УДК 532.595

ДО ПИТАННЯ ЩОДО ВПЛИВУ В'ЯЗКОГО НАПОВНЮВАЧА НА РУХ ТІЛА, ЩО ЗНАХОДИТЬСЯ В РЕЖИМІ ПРЕЦЕСІЇ

І. М. Гураль[1], Ю. А. Наквасюк[2]

[1]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; e-mail: math@nung.edu.ua

[2]Київський національний університет імені Тараса Шевченка; 01033, м. Київ, вул. Володимирська 64; e-mail: nakvasiuk.iuliia@gmail.com

Розглядається задача визначення усталеного відносного руху в'язкої нестисливої рідини, яка повністю заповнює довгу циліндричну посудину, що здійснює регулярну прецесію з малим кутом нутації і/або з малим відношенням кутової швидкості прецесії до кутової швидкості власного обертання. Отримано вищі наближення розкладу за малим параметром розв'язку нелінійних рівнянь Нав'є-Стокса та проекції на вісь циліндра моменту сил, що діють на бічну поверхню посудини зі сторони рідини.

Ключові слова: *в'язка нестислива рідина, регулярна прецесія.*

1. Вступ. Задачі динаміки тіл з рідким наповнювачем давно привертають увагу дослідників. Поштовхом для багатьох досліджень в цій області стали задачі, які пов'язані з розвитком літальних апаратів, що містять рідкі маси, теорією руху кораблів, проектуванням гіроскопічних приладів, центрифуг та інших технічних об'єктів.

У деяких прикладних задачах виникає необхідність дослідження динаміки в'язкої рідини всередині порожнини та оцінки впливу рідини на рух тіла, що знаходиться в режимі регулярної прецесії. Короткий огляд таких робіт для циліндричних порожнин можна знайти в [1-3]. Міллер в [1] експериментально вимірював момент сил, що діють на тіло зі сторони в'язкої рідини. В [2] аналітично описано поле швидкостей відносного руху рідини для лінеаризованої задачі: не дорівнює нулю тільки проекція швидкості на вісь циліндра. Також в [2] за допомогою теореми про зміну моменту кількості руху відносно початку координат обчислено проекцію на вісь циліндра моменту в'язких сил, що діють на циліндр, і вона є величиною малою другого порядку. В [4] показано, що відповідний відносний рух рідини описується другим наближенням для розв'язку нелінійних рівнянь Нав'є-Стокса.

У даній роботі отримано вищі наближення розкладу за малим параметром розв'язку нелінійних рівнянь Нав'є-Стокса та проекції на вісь циліндра моменту сил, що діють на бічну поверхню посудини зі сторони рідини.

2. Постановка задачі. Розглядається усталений рух нестисливої рідини густини ρ та в'язкості μ всередині прямого кругового циліндра радіуса a і довжини $2c$. Рідина повністю заповнює циліндр, який обертається з кутовою швидкістю ω навколо своєї осі симетрії z і обертається з кутовою швидкістю Ω навколо нерухомої осі Z, що проходить через центр мас O і утворює з віссю z сталий кут нутації θ. Введемо систему координат xyz, де вісь x лежить в площині Zz.

В якості характерних величин довжини, часу і густини використаємо a, ω^{-1}, ρ.

В циліндричних координатах r, φ, z рівняння руху рідини для безрозмірних компонент u, v, w відхилення швидкості $\vec{V}_в$ від обертання як абсолютно твердого тіла були отримані в [2] і з точністю до позначень мають вигляд

$$\begin{cases} D'u - \dfrac{v^2}{r} - 2\tau v + 2\varepsilon w \sin\varphi = -\dfrac{\partial p}{\partial r} + \dfrac{1}{Re}\left(D''u - \dfrac{u}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} \right), \\ D'v + \dfrac{uv}{r} + 2\tau u + 2\varepsilon w \cos\varphi = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p}{\partial \varphi} + \dfrac{1}{Re}\left(D''v - \dfrac{v}{r^2} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} \right), \\ D'w - 2\varepsilon v \cos\varphi - 2\varepsilon u \sin\varphi - 2\varepsilon r \cos\varphi = -\dfrac{\partial p}{\partial z} + \dfrac{1}{Re} D''w, \\ \dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{u}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, \end{cases} \qquad (1)$$

де

$$D' = \frac{\partial}{\partial \varphi} + u\frac{\partial}{\partial r} + \frac{v}{r}\frac{\partial}{\partial \varphi} + w\frac{\partial}{\partial z}, \quad D'' = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\varepsilon = \frac{\Omega}{\omega}\sin\theta, \; \tau = 1 + \frac{\Omega}{\omega}\cos\theta, \quad Re = \frac{\omega a^2 \rho}{\mu},$$

$$p = P - \frac{1}{2}\left(\varepsilon^2 r^2 \sin^2\varphi + r^2\tau^2 + \varepsilon^2 z^2 + 2\varepsilon(\tau - 1) rz \cos\varphi \right).$$

Граничні умови наступні:

$$r = 1: \quad u = 0, v = 0, w = 0;$$

$$r = \pm\lambda \;\; (\lambda = \frac{c}{a}): \quad u = 0, v = 0, w = 0.$$

Як і в [2] приймемо, що видовження порожнини велике і що вплив торців буде суттєвим тільки на відстані порядку $O(1)$ від торців. Тому, опустимо граничні умови на торцях і будемо шукати усталений розв'язок на скінченному відрізку немов би нескінченного циліндра.

3. Розклад за параметром ε. Приймемо, що ε – мала величина і подамо розв'язок системи (1) у вигляді розкладу за параметром ε:

$$\vec{V}_в = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \vec{V}_в^{(n)}, \quad p = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n p^{(n)}. \tag{2}$$

В роботі [2] знайдені $u^{(1)} = 0,\ v^{(1)} = 0,\ p^{(1)} = 0,$

$$w^{(1)}(r,\varphi) = w_1(r)\cos\varphi + w_2(r)\sin\varphi,$$

де w_1 і w_2 – відповідно уявна і дійсна частини комплексної функції $W_1 = w_2 + iw_1$, яка дорівнює $W_1(r) = 2r - 2\dfrac{I_1(qr)}{I_1(q)}$, де $I_1(qr)$ – модифікована функція Бесселя першого порядку комплексного аргументу $qr\left(q = (1+i)\sqrt{\dfrac{Re}{2}}\right)$.

Підставимо (2) в рівняння (1) і прирівняємо коефіцієнти при ε^2, одержимо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^{(2)}}{\partial\varphi} - 2\tau v^{(2)} + 2w^{(1)}\sin\varphi = -\dfrac{\partial p^{(2)}}{\partial r} + \dfrac{1}{Re}\left(D'' u^{(2)} - \dfrac{u^{(2)}}{r^2} - \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v^{(2)}}{\partial\varphi}\right) \\ \dfrac{\partial v^{(2)}}{\partial\varphi} + 2\tau u^{(2)} + 2w^{(1)}\cos\varphi = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p^{(2)}}{\partial\varphi} + \dfrac{1}{Re}\left(D'' v^{(2)} - \dfrac{v^{(2)}}{r^2} + \dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u^{(2)}}{\partial\varphi}\right) \\ \dfrac{\partial w^{(2)}}{\partial\varphi} = -\dfrac{\partial p^{(2)}}{\partial z} + \dfrac{1}{Re} D'' w^{(2)}, \\ \dfrac{\partial u^{(2)}}{\partial r} + \dfrac{u^{(2)}}{r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v^{(2)}}{\partial\varphi} + \dfrac{\partial w^{(2)}}{\partial z} = 0. \end{cases} \tag{3}$$

$r = 1: \quad u^{(2)} = 0,\ v^{(2)} = 0,\ w^{(2)} = 0.$

Виходячи із структури неоднорідностей, які входять в рівняння системи, розв'язок (3) шукатимемо у вигляді

$$\begin{cases} u^{(2)}(r,\varphi) = u_1(r)\cos 2\varphi + u_2(r)\sin 2\varphi + u_3(r), \\ v^{(2)}(r,\varphi) = v_1(r)\cos 2\varphi + v_2(r)\sin 2\varphi + v_3(r), \\ w^{(2)}(r,\varphi) = 0, \\ p^{(2)}(r,\varphi) = p_1(r)\cos 2\varphi + p_2(r)\sin 2\varphi + p_3(r). \end{cases} \tag{4}$$

Підставимо (4) в (3), одержимо наступні системи для визначення функцій

$U(r) = u_2(r) + iu_1(r), V(r) = v_2(r) + iv_1(r), P(r) = p_2(r) + ip_1(r), u_3(r), v_3(r), p_3(r)$

$$\begin{cases} 2iU - 2\tau V - iW_1 = -P' + \dfrac{1}{Re}\left(U'' + \dfrac{1}{r}U' - \dfrac{5}{r^2}U - \dfrac{4i}{r^2}V\right), \\ 2iV + 2\tau U + W_1 = -\dfrac{2i}{r}P + \dfrac{1}{Re}\left(V'' + \dfrac{1}{r}V' - \dfrac{5}{r^2}V + \dfrac{4i}{r^2}U\right), \\ U' + \dfrac{1}{r}U + \dfrac{2i}{r}V = 0. \end{cases} \tag{5}$$

$$\begin{cases} -2\tau v_3 + w_2 = -p_3' + \dfrac{1}{Re}\left(u_3'' + \dfrac{1}{r}u_3' - \dfrac{1}{r^2}u_3\right), \\ 2\tau u_3 + w_1 = \dfrac{1}{Re}\left(v_3'' + \dfrac{1}{r}v_3' - \dfrac{1}{r^2}v_3\right), \\ u_3' + \dfrac{1}{r}u_3 = 0. \end{cases} \tag{6}$$

де $(\,)' = \dfrac{d(\,)}{dr}$.

Граничні умови: $U(1)=0,\ V(1)=0,\ u_3(1)=0,\ v_3(1)=0.$

З системи (5) одержимо

$$U^{IV} + \frac{6}{r}U''' - \frac{3}{r^2}U'' - \frac{9}{r^3}U' + \frac{9}{r^4}U - 2q^2\left(U'' + \frac{3}{r}U' - \frac{3}{r^2}U\right) = \frac{4q^3 I_2(qr)}{rI_1(q)}. \tag{7}$$

Розв’язок рівняння (7) записується у вигляді

$$U(r) = \frac{4}{\sqrt{2}qI_1(q)I_3(\sqrt{2}q)}\Big(\Big(\sqrt{2}I_2(q)I_3\left(\sqrt{2}q\right) - I_2(\sqrt{2}q)I_3\left(q\right)\Big)r + \\ +\Big(I_3(q)I_2\left(\sqrt{2}qr\right) - \sqrt{2}I_3(\sqrt{2}q)I_2\left(qr\right)\Big)\frac{1}{r}\Big) \tag{8}$$

де $I_m(z)$ – модифіковані функції Бесселя порядку m.

Тоді для $V(r)$ та $P(r)$ отримаємо

$$V(r) = \frac{2\sqrt{2}i}{qI_1(q)I_3(\sqrt{2}q)}\Big(\Big(\sqrt{2}I_3(\sqrt{2}q)I_2\left(q\right) - I_2(\sqrt{2}q)I_3\left(q\right)\Big)r + \\ +q\sqrt{2}\Big(I_3(q)I_1\left(\sqrt{2}qr\right) - I_3(\sqrt{2}q)I_1\left(qr\right)\Big) - \Big(I_3(q)I_2\left(\sqrt{2}qr\right) - \sqrt{2}I_3(\sqrt{2}q)I_2\left(qr\right)\Big)\frac{1}{r}\Big) \tag{9}$$

$$P(r) = ir^2 + \frac{4ir^2(\tau-1)I_2(q)}{qI_1(q)} - \frac{4ir^2(\tau-1)I_2(\sqrt{2}q)I_3(q)}{\sqrt{2}qI_1(q)I_3(\sqrt{2}q)} + \\ + \frac{4i\tau I_3(q)I_2(\sqrt{2}qr)}{\sqrt{2}qI_1(q)I_3(\sqrt{2}q)} - \frac{2i(1+2\tau)I_2(qr)}{qI_1(q)} \tag{10}$$

Розв'язок системи (6) має вигляд

$$u_3(r)=0\,, \tag{11}$$

$$v_3(r)=-2r+2\operatorname{Im}\left\{\frac{iI_1\left(qr\right)}{I_1\left(q\right)}\right\}, \tag{12}$$

$$p_3(r)=-\left(2\tau+1\right)r^2+2\left(2\tau+1\right)\operatorname{Im}\left\{\frac{iI_0\left(qr\right)}{qI_1\left(q\right)}\right\}+const\,, \tag{13}$$

де Im означає уявну частину виразу в дужках.

Сукупність формул (8)-(13) описує друге наближення для розв'язку поставленої задачі.

Для знаходження $\vec{V}_в^{(3)}$, $p^{(3)}$ отримаємо систему

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u^{(3)}}{\partial\varphi}-2\tau v^{(3)}=-\dfrac{\partial p^{(3)}}{\partial r}+\dfrac{1}{Re}\left(D''u^{(3)}-\dfrac{u^{(3)}}{r^2}-\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial v^{(3)}}{\partial\varphi}\right), \\ \dfrac{\partial v^{(3)}}{\partial\varphi}+2\tau u^{(3)}=-\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial p^{(3)}}{\partial\varphi}+\dfrac{1}{Re}\left(D''v^{(3)}-\dfrac{v^{(3)}}{r^2}+\dfrac{2}{r^2}\dfrac{\partial u^{(3)}}{\partial\varphi}\right), \\ \dfrac{\partial w^{(3)}}{\partial\varphi}+u^{(2)}\dfrac{\partial w^{(1)}}{\partial r}+\dfrac{v^{(2)}}{r}\dfrac{\partial w^{(1)}}{\partial\varphi}-2v^{(2)}\cos\varphi-2u^{(2)}\sin\varphi=-\dfrac{\partial p^{(3)}}{\partial z}+\dfrac{1}{Re}D''w^{(3)}, \\ \dfrac{\partial u^{(3)}}{\partial r}+\dfrac{u^{(3)}}{r}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v^{3}}{\partial\varphi}+\dfrac{\partial w^{(3)}}{\partial z}=0. \end{cases} \tag{14}$$

Оскільки

$$u^{(2)}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial r}+\frac{v^{(2)}}{r}\frac{\partial w^{(1)}}{\partial\varphi}-2v^{(2)}\cos\varphi-2u^{(2)}\sin\varphi=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\left(u_1w_1{}'-u_2w_2{}'\right)+\frac{1}{2r}\left(v_1w_2+v_2w_1\right)-v_1+u_2\right)\cos3\varphi+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\left(u_1w_2{}'+u_2w_1{}'\right)+\frac{1}{2r}\left(-v_1w_1+v_2w_2\right)-v_2-u_1\right)\sin3\varphi+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\left(u_1w_1{}'+u_2w_2{}'\right)+\frac{1}{2r}\left(v_1w_2-v_2w_1+2v_3w_2\right)-v_1-u_2-2v_3\right)\cos\varphi+$$

$$+\left(\frac{1}{2}\left(-u_1w_2{}'+u_2w_1{}''\right)+\frac{1}{2r}\left(v_1w_1+v_2w_2-2v_3w_1\right)-v_2+u_1\right)\sin\varphi$$

то розв'язок (14) шукатимемо у вигляді

$$u^{(3)}(r,\varphi)=0,\;\; v^{(3)}(r,\varphi)=0,\;\; p^{(3)}(r,\varphi)=0,$$

$$w^{(3)}(r,\varphi)=w_3(r)\sin\varphi+w_4(r)\cos\varphi+w_5(r)\sin3\varphi+w_6(r)\cos3\varphi.$$

Тоді для визначення функцій $W_2(r)=w_3(r)+iw_4(r)$, $W_3\left(r\right)=w_6\left(r\right)-iw_5\left(r\right)$ отримаємо рівняння

$$W_2{}''+\frac{1}{r}W_2{}'-\frac{1}{r^2}W_2-q^2W_2=G(r), \tag{15}$$

$$W_3''+\frac{1}{r}W_3'-\frac{1}{r^2}W_3-3q^2W_3=Q(r), \tag{16}$$

де

$$G(r)=-iq^2\left(\frac{1}{2}\left(iU\overline{W}_1{}'+\frac{1}{r}\left(V\overline{W}_1-i\left(W_1+\overline{W}_1\right)W_1\right)\right)-V-iU+i\left(W_1+\overline{W}_1\right)\right)=$$

$$=q^2i\frac{4rI_0(\overline{q}r)}{I_1(\overline{q})}\left(\frac{I_2(q)}{I_1(q)}-\frac{I_2(\sqrt{2}q)I_3(q)}{\sqrt{2}I_3(\sqrt{2}q)I_1(q)}\right)+\frac{2q^2}{rI_1(q)I_1(\overline{q})}\left(I_3(qr)I_1(\overline{q}r)-\sqrt{2}qr\right)+$$

$$-2iI_0(\overline{q}r)I_2(qr))-$$

$$+\frac{2q^2I_1(qr)}{rI_1(q)}\left(2r-\frac{I_1(qr)}{I_1(q)}-\frac{I_1(\overline{q}r)}{I_1(\overline{q})}\right)$$

$$Q(r)=-iq^2\left(U+iV-\frac{1}{2r}\left(rUW_1{}'+iVW_1\right)\right)=-4iq^2\left(\frac{I_2(q)}{I_1^2(q)}-\frac{I_2(\sqrt{2}q)I_3(q)}{\sqrt{2}I_3(\sqrt{2}q)I_1^2(q)}\right)*$$

$$*I_2(qr)r-\frac{2iq^2}{rI_1^2(q)}\left(I_1^2(qr)-2I_0(qr)I_2(qr)\right)-\frac{2iq^2I_3(q)}{rI_1^2(q)I_3(\sqrt{2}q)}*$$

$$*\left(\sqrt{2}I_0(qr)I_2(\sqrt{2}qr)-I_1(qr)I_1(\sqrt{2}qr)\right)$$

де $\overline{W}_1$, $\overline{q}$ – спряжені до W_1 і q відповідно.

Граничні умови: $W_2(1)=0,\ W_3(1)=0$.

Розв'язком рівнянь (15), (16) є функції

$$W_2(r)=l_1(r)I_1(qr)-l_2(r)K_1(qr)-\frac{I_1(qr)}{I_1(q)}\left(l_1(1)I_1(q)-l_2(1)K_1(q)\right), \tag{17}$$

$$W_3(r)=d_1(r)I_3\left(\sqrt{3}qr\right)-d_2(r)K_3\left(\sqrt{3}qr\right)-\frac{I_3\left(\sqrt{3}qr\right)}{I_3\left(\sqrt{3}q\right)}\left(d_1(1)I_3\left(\sqrt{3}q\right)-d_2(1)K_3\left(\sqrt{3}q\right)\right),$$

де $l_1(r)=\int\limits_0^r rG(r)K_1(qr)dr$, $l_2(r)=\int\limits_0^r rG(r)I_1(qr)dr$,

$d_1(r)=\int\limits_0^r rQ(r)K_3(\sqrt{3}qr)dr$, $d_2(r)=\int\limits_0^r rQ(r)I_3(\sqrt{3}qr)dr$; $I_m(z)$, $K_m(z)$ – модифіковані функції Бесселя та Ганкеля порядку m.

Вид розв'язку системи рівнянь наступного четвертого наближення також визначається структурою неоднорідностей, які входять в рівняння системи. Неважко показати, що тоді
$s(r,\varphi)=s_4(r)\cos 2\varphi+s_5(r)\sin 2\varphi+s_6(r)\cos 4\varphi+s_7(r)\sin 4\varphi+s_8(r)$, де $s(r,\varphi)$ – одна з функцій $p^{(4)}(r,\varphi)$, $u^{(4)}(r,\varphi)$, $v^{(4)}(r,\varphi)$, а осьова компонента швидкості $w^{(4)}(r,\varphi)=0$. Тут випишемо тільки систему для визначення $u_8(r)$, $v_8(r)$, $p_8(r)$.

$$\begin{cases} \dfrac{u_1u_1'+u_2u_2'}{2}+\dfrac{2v_1u_2-2v_2u_1-v_1^2-v_2^2-2v_3^2}{2r}-2\tau v_8+w_3=-p_8'+\dfrac{1}{Re}\left(u_8''+\dfrac{u_8'}{r}-\dfrac{u_8}{r^2}\right) \\ \dfrac{u_1v_1'+u_2v_2'}{2}+\dfrac{v_1u_1+v_2u_2}{2r}+2\tau u_8+w_4=\dfrac{1}{Re}\left(v_8''+\dfrac{v_8'}{r}-\dfrac{v_8}{r^2}\right), \\ u_8'+\dfrac{u_8}{r}=0. \end{cases} \tag{18}$$

3. Визначення проекції на вісь циліндра моменту сил, що діють на тіло зі сторони рідини. Визначимо осьову проекцію моменту сил, що діють на тіло зі сторони рідини, через дотичні напруження на бічній стінці

$$M_z=-\frac{2\rho c\omega^2a^4}{Re}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\varphi}-\frac{v}{r}\right)\Bigg|_{r=1}d\varphi.$$

Для обчислення M_z достатньо знати $v_3'(1)$ та $v_8'(1)$, оскільки решта доданків перетворяться в нуль при інтегруванні

$$M_z=-\frac{4\varepsilon^2\pi\rho c\omega^2a^4}{Re}\left(v_3'(1)+\varepsilon^2v_8'(1)\right).$$

Позначимо $m_z=m_1+\varepsilon^2m_2$, де $m_1=\dfrac{1}{Re}v_3'(1)$, $m_2=\dfrac{1}{Re}v_8'(1)$. З (12) отримаємо $m_1=\mathrm{Im}\left\{\dfrac{-2I_2(q)}{qI_1(q)}\right\}$.

З третього рівняння системи (18) і граничної умови $u_8(1)=0$ отримаємо $u_8(r)=0$. Тоді $v_8'(1)$ можна знайти з другого рівняння (18). Помножимо його на r^2 і проінтегруємо по r від 0 до 1. Оскільки $\dfrac{1}{2}\int_0^1\left(r^2u_1v_1'+ru_1v_1\right)dr=r\int_0^1 v_1v_2dr$; $\dfrac{1}{2}\int_0^1\left(r^2u_2v_2'+ru_2v_2\right)dr=-r\int_0^1 v_1v_2dr$;
$\dfrac{1}{2}\int_0^1\left(r^2v_8''+rv_8'-v_8\right)dr=v_8'(1)$, то

$$v_8\,'(1) = Re\int_0^1 r^2 w_4 dr.$$

З рівняння (15)

$$W_2 = \frac{1}{q^2}\left(W_2\,'' + \frac{1}{r}W_2\,' - \frac{1}{r^2}W_2\right) - \frac{1}{q^2}G.$$

Тоді

$$\int_0^1 r^2 W_2 dr = \frac{1}{q^2}\int_0^1 \left(r^2 W_2\,'' + rW_2\,' - W_2 - r^2 G\right)dr = \frac{1}{q^2}\left(W_2\,'(1) - \int_0^1 r^2 G dr\right).$$

З (17) знайдемо

$$W_2\,'(1) = \left(l_1(r) - l_1(1)\right)\left(qI_0(qr) - \frac{I_1(qr)}{r}\right) - l_2(r)\left(-qK_0(qr) - \frac{K_1(qr)}{r}\right) +$$

$$+\frac{1}{I_1(q)}\left(qI_0(qr) - \frac{I_1(qr)}{r}\right)l_2(1)K_1(q)$$

і $W_2\,'(1) = \dfrac{l_2(1)}{I_1(q)} = \dfrac{1}{I_1(q)}\displaystyle\int_0^1 rG(r)I_1(qr)dr.$

Для m_2 отримаємо

$$m_2 = \int_0^1 r^2 w_4 dr = \operatorname{Im}\left\{\int_0^1 r^2 W_2 dr\right\} = \operatorname{Im}\left\{\frac{1}{q^2}\int_0^1 r\,G(r)\left(\frac{I_1(qr)}{I_1(q)} - r\right)dr\right\}.$$

Тоді

$$M_z = -4\varepsilon^2\pi\rho c\omega^2 a^4 \operatorname{Im}\left\{\frac{-2I_2(q)}{qI_1(q)} + \varepsilon^2\frac{1}{q^2}\int_0^1 r\,G(r)\left(\frac{I_1(qr)}{I_1(q)} - r\right)dr\right\}. \quad (19)$$

Якщо для визначення проекції гідродинамічного моменту на вісь Oz скористатися теоремою про зміну моменту кількості руху відносно початку координат, то отримаємо

$$M_z = -4\varepsilon^2\pi\rho c\omega^2 a^4\left(\int_0^1 w_1 r^2 dr + \varepsilon^2\int_0^1 w_4 r^2 dr\right). \quad (20)$$

Оскільки $\displaystyle\int_0^1 w_1 r^2 dr = \operatorname{Im}\left\{\frac{-2I_2(q)}{qI_1(q)}\right\} = m_1$ і $\displaystyle\int_0^1 w_4 r^2 dr = m_2$, то M_z із (20) співпадає з (19). Таким чином, використання теореми про зміну моменту кількості руху відносно початку координат дає змогу отримати гідродинамічний момент в більш точному наближенні, ніж побудоване поле швидкостей.

Безрозмірні m_1 і m_2 є немонотонними функціями числа Рейнольдса (рис. 1). Максимальні значення m_1 та m_2 досягаються при

$Re \approx 18,65$ та $Re \approx 42,46$ відповідно і дорівнюють $m_{1\max}(18,65) \approx 0,17$, $m_{2\max}(42,46) \approx 0,13$. На рис. 2 зображено $m_z(Re)$ при $\varepsilon = 0,1$.

Формулу (19) можна спростити для великих та малих чисел Рейнольдса, використовуючи асимптотичні подання модифікованих функцій Бесселя та Ганкеля для великих та малих аргументів [5]. Тоді для великих Re отримаємо

$$\mathrm{Re} \gg 1: \quad M_z = -\frac{2\sqrt{2}\varepsilon^2 \pi\rho c \omega^2 a^4}{\sqrt{Re}}\left(1 + \varepsilon^2 \frac{5\sqrt{2}+12}{15}\right).$$

Для малих Re доданок m_1 пропорційний Re, а m_2 пропорційний Re^3. Тому для малих Re отримаємо

$$\mathrm{Re} \ll 1: \quad M_z = -\frac{\varepsilon^2 \pi\rho c \omega^2 a^4 Re}{12}.$$

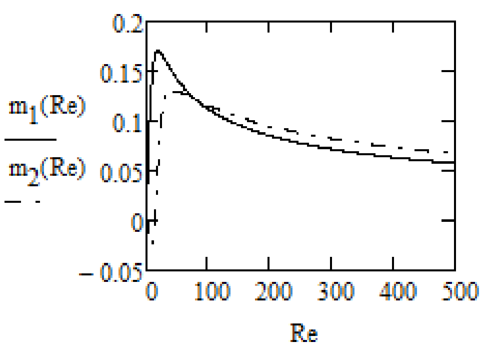

Рис. 1. Залежність m_1 і m_2 від Re

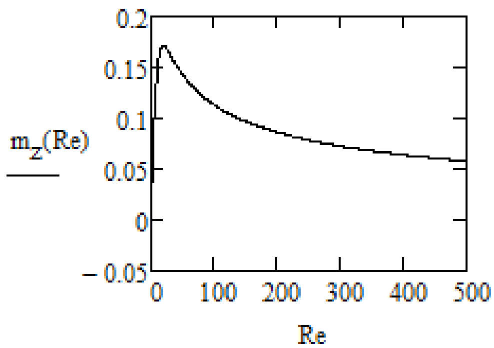

Рис. 2. Залежність m_z від Re при $\varepsilon = 0,1$

Таким чином побудовано вищі наближення розкладу за малим параметром розв'язку задачі визначення усталеного відносного руху в'язкої нестисливої рідини, яка повністю заповнює циліндричну посудину, що здійснює регулярну прецесію з малим кутом нутації і/або з малим відношенням кутової швидкості прецесії до кутової швидкості власного обертання. Осьова компонента швидкості w є ненульовою в першому та третьому наближеннях, радіальна u та азимутальна v компоненти швидкості є ненульовими в другому та четвертому наближеннях для розв'язку нелінійних рівнянь Нав'є-Стокса. Для обчислення проекції на вісь циліндра моменту в'язких сил через дотичні напруження на бічній стінці лише неперіодична складова азимутальної компоненти швидкості є суттєвою. Отримано також формули для гальмуючого моменту у випадку великих та малих чисел Рейнольдса.

Література

1. Miller M.C. Flight instabilities of spinning projectile having nonrigid payloads / M.C. Miller // Journal of Guidance Control and Dynamics. – 1982. – V.5, № 2. – P. 151-157.
2. Herbert T. Viscous fluid motion in a spinning and nutating cylinder / T. Herbert // Journal of Fluid Mechanics. – 1986. – V. 167. – P. 181-198.
3. A rotating fluid cylinder subject to weak precession / P. Meunier, C. Eloy, R. Lagrange, F. Nadal // Journal of Fluid Mechanics. – 2008. – V. 599. – P. 405-440.
4. Казмерчук И.М. Движение вязкой несжимаемой жидкости в прецессирующем цилиндре / И.М. Казмерчук // Вестник МГУ. Математика. Механика, 1992. – №2. – С. 93-96.
5. Янке Е.Специальные функции. Формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. – М.:Наука, 1977. – 342 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 29.05.2018 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., проф. ***Мойсишиним В.М.,***
к.т.н., доцентом ***Левчук К.Г.*** *(м. Київ)*

INFLUENCE OF THE VISCOUS FILLING ON A MOTION OF THE PRECESSING VESSEL

I. M. Gural[1], I. A. Nakvasiuk[2]
[1]Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivsk, Carpatska Str., 15; e-mail: math@nung.edu.ua
[2]Taras Shevchenko National University of Kyiv;
01033, Kyiv, Volodymyrska Str., 64; e-mail: nakvasiuk.iuliia@gmail.com

The problem for determining the steady relative motion of a viscous incompressible fluid entirely filling a long cylindrical vessel executing regular precession with a small angle of nutation and / or with a small ratio of the angular precession velocity to the angular velocity of spin about the cavity axis is considered. Higher approximations of the expansion in a small parameter of the solution of the nonlinear Navier-Stokes equations and of the projection on the axis of the cylinder of the moment of the forces exerted by fluid on the lateral surface of the vessel are obtained.

Key words*: viscous incompressible fluid, regular precession.*