УДК 330.46
DOI: 10.31471/2304-7399-2020-1(59)-66-71

ОПТИМАЛЬНІ КОНТРАКТИ У БАГАТОЦІЛЬОВІЙ ЗАДАЧІ

І. В. Никифорчин
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; 76018, м. Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
тел. +38(0342)59-60-47, e-mail: iryna.nykyforchyn@pnu

У роботі доповнено відому модель багатозадачної моделі стосунків принципала-агента вимогою, що винагорода виплачується тільки, якщо по кожному виду роботи досягнуто деякого мінімального показника (“порога”). Знайдено і проаналізовано формули для очікуваної корисності агента і запропоновано метод пошуку його оптимальної поведінки залежно від параметрів функції винагороди.

Ключові слова: *теорія контрактів, багатозадачна проблема, функція корисності.*

Вступ

Теорія контрактів займається математичним моделюванням стосунків між сторонами, які доручають роботу і беруться за неї (принципалами і агентами у термінології цієї теорії), в умовах неповної інформації та суперечливих інтересів [7]. Основною проблемою цієї теорії є побудова *оптимальних контрактів* [8] – таких пропозицій від принципала агентам, за яких очікувана корисність принципала буде максимальною.

Важливий, але недостатньо вивчений розділ цієї теорії присвячений контрактам, у яких йдеться про кілька видів роботи [3, 5]. Стимулювання агента, при якому він розподіляє зусилля ефективно і бажаним для принципала чином, є досить складною проблемою [6].

Запропонований у статті матеріал є будівельним блоком, який буде використано при дослідженні оптимальних контрактів певного виду між принципалом та агентом, якому доручено роботу кількох видів. Першим кроком повинне стати дослідження того, яку поведінку обере агент залежно від запропонованої функції винагороди. Водночас розглянута оптимізаційна задача становить і самостійну цінність.

1. Опис моделі

Розглянемо агента, який може паралельно виконувати кілька видів роботи, у нашій статті ми обмежимося двома. Ми розвиваємо розглянуту у [2] модель і вважаємо, що рішення агента полягає у виборі розподілу (n_1, n_2), де n_1, n_2 – невід'ємні цілі числа, які відповідно є кількостями “спроб” виконати відповідні роботи. У кожній з незалежних спроб можливий успіх з ймовірністю $p_i \in (0,1)$ і невдача з ймовірністю $q_i = 1 - p_i$. Результат роботи – це двовимірна випадкова величина (y_1, y_2), де y_i – кількість успіхів у виконанні i-ої роботи. Зауважимо, що для багатьох видів роботи сумарна кількість успіхів може мати досить складний розподіл [4].

Винагорода агента з боку принципала визначається наперед оголошеною агентові формулою (у якій $a_0, a_1, a_2 \geq 0$):

$$p(y_1, y_2) = \begin{cases} a_0 + a_1(y_1 - m_1) + a_2(y_2 - m_2), & \text{якщо } y_1 \geq m_1 \ і\ y_1 \geq m_2; \\ 0, & \text{якщо } y_1 < m_1\ і\ y_1 < m_2. \end{cases}$$

Отже, відмінність від дослідженої у [2] моделі полягає у тому, що принципал вимагає від агента успішного виконання принаймні m_1 спроб роботи 1 і принаймні m_2 спроб роботи 2, інакше винагорода не виплачується. За умови виконання цих вимог винагорода є лінійною (точніше, афінною) функцією від результату, у якій ваги різних видів роботи можуть бути різними – у цьому теж відмінність [2].

Витрати агента визначаються загальною кількістю n_1+n_2 виконаних спроб. Відповідно корисність агента рівна $U = p(y_1, y_2) - n_1 - n_2$. Ми вважаємо, що агент нейтральний до ризику і прагне максимізувати очікувану корисність.

2. Аналіз моделі

Обчислимо математичне сподівання винагороди. Зрозуміло, що кількість успіхів у серії незалежних випробувань має біноміальний розподіл [1]. Надалі скрізь $i = 1,2$. Позначимо:

$$a_+ = \begin{cases} a, & a \geq 0, \\ 0 & a < 0, \end{cases}$$

$$P_i(k, n) = P(y_i = k|\ \text{при } n \text{ спробах}) = C_n^k p_i^k q_i^{n-k},$$

$$P_i^+(k, n) = P(y_i \geq k|\ \text{при } n \text{ спробах}) = \sum\nolimits_{k \leq i \leq n} P_i(i, n),$$

$$E_i^+(k, n) = E((y_i - k)_+|\ \text{при } n \text{ спробах}) = \sum\nolimits_{k < i \leq n} P_i^+(i, n).$$

Зауважимо, що з

$$P_i(k, n+1) = P_i(k, n)p_1 + P_i(k, n)q_1$$

випливає:

$$P_i(k, n+1) - P_i(k, n) = p_i(P_i(k-1, n) - P_i(k, n)),$$

$$P_i^+(k, n+1) = P_i^+(k, n) = p_i P_i(k-1, n),$$

$$E_i^+(k, n+1) = P_i^+(k, n) = p_i P_i^+(k, n).$$

Тоді математичне сподівання винагороди агента залежно від його вибору складе

$$\begin{aligned} W(n_1, n_2) = a_0 P(y_1 \geq m_1, y_2 \geq m_2) \\ + a_1 E((y_1 - m_1)_+|\ \text{при } n_1 \text{ спробах}) \times \\ \times P(y_2 \geq m_2) + a_2 E((y_2 - m_2)_+|\ \text{при } n_2 \text{ спробах}) P(y_1 \geq m_1) = \\ = a_0 P_1^+(m_1, n_1) P_2^+(m_2, n_2) + a_1 E_1^+(m_1, n_1) P_2^+(m_2, n_2) + \end{aligned}$$

$$+a_2 P_1^+(m_1,n_1) E_2^+(m_2,n_2).$$

Знайдемо приріст цієї очікуваної винагороди, якщо агент збільшить n_1 на одиницю (першу різницю):

$$\Delta_1 W(n_1,n_2) = W(n_1+1,n_2) - W(n_1,n_2) =$$
$$= a_0\big(P_1^+(m_1,n_1+1) - P_1^+(m_1,n_1)\big)P_2^+(m_2,n_2) +$$
$$+a_1 E_1^+(m_1,n_1+1) - E_1^+(m_1,n_1) P_2^+(m_2,n_2) +$$
$$+a_2(P_1^+(m_1,n_1+1) - P_1^+(m_1,n_1) =$$
$$= a_0 p_1 P_1(m_1-1,n_1) P_2^+(m_2,n_2) +$$
$$+a_1 p_1 P_1^+(m_1,n_1) P_2^+(m_2,n_2) +$$
$$+a_2 p_1 P_1(m_1-1,n_1) E_1^+(m_2,n_2).$$

Аналогічно при збільшенні n_2 на одиницю:

$$\Delta_2 W(n_1,n_2) = W(n_1,n_2+1) - W(n_1,n_2) =$$
$$= a_0 p_2 P_1^+(m_1,n_1) P_2(m_2-1,n_2) +$$
$$+a_1 p_2 E_1^+(m_1,n_1) P_2(m_2-1,n_2) + a_2 p_2 P_1^+(m_1,n_1) P_2^+(m_2,n_2).$$

Очевидно, що ці прирости додатні при $n_1 \geq m_1$, $n_2 \geq m_2$, однак, щоб додаткові зусилля агента мали сенс, потрібно, щоб вони перекривали додаткові витрати агента, які теж зростають на одиницю. Щоб перевірити це, знайдемо другу різницю:

$$\Delta_{11} W(n_1,n_2) = \Delta_1 W(n_1+1,n_2) - \Delta_1 W(n_1,n_2) =$$
$$=a_0 p_1\big(P_1(m_1-1,n_1+1) - P_1(m_1-1,n_1)\big)P_2^+(m_2,n_2) +$$
$$+a_1 p_1\big(P_1^+(m_1,n_1+1) - P_1^+(m_1,n_1)\big)P_2^+(m_2,n_2) +$$
$$+a_2 p_1(P_1(m_1-1,n_1+1) - P_1(m_1-1,n_1))E_2^+(m_2,n_2) =$$
$$=a_0 p_1^2(P_1(m_1-2,n_1) - P_1(m_1-1,n_1))P_2^+(m_2,n_2) +$$
$$+a_1 p_1^2 P_1(m_1-1,n_1) P_2^+(m_2,n_2) +$$
$$+a_2 p_1^2\big(P_1(m_1-2,n_1) - P_1(m_1-1,n_1)\big)E_2^+(m_2,n_2) =$$
$$=p_1^2\begin{pmatrix} P_1(m_1-2,n_1)\big(a_0 P_2^+(m_2,n_2) + a_2 E_2^+(m_2,n_2)\big) + \\ +p_1^2 P_1(m_1-1,n_1)((a_1-a_0)P_2^+(m_2,n_2) - a_2 E_2^+(m_2,n_2)) \end{pmatrix}$$

Зрозуміло, що при $m_1 = 0$ друга різниця нульова, а перша стала і рівна $a_1 p_1 P_2^+(m_2,n_2)$, тому при $a_1 p_1 P_2^+(m_2,n_2) \leq 1$ додаткові (і взагалі будь-які) зусилля для виконання першої роботи не мають сенсу, інакше додаткова одиниця роботи дає $a_1 p_1 P_2^+(m_2,n_2) - 1$ зростання корисності.

При $m_1 \geq 1$ для визначальним є знак виразу $(a_1 - a_0)P_2^+(m_2,n_2) - a_2 E_2^+(m_2,n_2)$. Якщо він невід'ємний, то перші різниці неспадні, а для від'ємного при $m_1 = 1$\$ спадають.

Якщо $m_1 \geq 2$ і $(a_1 - a_2)P_2^+(m_2,n_2) - a_2 E_2^+(m_2,n_2) < 0$, то обчислимо відношення

$$\frac{P_1(m_1-1,n_1)}{P_1(m_1-2,n_1)} = \frac{C_{n_1}^{m_1-1} p_1^{m_1-1} q_1^{n_1-m_1+1}}{C_{n_1}^{m_1-2} p_1^{m_1-2} q_1^{n_1-m_1+2}} = \frac{n_1 - m_1 + 2}{m_1 - 1}\frac{p_1}{q_1}.$$

Воно зростає при збільшенні n_1, тому

$$W(n_1,n_2) = \Delta_1 W(n_1+1,n_2) - \Delta_1 W(n_1,n_2) =$$
$$= p_1^2 P_1(m_1-2,n_1)(a_0 P_2^+(m_2,n_2) + a_2 E_2^+(m_2,n_2) +$$
$$+ \frac{n_1-m_1+2}{m_1-1}\frac{p_1}{q_1}(a_1-a_0)P_2^+(m_2,n_2) - a_2 E_2^+(m_2,n_2)$$

спадає. Маємо

$$W(n_1,n_2) \geq 0 \Leftrightarrow \Delta_1 W(n_1+1,n_2) \geq \Delta_1 W(n_1,n_2) \Leftrightarrow$$
$$n_1 \leq (m_1-1)\frac{p_1}{q_1}\frac{a_0 P_2^+(m_2,n_2) + a_2 E_2^+(m_2,n_2)}{(a_0-a_1)P_2^+(m_2,n_2) + a_2 E_2^+(m_2,n_2)} - 1.$$

Тому $\Delta_1 W(n_1,n_2)$ залежно від n_1 зростає до

$$N_1 = argmax_{n_1}\Delta_1 W(n_1,n_2) =$$
$$= \left\lfloor (m_1-1)\frac{p_1}{q_1}\frac{a_0 P_2^+(m_2,n_2) + a_2 E_2^+(m_2,n_2)}{(a_0-a_1)P_2^+(m_2,n_2) + a_2 E_2^+(m_2,n_2)} \right\rfloor,$$

а потім спадає, причому

$$\left\lfloor (m_1-1)\frac{p_1}{q_1} \right\rfloor \leq N_1 \leq \left\lfloor (m_1-1)\frac{p_1}{q_1}\frac{a_0}{a_0-a_1} \right\rfloor.$$

Зауважимо, що остання оцінка підходить і для $m_1 = 1$ і не залежить від m_2, n_2.

3. Оптимальна поведінка у випадку необмежених ресурсів

Якщо $a_1 p_1 > 1$, то можна настільки збільшити n_2, що $P_2^+(m_2,n_2)$ стане достатньо близьким до 1, тому $a_1 p_1 P_2^+(m_2,n_2) > 1$, отже, $\Delta_1 W(n_1,n_2) - 1 > \varepsilon$ для деякого $\varepsilon > 0$$ і всіх n_1, більших від деякого N_0. Тоді

$$\lim_{n_1\to\infty}(W(n_1,n_2) - (n_1+n_2)) = +\infty,$$

тобто агент може отримати необмежену корисність, зафіксувавши $n_2$$ і збільшуючи n_1. Висновок буде аналогічним, якщо $a_2 p_2 > 1$.

Отже, надалі розглядаємо випадок $a_1 p_1 \leq 1$, $a_2 p_2 \leq 1$. Вже відомо, що при $m_1 = m_2 = 0$ (обмеження відсутні) оптимальним вибором агента є $n_1 = n_2 = 0$ – нічого не робити і отримати a_0.

Враховуючи очевидні нерівності $n_1 p_1 - m_1 \leq E_1^+(m_2,n_2) < n_1 p_1$, $n_2 p_2 - m_2 \leq E_2^+(m_2,n_2) < n_2 p_2$, оцінимо очікувану винагороду агента:

$$W(n_1,n_2) = a_0 P_1^+(m_1,n_1)P_2^+(m_2,n_2) + a_1 E_1^+(m_1,n_1)P_2^+(m_2,n_2) +$$
$$+ a_2 P_1^+(m_1,n_1)E_2^+(m_2,n_2) < a_0 + a_1 p_1 n_1 + a_2 p_2 n_2.$$

Якщо $p_1 n_1 = p_2 n_2 = 1$, то $W(n_1,n_2) - (n_1+n_2) \longrightarrow a_0 - m_1 - -m_1$ при $n_1, n_2 \longrightarrow \infty$, тобто агент може отримати корисність, як завгодно близьку до $a_0 - m_1 - m_1$ необмежено збільшуючи зусилля.

Якщо $p_1 n_1 < 1$, то $W(n_1, n_2) - (n_1 + n_2) < a_0 - (1 - a_1 p_1) n_1$, тому при $n_1 \geq \frac{a_o}{1 - a_1 p_1}$ очікувана корисність стає від'ємною. Враховуючи індивідуальну раціональність, варто розглядати тільки $n_1 \leq M_1 = \left\lfloor \frac{a_o}{1 - a_1 p_1} \right\rfloor$, як і $n_2 \leq M_2 = \left\lfloor \frac{a_o}{1 - a_2 p_2} \right\rfloor$ при $a_2 p_2 < 1$.

Ми обираємо менше чи єдине з отриманих обмежень, щоб звузити перебір. Припустимо, що відомо, що $a_2 p_2 < 1$, тоді розглядаємо всі n_2 від m_2 до M_2.

В усіх випадках $\Delta_1 W(n_1, n_2) \longrightarrow a_1 p_1 P_2^+(m_2, n_2) < 1$ при $n_1 \longrightarrow \infty$. Нагадаємо, що згідно проведеного аналізу значення $\Delta_1 W(n_1, n_2)$ при зміні n_1 від m_1 до нескінченності і фіксованому n_2:

- сталі і рівні $a_1 p_1 P_2^+(m_2, n_2) \leq a_1 p_1 < 1$ при $m_1 = 0$, тому роботу першого виду не виконуємо взагалі;
- прямують знизу до $a_1 p_1 P_2^+(m_2, n_2) < 1$ при $m_1 \geq 0$ і $\left(\begin{matrix} a_0 - \\ a_1 \end{matrix}\right) P_2^+(m_2, n_2) + a_2 E_2^+(m_2, n_2) \geq 0$, тому відмовляємось від цього n_2;
- спершу зростають, коли n_1 зростає до
  $N_1 = argmax_{n_1} \Delta_1 W(n_1, n_2) =$
  $= \left\lfloor (m_1 - 1) \frac{p_1}{q_1} \frac{a_0 P_2^+(m_2, n_2) + a_2 E_2^+(m_2, n_2)}{(a_0 - a_1) P_2^+(m_2, n_2) + a_2 E_2^+(m_2, n_2)} \right\rfloor$,
  а потім спадають до $a_1 p_1 P_2^+(m_2, n_2) < 1$.

В останньому випадку порівнюємо методом подвоєння/поділу навпіл знаходимо останнє таке $n_1 \geq N_1$, що $\Delta_1 W(n_1, n_2) \geq 1$. Воно (якщо існує) і дає оптимальну різницю $W(n_1, n_2) - (n_1, n_2)$ для всіх $n_1 \geq m_1$ і фіксованого n_2. Перебравши всі вказані n_2, обираємо оптимальний вибір агента (n_1, n_2).

4. Висновки і перспективи

У даній праці ми розглянули найпростіший, "пробний" варіант узагальненої нами моделі, на якому, тим не менш, можна спостерегти основні риси і труднощі. Ми спростили задачу до двох видів роботи, «обрізаної» лінійної функції винагороди, необмеженого згори ресурсу агента. Модифікації отриманих формул і результатів для трьох і більше видів роботи є очевидними. Зрозуміло, що варто, як і у оригінальній статті [2], розглянути більшу кількість видів роботи, бюджетні обмеження чи обмеження ресурсу, довільну опуклу функцію винагороди, однак тоді не йшлося б про аналітичне чи хоча б частково аналітичне розв'язання задачі. Ми продовжимо цю тему у наступній публікації із застосуванням чисельного моделювання засобами пакету SciLab.

Література

1. P. Billingsley, Probability and Measure, Wiley–Interscience, 1986.

2. Ph. Bond, A. Gomes, Multitask principal–agent problems: Optimal contracts, fragility, and effort misallocation. Journal of Economic Theory 144 (2009) 175–211.
3. M. Dewatripont, I. Jewitt, J. Tirole, Multitask agency problems: Focus and task clustering, Europ. Econ. Rev. 44 (2000) 869–877.
4. W. Hoeffding, On the distribution of the number of successes in independent trials, Ann. of Math. Stat. 27 (1956) 713–721.
5. B. Holmstrom, P. Milgrom, Multitask principal–agent analyses: Incentive contracts, asset ownership, and job design, J. Law, Econ., Organ. 7 (1991) 24–52.
6. C. Laux, Limited-liability and incentive contracting with multiple projects, RAND J. Econ. 32 (2001) 514–526.
7. J.A. Mirrlees, The theory of moral hazard and unobservable behaviour: Part I, original manuscript 1975, published in: Rev. Econ. Stud. 66 (1999) 3–21.
8. F.H. Page, The existence of optimal contracts in the principal agent model, J. Math. Econ. 16 (1987) 157–167.

Стаття надійшла до редакційної колегії 30.11.2020 р.

OPTIMAL CONTRACTS IN A MULTI-PURPOSE TASK

I. V. Nykyforchyn
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenka Str. 57, Ukraine;
ph.+38(0342)59-60-47; e-mail: iryna.nykyforchyn@pnu

In the paper a famous multitask model of principal-agent relations is enhanced with the requirement that a reward is paid only if some minimal threshold in each type of workis attained. We deduce and analyze formulae for the expectedutility of an agent and propose a method to find his optimal behavior depending on the reward function parameters.

Key words: *contract theory, multitask problem, utility function.*