УДК 517.95+511.2

ЛОКАЛЬНА ЗАДАЧА ДЛЯ РІВНЯННЯ З ОПЕРАТОРОМ УЗАГАЛЬНЕНОГО ДИФЕРЕНЦІЮВАННЯ

М.П.Негрич, М.М.Симотюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім.Я.С.Підстригача НАН України; 79060, м. Львів, вул.Наукова, 3-б;

e-mail: marianegrych@gmail.com, quaternion@ukr.net

Досліджено задачу з локальними двоточковими умовами для рівняння з оператором узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва з комплексним аргументом. Отримано умови єдиності та існування розв'язку задачі. Доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) значень другого вузла інтерполяції.

Ключові слова: двоточкові умови, оператор узагальненого диференціювання.

1. Вступ. Оператори узагальненого диференціювання запровадили у середині XX ст. О. О. Гельфонд та О. Ф. Леонтьєв [1], досліджуючи розвинення цілих функцій в узагальнені ряди Фур'є. Нехай $F(z)$ – ціла функція з усіма ненульовими тейлорівськими коефіцієнтами

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nz^n\,,\ F_n\neq 0,\ n\geq 0\,.$$

Функція $F(z)$ породжує оператор узагальненого диференціювання D_F^m порядку m, дія якого на функцію $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}f_nz^n$, аналітичну в околі $z=0$, визначається рівністю

$$D_F^m f(z)=\sum_{n=m}^{\infty}f_n\frac{F_{n-m}}{F_n}z^{n-m}=\sum_{n=0}^{\infty}f_{n+m}\frac{F_n}{F_{n+m}}z^n\,.$$

Зауважимо, що $D_F^m=(d/dz)^m$, якщо $F(z)=e^z$.

Оператори D_F^m використовуються у різних задачах для диференціальних рівнянь. Зокрема, у роботі [2] досліджено питання про розв'язність лінійних диференціальних рівнянь, які містять оператор узагальненого диференціювання, у класах аналітичних функцій з певними обмеженнями зростання на нескінченності.

У праці [3] досліджено розв'язність задач Коші для неоднорідних рівнянь у згортках, які містять оператори узагальненого диференціювання за однією та багатьма змінними. Умови Коші задають значення шуканої функції та її похідних Гельфонда-Леонтьєва у початковій точці. Для розв'язків розглянутих задач отримано конструктивні формули у вигляді збіжних степеневих рядів. Встановлено умови існування, єдиності та неперервної залежності розв'язків від початкових умов та неоднорідного члена рівняння.

У праці [4] встановлено умови розв'язності (у просторах, які узагальнюють відомі простори типу S), задачі Коші та задачі з нелокальними умовами для еволюційних рівнянь, що містять оператори узагальненого диференціювання Гельфонда-Леонтьєва як скінченного, так і нескінченного порядків. Знайдено аналітичне зображення для розв'язків зазначених задач.

У даній роботі встановлено умови розв'язності локальної двоточкової задачі для диференціально-операторного рівняння, яке містить узагальнену похідну Гельфонда-Леонтьєва другого порядку.

2. Основні позначення. Через H позначимо сепарабельний гільбертів простір над полем $\mathbb{C}$ з ермітовим скалярним добутком $\langle\cdot,\cdot\rangle_H$ та базою $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$, ортонормованою щодо цього скалярного добутку. Нехай A – лінійна операція в просторі H, дія якої на елементах бази $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ визначається рівністю

$$Ae_k = \lambda_k e_k, \quad k \in \mathbb{N},$$

де $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ – така послідовність комплексних чисел, що $\lim\limits_{k\to\infty}|\lambda_k| = \infty$ і

$$0 < |\lambda_1| < \ldots < |\lambda_k| < \ldots$$

За лінійністю операцію A можна поширити на підпростір

$$D(A) = \left\{\varphi \in H : \sum_{k=1}^{\infty} \left(1+|\lambda_k|\right)^2 \left|\langle\varphi, e_k\rangle_H\right|^2 < \infty\right\},$$

при цьому

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \langle\varphi, e_k\rangle_H \, e_k,$$

якщо $\varphi = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle\varphi, e_k\rangle_H \, e_k$ і $\varphi \in D(A)$. Таким чином, виникає оператор $A : D(A) \to H$ з областю визначення $D(A)$, щільною в H. Для додатних чисел $\alpha, \beta, \gamma > 0$ через $E^{\gamma}_{\alpha,\beta}$ позначимо підпростір

$$\left\{\varphi \in H : \left\|\varphi; E^{\gamma}_{\alpha,\beta}\right\| \equiv \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} w_k^2(\alpha,\beta,\gamma) \left|\langle\varphi, e_k\rangle_H\right|^2} < \infty\right\},$$

де $w_k(\alpha,\beta,\gamma) = \left(1+|\lambda_k|\right)^{\alpha} \exp\left(\alpha|\lambda_k|^{\gamma}\right), \quad k \in \mathbb{N}$. Очевидно, що область визначення $D(A)$ оператора A збігається з простором $E^{0}_{1,0}$.

Функцію $u : B \to H$ будемо називати аналітичною в одиничному крузі $B = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, якщо для кожної точки $z_0 \in B$ існує границя

$$\lim_{z\to z_0} \frac{u(z) - u(z_0)}{z - z_0} = u'(z_0).$$

Простір усіх H-значних функцій $u(z):\overline{B}\to H$, які є аналітичними в B і неперервними на $\overline{B}=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 1\}$, позначимо через U. У просторі U запровадимо норму

$$\|u(z);U\|=\max_{|z|\le 1}\|u(z);E^0_{0,0}\|.$$

Для функції $u\in U$ символом $D^2_F\,u(z)$ позначимо ряд:

$$D^2_F\,u(z)=\sum_{k=1}^{\infty}D^2_F\left[\langle u(z),e_k\rangle_H\right]e_k.$$

Зауважимо, що з теореми 65 [5, с. 220] випливає, що для кожного $k\in\mathbb{N}$ функції $\langle u(z),e_k\rangle_H$ є аналітичними функціями в крузі B.

3. Формулювання задачі. Розглянемо таку двоточкову задачу:

$$D^2_{F(z)}u(z)=Au(z),\ z\in\mathbb{C},\ |z|<1, \tag{1}$$

$$u(0)=\varphi_1,\quad u(z_1)=\varphi_2,\quad |z_1|\le 1, \tag{2}$$

де $\varphi_1,\varphi_2\in H$, функція $F(z)$ має вигляд

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty}F_nz^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{z^n}{m_1\ldots m_n},\ F_0=1,$$

а послідовність $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{C}\setminus\{0\}$ задовольняє умову

$$\exists\gamma,p>0\qquad \lim_{n\to\infty}\frac{|m_n|}{n^p}=\gamma.$$

Функцію $u\in U$ будемо називати розв'язком задачі (1)–(2), якщо вона задовольняє рівняння (1), умови (2), а також

$$\|Au(z);U\|+\|D^2_Fu(z);U\|<\infty.$$

4. Побудова розв'язку. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду:

$$u(z)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(z)e_k, \tag{3}$$

де $u_k(z)=\langle u(z),e_k\rangle_H$, $k\in\mathbb{N}$. Підставляючи ряд (3) у рівняння (1) та умови (2), для коефіцієнтів $u_k(z)$, $k\in\mathbb{N}$, отримуємо задачу

$$D^2_{F(z)}u_k(z)=\lambda_ku_k(z),\quad |z|<1, \tag{4}$$

$$u_k(0)=\varphi_{1k},\ u_k(z_1)=\varphi_{2k}, \tag{5}$$

де $\varphi_{jk}=\langle\varphi_j,e_k\rangle_H$, $j=1,2$. Нехай $u_k(z)=\sum_{n=0}^{\infty}u_{k,n}\,z^n$ – аналітичний в крузі B розв'язок рівняння (4). Для кожного $k\in\mathbb{N}$ коефіцієнти $u_{k,n}$, $n\ge 0$, розв'язку $u_k(z)$ задовольняють таке рекурентне співвідношення:

$$u_{k,n+2}\frac{F_{n+2}}{F_n}=\lambda_ku_{k,n},\qquad n\ge 0. \tag{6}$$

З рівностей (6) випливає, що

$$u_{k,2n} = u_{k,0}\,\lambda_k^{2n}\,\frac{F_{2n}}{F_0}, \quad u_{k,2n+1} = u_{k,1}\,m_1\lambda_k^{2n+1}\,\frac{F_{2n+1}}{F_1}, \qquad n \ge 0 .$$

Таким чином, для коефіцієнтів $u_k(z)$, $k \in \mathbb{N}$, отримуємо зображення:

$$u_k(z) = u_{k,0}ch_F\left(\lambda_k z\right) + u_{k,1}m_1 sh_F\left(\lambda_k z\right), \tag{7}$$

де

$$ch_F\left(\lambda_k z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n}\left(\lambda_k z\right)^{2n} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\lambda_k z\right)^{2n}}{m_1 m_2 ... m_{2n}}, \tag{8}$$

$$sh_F\left(\lambda_k z\right) = \sum_{n=0}^{\infty} F_{2n+1}\left(\lambda_k z\right)^{2n+1} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\lambda_k z\right)^{2n+1}}{m_1 m_2 ... m_{2n} m_{2n+1}}. \tag{9}$$

Зауважимо, що у випадку, коли $F(z) = e^z$, функції (8), (9) збігаються зі стандартними гіперболічними функціями.

Для знаходження сталих $u_{k,0}, u_{k,1}$, $k \in \mathbb{N}$, у формулі (7) підставимо функцію $u_k(z)$ в умови (5). Отримаємо наступну систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} u_{k,0} = \varphi_{1,k}, \\ u_{k,0}ch_F\left(\lambda_k z\right) + u_{k,1}m_1 sh_F\left(\lambda_k z\right) = \varphi_{2,k}. \end{cases} \tag{10}$$

Із системи (10) маємо:

$$u_{k,0} = \varphi_{1,k}, \quad u_{k,1} = \frac{\varphi_{2,k} - \varphi_{1,k}ch_F\left(\lambda_k z_1\right)}{m_1 sh_F\left(\lambda_k z_1\right)}, \tag{11}$$

Якщо для всіх $k \in \mathbb{N}$ справджується нерівність

$$sh_F\left(\lambda_k z_1\right) \ne 0, \tag{12}$$

тоді розв'язок $u_k(t)$ має наступний вигляд:

$$u_k(t) = \varphi_{1,k}\, f_{1,k}\left(f_{1,k}(\lambda_k t) - \frac{f_{1,k}(\lambda_k T)}{f_{2,k}(\lambda_k T)}\, f_{2,k}(\lambda_k t)\right) + \varphi_{2,k}\,\frac{f_{2,k}(\lambda_k t)}{f_{2,k}(\lambda_k T)}. \tag{13}$$

Теорема 1. *Нехай* $\exists \gamma, p > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|m_n|}{n^p} = \gamma$, *і для всіх* $k \in \mathbb{N}$ *справджується наступна нерівність*

$$\left| f_{2,k}(\lambda_k T)\right| \ge C_1\left|\lambda_k\right|^{-\omega} e^{-\delta\left|\lambda_k\right|^{-1/p}}, \; \omega \in \mathbb{R}, \tag{14}$$

$\varphi_1, \varphi_2 \in E^{1/p}_{\omega+2,\delta+\frac{2p}{\gamma^{1/p}}}$, *тоді існує єдиний розв'язок задачі* (1), (2), *який неперервно залежить від* φ_1, φ_2.

Теорема 2 (метрична). *Якщо* $m_n = n$ $\left(F(t) = e^t\right)$ *і*

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\left|\lambda_k\right|^{\mu}} < \infty, \;\; \mu > 0,$$

тоді нерівність (10) виконується для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}$*) чисел* $T \in \overline{B}$ *для всіх* $k \in \mathbb{N}$*, якщо* $\omega > 1 + \frac{\mu}{2}, \ \delta > 0, \ p = 1.$

Якщо $\exists \gamma, p > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|m_n|}{n^p} = \gamma$, тоді функція $F(t)$ є цілою і для неї виконуються такі оцінки:

$$\max_{|t|\le 1}\left\{\left| f_{1,k}(\lambda_k t)\right|, \left| D_F^2 f_{1,k}(\lambda_k t)\right|\right\} \le C_2 \left(1+|\lambda_k|\right)^2 e^{\frac{p}{\gamma^{1/p}}|\lambda_k|^{1/p}},$$

$$\max_{|t|\le 1}\left\{\left| f_{2,k}(\lambda_k t)\right|, \left| D_F^2 f_{2,k}(\lambda_k t)\right|\right\} \le C_3 \left(1+|\lambda_k|\right)^2 e^{\frac{p}{\gamma^{1/p}}|\lambda_k|^{1/p}}.$$

$$u_k(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{k,n}(t) t^n = u_{k,0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda_k t\right)^{2n} \frac{F_{2n}}{F_0} + u_{k,1} m_1 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\lambda_k t\right)^{2n+1} \frac{F_{2n+1}}{F_1} =$$
$$= u_{k,0} f_{1,k}\left(\lambda_k t\right) + u_{k,1} m_1 f_{1,k}\left(\lambda_k t\right),$$

Зауважимо, що якщо $F(t) = e^t$, то $f_{1,k}(\lambda_k t) = ch(\lambda_k t), \ f_{2,k}(\lambda_k t) = sh(\lambda_k t)$.

1. *Гельфонд А. О., Леонтьєв А. Ф.* Об одном обобщении ряда Фурье // Матем. сб., 29 (71) – 1951. – № 3, С. 477 –500.
2. *Коробейник Ю. Ф., Демченко Т И.* К вопросу о разрешимости линейных дифференциальных уравнений в пространствах аналитических функций // Дифференц. уравнения. – 1971. – Т. 7, № 9, С. 1639–1648.
3. *Громов В. П.* Задача Коши для уравнений в свертках в пространствах аналитических векторнозначних функций // Матем. заметки. – 2007. – 82, № 2. – С. 190–200.
4. *Городецький В. В., Мартинюк О. В.* Задача Коші та двоточкова задача для еволюційних рівнянь з операторами узагальненого диференціювання // Доповіді НАН України. – 2013. – № 3. – С. 7–13.
5. *W.Belmer.* Formal power series and linear systems of meromorphic ordinary differential equations. Springer, NewYork, 2000. – 319 p.
6. *Муллабаева А. У.* Оператор обобщенной свертки и задача Валле Пуссена // Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. – Уфа: Башкирский государственний университет. – 2016. – 78 с.
7. *Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М.* Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.

ON LOCAL TWO-POINT PROBLEM FOR THE EQUATION WITH THE OPERATOR OF GENERALIZED DIFFERENTIATION

M. P. Negrych, M.M. Symotyuk

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine; 79060, Lviv, Naukova Str., 3-b;

e-mail: marianegrych@ukr.net, quaternion@ukr.net

A local two-point problem with the oprator of Gelfond-Leontiev generalized differentiation with a complex argument is investigated. The conditions of unity and existence of the solution of the problem are obtained. It is proved that such conditions are satisfied for almost all (relative to Lebesgue measure) node of interpolation.
Key words: *local two-point problem, the operator of Gelfond-Leontiev generalized differentiation.*