого зростання збурень фазових змінних в околі симетричного розв'язку. Причини цього механізму будуть пояснені на основі аналізу стаціонарних станів системи в околі симетричного розв'язку (дійсних біфуркацій стаціонарних станів).

**Основна частина.** Будемо вважати, що нуль є регулярним значенням правих частин системи (1) та, крім того, що вони можуть бути наближено представлені у вигляді

$$\begin{aligned} dx_1/dt &= ax_1 + bx_2 + a_{30}x_1^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3 + a_{50}x_1^5 + \dots, \\ dx_2/dt &= cx_1 + dx_2 + b_{30}x_1^3 + b_{21}x_1^2x_2 + b_{12}x_1x_2^2 + b_{03}x_2^3 + b_{50}x_1^5 + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Так як при  $v = v^+$ ,  $\theta = 0$  відбувається дивергентна втрата стійкості тривіального розв'язку (система лінійного наближення має одне нульо-

ве власне значення), принаймні певні коефіцієнти системи лінійного наближення залежать від параметрів  $v, \theta$ .

**Лема 1.** При критичних значеннях параметрів керування  $\{v = v^*, \theta = \theta^*\}$  «нульові» ізокліни системи (1) у відповідній точці фазової площини (особливій точці, в якій відбувається дивергентна втрата стійкості) мають точку дотику порядку не менше двох (порядок дотику 1 – відповідає простому перетину кривих) [4] (с. 30-32). Тобто, в цьому випадку реалізується кратна особлива точка.

**Доведення.** З умови дивергентної втрати стійкості стаціонарного режиму  $x_1 = x_1^*, x_2 = x_2^*, v = v^*, \theta = \theta^*$  - набір критичних параметрів) випливає, що вільний член відповідного характеристичного рівняння дорівнює нулю

$$\det \begin{pmatrix} \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x=x^*} & \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x=x^*} \\ \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x=x^*} & \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x=x^*} \end{pmatrix} = 0.$$

З чого випливає лема 1, бо

$$\text{grad}\{\left. \frac{\partial f_1}{\partial x_1} \right|_{x=x^*}, \left. \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right|_{x=x^*}\} \parallel \text{grad}\{\left. \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \right|_{x=x^*}, \left. \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right|_{x=x^*}\}.$$

Порядок дотику може бути визначений на основі аналізу кількості стаціонарних режимів системи в околі критичного набору параметрів керування.

**Приклад.** Реалізація дотику порядку три.

На рис. 1 проілюстровано процес злиття стаціонарних станів системи: при докритичному значенні параметра керування існувало три простих перетини (три прості особливі точки); при закритичному значенні параметра керування існує один простий перетин (одна проста особлива точка); критичному значенню параметра відповідає трикратна особлива точка.

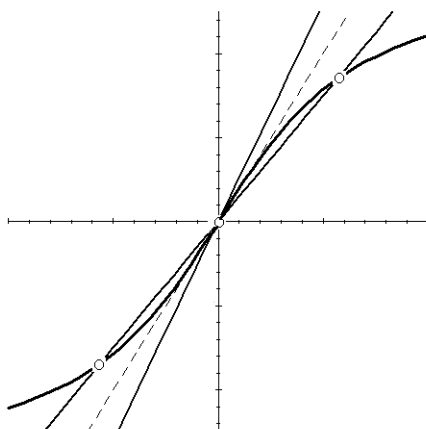


Рис.1. Ілюстрація біфуркації збірки (злиття особливих точок)

На рис. 2 проілюстровано процес народження пари стаціонарних станів системи: при докритичному значенні параметра керування існував один простий перетин (одна проста особлива точка); при закритичному значенні параметра керування існує три простих перетини (три прості особливі точки); критичному значенню параметра відповідає трикратна особлива точка.

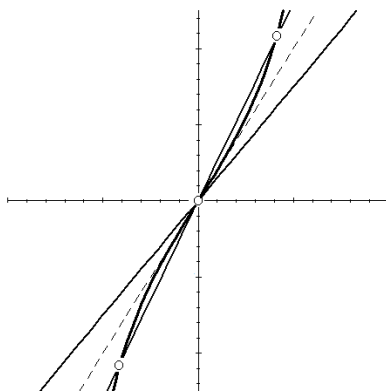


Рис. 2. Ілюстрація біфуркації збірки (народження особливих точок)

Біфуркації злиття і народження можуть бути представлені в символічному вигляді

$$O^{2,0} + (O_1^{1,1}, O_2^{1,1}) \Rightarrow O^{1,1}; \quad O^{2,0} \Rightarrow O^{1,1} + (O_1^{2,0}, O_2^{2,0}).$$

Тут перша цифра верхнього індексу особливої точки дорівнює числу коренів характеристичного рівняння з від'ємними дійсними частинами, друга – з додатними. Тоді індекс Пуанкаре  $j(O^{2,0})=1$ , а  $j(O^{1,1})=-1$ . Має місце «закон збереження» суми індексів Пуанкаре лівої і правої частин символічної рівності (до і після дійсної біфуркації) [1] (с. 338). Біфуркації згортки – злиття і народження двох особливих точок можуть бути представлені в символічному вигляді [1]

$$(O_1^{2,0} + O_2^{1,1}) \Rightarrow \emptyset; \quad \emptyset \Rightarrow (O_1^{2,0} + O_2^{1,1}).$$

Якщо при зміні параметрів керування зберігається ізольованість стаціонарного режиму (реалізується лише простий перетин ізоклін) індекс Пуанкаре залишається незмінним, що дозволяє опосередковано визначати індекс особливої точки; при додатковій умові, що стосується дивергенції векторного поля –  $\text{div}(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)) < 0$ , гарантовано зберігається і стан стійкості стаціонарного режиму.

**Теорема 1.** Біфуркаційна множина динамічної системи (1) в малому околі критичного набору параметрів керування  $v = v^+, \theta = 0$  задається дискримінантом визначального полінома третього степеня, а останній визначає множину стаціонарних станів в околі початку координат. Стан стійкості тривіального симетричного розв'язку системи (1) в критичному випадку та умови безпечної-небезпечної втрати стійкості

визначає знак коефіцієнта при старшому мономічному полінома (3)  
 $\gamma = \gamma(v^+, \theta^+)$

$$\gamma x_2^3 + \beta x_2 + \alpha = 0, \quad \gamma = \gamma(v, \theta), \quad \beta = \beta(v), \quad \alpha = \alpha(\theta). \quad (3)$$

**Доведення.** Розглянемо систему(4), що визначає множину стаціонарних станів системи (1) з точністю до третього порядку малості в околі початку координат

$$\begin{aligned} ax_1 + bx_2 + a_{30}x_1^3 + a_{21}x_1^2x_2 + a_{12}x_1x_2^2 + a_{03}x_2^3 &= 0; \\ cx_1 + dx_2 + b_{30}x_1^3 + b_{21}x_1^2x_2 + b_{12}x_1x_2^2 + b_{03}x_2^3 &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Розв'яжемо перше рівняння відносно  $x_1$  та підставимо в друге рівняння, враховуючи члени лише до третього порядку

$$x_1 = -b/a x_2 + (a_{30}b^3 - a_{21}ab^2 + a_{12}a^2b - a_{03}a^3) / a^4 x_2^3 + \dots;$$

$$\beta = (c - da/b);$$

$$\gamma = [b^3(ab_{03} - ca_{30}) + ab^2(ca_{21} - ab_{21}) + a^2b(ab_{12} - ca_{12}) + a^3(ca_{03} - ab_{03})] / a^4.$$

Коефіцієнт  $\gamma(v^+, \theta^+)$  з точністю до множника співпадає з першим ляпуновським коефіцієнтом  $g_3$ .

При критичному значенні параметрів керування  $v = v^+, \theta = \theta^+$ :  
 $\beta(v^+) = 0, \alpha = 0$ . При докритичному значенні параметрів  
 $v = v^+ - \varepsilon, \theta = \theta^+$  рівняння (3) має вигляд

$$\gamma(v^+ - \varepsilon)x_2^3 + \beta(v^+ - \varepsilon)x_2 = 0,$$

при закритичному значенні  $v = v^+ + \varepsilon, \theta = \theta^+$

$$\gamma(v^+ + \varepsilon)x_2^3 + \beta(v^+ + \varepsilon)x_2 = 0.$$

При умові, що  $\gamma(v^+, \theta^+) \neq 0$  і достатньо малих  $\varepsilon$  будемо мати  
 $\gamma(v^+ - \varepsilon) \cdot \gamma(v^+ + \varepsilon) > 0$ , а  $\beta(v^+ + \varepsilon) \cdot \beta(v^+ - \varepsilon) < 0$ . Це дає можливість стверджувати, що при  $v = v^+, \theta = \theta^+$  відбувається біфуркація збірки (реалізується трикратний стаціонарний режим) – в залежності від співвідношення знаків коефіцієнтів  $\gamma(v^+)$  та  $\beta(v^+ - \varepsilon)$ :

-  $\gamma(v^+) \cdot \beta(v^+ - \varepsilon) < 0$  – має місце злиття особливих точок у початку координат (рис. 1);

-  $\gamma(v^+) \cdot \beta(v^+ - \varepsilon) > 0 \Rightarrow \gamma(v^+) \cdot \beta(v^+ + \varepsilon) < 0$  – має місце народження пари стаціонарних станів у початку координат (рис. 2).

Використовуючи інформацію про стан стійкості симетричного розв'язку ( $v < v^+, \theta = 0$  – стійкість (вузол);  $v > v^+, \theta = 0$  – нестійкість (сідло)) можна стверджувати: у випадку біфуркації злиття ( $\gamma(v^+) \cdot \beta(v^+ - \varepsilon) < 0$ ) в початок координат приходить пара сідлових осо-

бливих точок – відповідна символічна реакція  $O^{2,0} + (O_1^{1,1}, O_2^{1,1}) \Rightarrow O^{1,1}$ ; у випадку біфуркації народження ( $\gamma(v^+) \cdot \beta(v^+ - \varepsilon) > 0$ ) з симетричного розв'язку (початок координат) виходить пара особливих точок з індексом Пуанкаре +1 – символічна реакція

$$O^{2,0} \Rightarrow O^{1,1} + (O_1^{2,0}, O_2^{2,0}).$$

Біфуркації злиття відповідає нестійкість в критичному випадку і небезпечна втрата стійкості в сенсі М.М. Баутіна [3] (при докритичній швидкості  $v = v^+ - \varepsilon$  пара сідлових особливих точок звужують басейн притягання симетричного розв'язку, а при  $v = v^+ + \varepsilon$  симетричному розв'язку відповідає ізольоване «сідло», тому збурення фазових змінних зростають необмежено). Біфуркації народження відповідає стійкість в критичному випадку і безпечна втрата стійкості в сенсі М.М. Баутіна (при докритичній швидкості  $v = v^+ - \varepsilon$  симетричному розв'язку відповідає ізольований стійкий «вузол», а при закритичній швидкості  $v = v^+ + \varepsilon$  – в малому околі «сідла» знаходяться дві стійкі особливі точки, які обмежують зростання збурень фазових змінних).

Локально біфуркаційна множина є напівкубічною параболою (дискримінант кубічного рівняння) з точкою загострення (каспом) в точці  $v = v^+, \theta = 0$ , при небезпечній втраті стійкості (біфуркація злиття) графік дискримінантної множини розташований нижче її вершини (додаткові сідлові стаціонарні режими існують при  $v < v^+$ ); при безпечній втраті стійкості (біфуркація народження) графік дискримінантної множини розташований вище її вершини (в цьому випадку критична швидкість кругових стаціонарних режимів більша ніж критична швидкість прямолінійного режиму).

**Практична реалізація.** Особливості реалізації цього узагальненого підходу та можливості побудови повної картини біфуркаційної множини будуть проілюстровані на прикладі моделі двовісного колісного екіпажа.

Розглянемо одномасову «велосипедну» модель екіпажа із закріпленням рульовим управлінням [5, 7, 9, 11, 12]. Розрахункова схема такої моделі представлена на рис. 3.

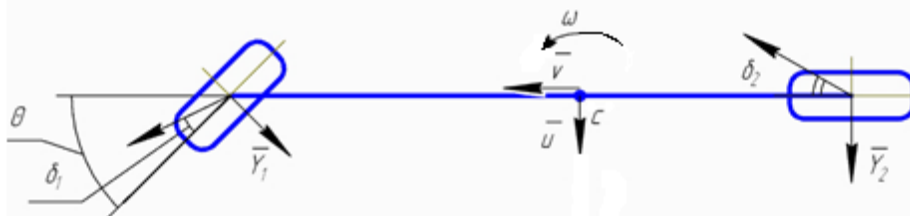


Рис. 3. Розрахункова схема екіпажа

Рівняння руху моделі мають вигляд [5,7]:

$$\begin{aligned} m(\dot{u} + V\omega) &= Y_1(\delta_1) + Y_2(\delta_2); \\ J\dot{\omega} &= a \cdot Y_1(\delta_1) - b \cdot Y_2(\delta_2). \end{aligned} \quad (5)$$

де  $Y_1, Y_2$  – нелінійні характеристики сил відведення;

Кути відведення на осях визначаються співвідношеннями:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \theta - \frac{u + a\omega}{V}; \\ \delta_2 &= \frac{-u + b\omega}{V}. \end{aligned} \quad (6)$$

Далі для полегшення необхідних перетворень знадобиться введення безрозмірних величин :

$$\begin{aligned} Y_i &= \bar{Y}_i N_i; \\ N_1 &= \frac{mgb}{l}; \quad N_2 = \frac{mga}{l}. \end{aligned} \quad (7)$$

Система, що визначає множину стаціонарних станів моделі екіпажа

$$\frac{V\omega}{g} = \bar{Y}_1 \frac{b}{l} + \bar{Y}_2 \frac{a}{l} \quad (8)$$

$$\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2 = 0.$$

може бути зведена до одного визначального рівняння. Дійсно, на підставі другого рівняння системи (8), введемо новий незалежний аргумент

$$\bar{Y}_1 = \bar{Y}_2 = \bar{Y},$$

через який будуть визначатися кути відведення на осях:  $\delta_1 = G_1(\bar{Y}), \delta_2 = G_2(\bar{Y})$ , де  $\delta_i = G_i(\bar{Y})$  – функції обернені до функцій  $\bar{Y}_i = \bar{Y}_i(\delta_i)$ . Враховуючи співвідношення, що випливає із визначення кутів відведення

$$\omega = \frac{V(\theta + \delta_2 - \delta_1)}{l},$$

з першого рівняння системи (8) отримаємо одне визначальне рівняння:

$$\frac{V^2}{gl}(\theta + \delta_2 - \delta_1) = \bar{Y}; \quad (9)$$

$$G(\bar{Y}) = gl/V^2 \cdot \bar{Y} - \theta, \quad (10)$$

де функція  $G(\bar{Y}) = G_2(\bar{Y}) - G_1(\bar{Y})$ .

Далі будемо вважати, що сили відведення визначаються співвідношеннями, де  $k_i$  – безрозмірні коефіцієнти відведення

$$\bar{Y}_i = k_i \cdot \delta_i / (1 + (k_i \cdot \delta_i / \varphi_i)^2)^{1/2}, \quad \bar{Y}_i \approx k_i \cdot \delta_i - 1/2 \cdot (k_i \cdot \delta_i)^3 / \varphi_i^2.$$

Визначальне рівняння (10) дає можливість найкоротшим шляхом одержати умови безпечної-небезпечної втрати стійкості стаціонарного прямолінійного режиму. Дійсно, його кубічне наближення задає шуканий визначальний поліном (3)

$$[1/(2 \cdot k_2 \cdot \varphi_2^2) - 1/(2 \cdot k_1 \cdot \varphi_1^2)] \cdot \bar{Y}^3 + (-g \cdot l / V^2 + 1/k_2 - 1/k_1) \cdot \bar{Y} + \theta = 0, \quad (11)$$

де  $\gamma = 1/(2 \cdot k_2 \cdot \varphi_2^2) - 1/(2 \cdot k_1 \cdot \varphi_1^2)$ ,  $\beta(V) = -g \cdot l / V^2 + 1/k_2 - 1/k_1$ ,  $\alpha = \theta$ .

Геометричне місце точок на площині параметрів  $(V, \theta)$ , в яких дискримінант кубічного рівняння (7) обертається в нуль (напівкубічна парабола), розмежовує області з різною кількістю стаціонарних станів, тобто є границею дивергентної втрати стійкості в просторі параметрів системи. Координати точки загострення визначаються з умов реалізації трикратного нульового режиму  $\beta(V^+) = 0$ ,  $\alpha(\theta^+) = 0$  (біфуркація збірки)

$$(V^+ = (\frac{k_1 \cdot k_2 \cdot g \cdot l}{k_1 - k_2})^{1/2}, \theta^+ = 0). \quad (12)$$

Отриманий вираз критичної швидкості  $V^+$ , співпадає з виразом критичної швидкості прямолінійного руху, який визначається з системи лінійного наближення моделі екіпажа.

Регулярним точкам дискримінантної множини  $(V^*, \theta^*)$  відповідають двократні стаціонарні режими (реалізація біфуркації згортки), вони утворюють границю дивергентної втрати стійкості кругових стаціонарних режимів (наприклад, при заданій швидкості  $V$  можна визначити максимальне значення кута повороту керованого модуля, який би забезпечував стійкість кругового стаціонарного руху).

**Умови стійкості в критичному випадку** (умови безпечної-небезпечної втрати стійкості в сенсі М.М. Баутіна). Перепишемо визначальний поліном (7), враховуючи вираз для критичної швидкості прямолінійного руху  $V^+$

$$(\frac{1}{2 \cdot k_2 \cdot \varphi_2^2} - \frac{1}{2 \cdot k_1 \cdot \varphi_1^2}) \cdot \bar{Y}^3 + \frac{k_1 - k_2}{k_1 \cdot k_2} \cdot [1 - (V^+ / V)^2] \cdot \bar{Y} + \theta = 0;$$

$$\bar{Y}^3 + p \cdot [1 - (V^+ / V)^2] \cdot \bar{Y} + \theta \cdot q = 0 \Rightarrow p^3 \cdot [1 - (V^+ / V)^2]^3 / 27 + \theta^2 \cdot q^2 / 4 = 0.$$

Знак коефіцієнта  $p$  співпадає зі знаком  $\gamma(v^+)$  ( $k_1 - k_2 > 0$  – умова існування критичної швидкості), тому: при  $\gamma(v^+) > 0$  в системі реалізується три стаціонарні режими при  $V < V^+$  ( $\gamma(v^+) \cdot \beta(v^+ - \varepsilon) < 0$  – має місце злиття особливих точок на початку координат) і як наслідок – нестійкість симетричного розв'язку в критичному випадку і небезпечна втрата стійкості в сенсі М.М. Баутіна [3]; при  $\gamma(v^+) < 0$  в системі реалізується три стаціонарні режими при  $V > V^+$  ( $\gamma(v^+) \cdot \beta(v^+ - \varepsilon) > 0 \Rightarrow \gamma(v^+) \cdot \beta(v^+ + \varepsilon) < 0$  – має місце народження пари стаціонарних станів на початку координат) – стійкість симетричного розв'язку в критичному випадку і безпечна втрата стійкості в сенсі М.М. Баутіна.



Таким чином для моделі екіпажа умови небезпечної втрати стійкості  $\gamma(v^+) > 0$

$$k_1 - k_2 > 0; \quad (13)$$

$$k_1 \cdot \varphi_1^2 > k_2 \cdot \varphi_2^2,$$

умови безпечна втрата стійкості  $\gamma(v^+) < 0$

$$k_1 - k_2 > 0; \quad (14)$$

$$k_1 \cdot \varphi_1^2 < k_2 \cdot \varphi_2^2.$$

Якщо використовувати загальний підхід, який був представлений у вигляді теореми 1, визначальний поліном буде дещо відрізнятись від розглянутого вище (7), але кінцеві умови безпечної-небезпечної втрати стійкості залишаються незмінними

$$\frac{V^2}{g \cdot l} \cdot \left[ \left( \frac{1}{k_1} + \frac{g \cdot l}{V^2} \right) K_2 - K_1 \cdot k_2^3 / k_1^4 \right] \cdot \bar{Y}^3 + \frac{V^2 \cdot (k_1 - k_2)}{k_1 \cdot g \cdot l} \cdot \left( 1 - \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot g \cdot l}{V^2 \cdot (k_1 - k_2)} \right) \cdot \bar{Y} + \frac{V^2}{g \cdot l} \theta = 0,$$

де  $K_i = 1/2 \cdot k_i^3 / \varphi_i^2$ .

Дійсно, наведений вище поліном можна привести до наступного вигляду

$$k_2^3 \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot k_2 \cdot \varphi_2^2} - \frac{1}{2 \cdot k_1 \cdot \varphi_1^2} \right) \cdot \bar{Y}^3 + \frac{(k_1 - k_2)}{k_1} \cdot [1 - (V^+ / V)^2] \cdot \bar{Y} + \theta = 0, \quad (15)$$

$$\gamma(V^+) = k_2^3 \cdot \left( \frac{1}{2 \cdot k_2 \cdot \varphi_2^2} - \frac{1}{2 \cdot k_1 \cdot \varphi_1^2} \right),$$

що підтверджує висновок про незмінність умов безпечної-небезпечної втрати стійкості для цих двох підходів.

**Побудова повної біфуркаційної множини для моделі екіпажа системи.** З геометричної інтерпретації рівняння (10) випливає, що кратним розв'язкам визначального рівняння відповідають параметри  $V^*, \theta^*$ , при яких пряма  $gl/V^2 \cdot \bar{Y} - \theta$  в правій частині (10) дотична до кривої  $G(\bar{Y}) = G_2(\bar{Y}) - G_1(\bar{Y})$ . У параметричній формі шукана біфуркаційна множина задається системою (16)

$$gl/V^2 = G'(\bar{Y}); \quad (16)$$

$$\theta = G'(\bar{Y}) \cdot \bar{Y} - G(\bar{Y}).$$

На рис. 4 проілюстровано розбіжності між біфуркаційними множинами моделі екіпажа, які були отримані: на основі дискримінантів визначальних поліномів (співпадаючі між собою криві – пунктирна крива відповідає поліному (11), а дискретна – з маркером “cross” представляє дискримінантну множину полінома (15), який отримано на основі узагальненого підходу, наведеного в теоремі 1); неперервна крива відповідає точному визначальному рівнянню, побудована на основі параметрично заданої множини (16).

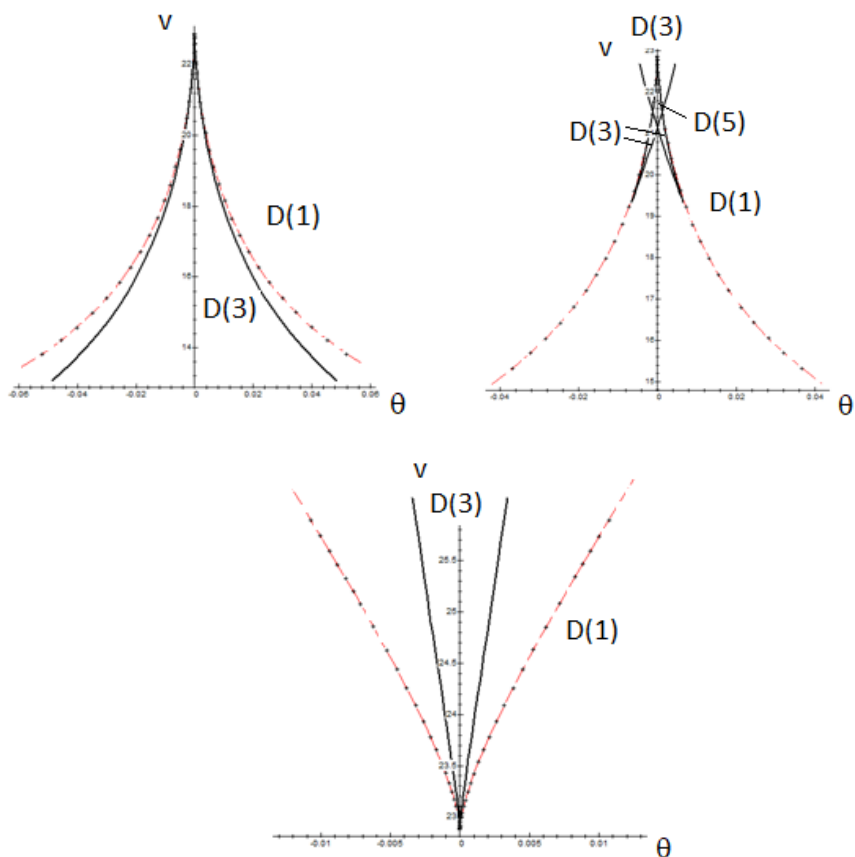


Рис. 4. Біфуркаційна множина моделі екіпажа в площині параметрів

Чисельні розрахунки виконано для наступного набору конструктивних параметрів екіпажа:  $m = 2717 \text{ кг}$ ,  $a = 1,34 \text{ м}$ ,  $b = 1,5 \text{ м}$ ,  $k_1 = 177200 \text{ Н/рад}$ ,  $k_2 = 103500 \text{ Н/рад}$ ,  $\varphi_1 = 0,6..0,8$ ;  $\varphi_2 = 0,8$ .

Точкам площини параметрів з області D(1) відповідають лише нестійкі стаціонарні режими при  $k_1 \cdot \varphi_1^2 > k_2 \cdot \varphi_2^2$ , або лише стійкі при  $k_1 \cdot \varphi_1^2 < k_2 \cdot \varphi_2^2$ . Стійкий стаціонарний режим, що відповідає набору параметрів з області D(1), D(3), D(5) при неперервній зміні параметрів управління залишається стійким, доки точка в площині параметрів керування не перетне біфуркаційну криву. При варіації третього параметра  $\varphi_1$  конфігурація **повної** біфуркаційної множини значно ускладнюється, так при  $k_1 \cdot \varphi_1^2 = k_2 \cdot \varphi_2^2$  реалізується п'ятикратна особлива точка на початку координат D(5). Відповідна біфуркація «метелик» розмежує небезпечну та безпечну границю втрати стійкості в просторі параметрів системи, та пояснює механізм зміни умов безпечної-небезпечної втрати стійкості симетричного розв'язку при  $\gamma(v^+) = 0$ . Але для того щоб цей механізм відображався на основі узагальненого підходу – визначальний поліном має бути п'ятого степеня.

Зазначимо, що в роботі [6] біфуркаційні множини нелінійної моделі колісного екіпажа були отримані на основі чисельного метода продовження по двом параметрам, що не дозволило з'ясувати важливі аспекти, пов'язані з перебудовою цих множин та визначенням умов безпечної-небезпечної втрати стійкості симетричного розв'язку.

**Висновки.** У випадку дивергентної втрати стійкості тривіального розв'язку динамічної системи з невикористаною лінійною частиною (критичний випадок одного нульового кореня) наведено конструктивний підхід побудови біфуркаційної множини (критичної множини параметрів) в малому околі критичного набору параметрів керування, якому відповідає дивергентна втрата стійкості тривіального розв'язку системи. Біфуркаційна множина задається дискримінантом полінома третього степеня, де останній визначає множину стаціонарних станів системи в околі початку координат.

Стан стійкості (стійкий-нестійкий) симетричного розв'язку системи в критичному випадку та умови безпечної-небезпечної втрати стійкості пов'язані з біфуркаціями народження-злиття стаціонарних станів в околі симетричного розв'язку; реалізація того чи іншого типу біфуркацій залежить від співвідношення знаків двох старших коефіцієнтів визначального полінома третього степеня (знаки коефіцієнтів визначаються в околі критичних значень параметрів керування).

На прикладі модельної динамічної системи реалізується запропонований алгоритм побудови біфуркаційної множини, пояснюється механізм зміни умов безпечної-небезпечної втрати стійкості симетричного розв'язку у випадку додаткового виродження системи (обернення в нуль коефіцієнта при старшому мономі).

### *Література*

1. Andronov, A.A., Vitt, A.A. & Khaikin S.E., Theory of Oscillators. Pergamon Press, 1966, p. 815.
2. Arnold, V. I. Catastrophe Theory. Moscow: Nauka, 1990, p. 128.
3. Bautin N.N., Leontovich E.A. Methods and techniques for qualitative research of dynamic systems on a plane. – M.: Science, 1990. – 488 p.
4. Bruce, J., Giblin, P. Curves and Singularities. Moscow: Mir, 1988, p. 262.
5. Ellis J. R. Vehicle Dynamics. – Mashinostroenie, Moscow, 1975. – 216 с. (Russian translation).
6. Fabio Della Rossaa, Giampiero Mastinub, Carlo Piccardia (2012) Bifurcation analysis of an automobile model negotiating a curve. Vehicle System Dynamics Vol. 50, No. 10, pp.1539-1562.
7. Kwatny H.G., Chang B.C., Wang SP. (2003) Static Bifurcation in Mechanical Control Systems. In: Chen G., Hill D.J., Yu X. (eds) Bifurcation Control. Lecture Notes in Control and Information Science, vol 293. Springer, Berlin, Heidelberg, pp. 67–81.

8. Lyapunov A.M. The general problem of the stability of motion: Translated and Edited by A. T. Fuller. Taylor and Francis, 1992
9. Ono, E., Hosoe S., Tuan H. D. & Doi, S. [1998] \ Bifurcation in vehicle dynamics and robust front wheel steering control," IEEE Trans. Contr. Syst.
10. Poston, T., Stewart, I. Catastrophe Theory And Its Applications. Moscow: Mir, 1980, p. 607.
11. Verbitskii, V. G., Lobas, L. G. (1994). Bifurcations of steady states in systems with rolling under constant force perturbations. Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1994, № 58(5), pp. 933-939.
12. Verbitskij, V.F., Lobas, L.G. (1996). Nonlinear stability and bifurcation sets of the stationary states of wheel robots under control parameters change, Problemy Upravleniya I Informatiki (Avtomatika), № 3, pp. 35-51.  
*Стаття надійшла до редакційної колегії 30.10.2020 р.*

### **BIFURCATION APPROACH TO ANALYSIS OF DIVERGENT LOSS STABILITY OF NONLINEAR DYNAMIC SYSTEM**

**V. G. Verbytsky<sup>1</sup>, A. I. Bezverkhy<sup>1</sup>, I. R. Mykhaylyuk<sup>2</sup>, I. V. Tsidylo<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Zaporizhzhya National University; 226, Soborniy avenue, Zaporizhzhia;  
ph. +380 (61) 227-12-31; email: oxsidan@ukr.net

<sup>2</sup>Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;  
15, str. Carpatska, Ivano-Frankivsk, 76019;  
ph. +38(0342) 72-71-47; e-mail: mechmach@nung.edu.ua

*A bifurcation approach to analysis of divergent loss of stability of a trivial solution of a nonlinear dynamical system is presented. It is shown that the bifurcation set in the critical case of one zero root locally coincides with the discriminant set of a third-degree polynomial, which defines the set of stationary states of the system in neighborhood of symmetric solution of the system. This approach makes it possible to obtain conditions for safe-dangerous loss of stability of the symmetric solution, which are equivalent to the conditions of M. M. Bautin with minimum possible computational costs.*

**Key words:** *nonlinear dynamical system, divergent loss of stability, set of stationary states of dynamical system, bifurcation.*