УДК 517.9
DOI: 10.31471/2304-7399-2020-1(59)-29-37

ВИРОДЖЕНА КРАЙОВА ЗАДАЧА ЗІ ЗБУРЮЮЧОЮ МАТРИЦЕЮ ПРИ ПОХІДНІЙ

Л. М. Шегда
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76018, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15;
e-mail: shegda.luba@gmail.com

У статті розглядається вироджена нетерова крайова задача зі збурюючою матрицею при похідній, в якій крайова умова задається лінійним векторним функціоналом. Запропоновано алгоритм відшукання сімейства лінійно незалежних розв'язків крайових задач з малим параметром у загальному випадку, коли число крайових умов, які задаються лінійним векторним функціоналом не співпадає з числом невідомих у виродженій диференціальній системі. Використано апарат псевдообернених матриць за Муром-Пенроузом. Застосовуючи метод Вішика-Люстерника, розв'язок крайової задачі знайдено у вигляді частини ряду Лорана за степенями малого параметру ε*. Отримано умови біфуркації розв'язків лінійних вироджених нетерових крайових задач з малим параметром в припущені, що незбурена вироджена диференціальна система зводиться до центральної канонічної форми.*

Ключові слова: *канонічна форма, вироджена нетерова крайова задача, псевдообернена матриця.*

В останні роки у прикладних галузях з'являються математичні моделі процесів, які описуються взаємозв'язаними системами алгебраїчних і диференціальних рівнянь. Різноманітні практичні задачі приводять до математичних моделей, що описуються системами диференціальних рівнянь з різного роду виродженнями: наявністю при старших похідних виродженої матриці, малих параметрів або такої матриці, яка вироджується при певних значеннях незалежної змінної чи параметрів. Відомо, що деякі задачі оптимального керування, лінійного програмування, теорії електричних кіл, економіки, автоматичного регулювання, теорії пружності, гідродинаміки, хімічної та біологічної кінетики тощо моделюються системами диференціальних рівнянь з виродженою матрицею при похідній вигляду

$$B(t)\,\frac{dx}{dt} = A(t)\,x + f(t)\,.$$

У даній роботі будемо розглядати вироджену лінійну неоднорідну крайову задачу

$$(B(t)+\varepsilon B_1(t))\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t), \qquad t\in[a;b] \tag{1}$$

$$l\,x(\cdot)=\alpha, \quad \alpha\in R^m, \tag{2}$$

де $A(t),\ B(t),\ B_1(t)$ – $(n\times n)$-вимірні матриці, компоненти яких є дійсними, достатню кількість разів неперервно диференційовними на $[a;b]$ функціями: $A(t),\ B(t),\ B_1(t)\in C^{3q-2}[a;b]$; $\det B(t)=0\ \ \forall t\in[a;b]$; $f(t)$ – n-вимірний вектор-стовпець з простору $C^{q-1}[a;b]$; α – m-вимірний вектор-стовпець констант; $\alpha\in R^m$; l – лінійний векторний функціонал, означений на просторі n-вимірних, неперервних на $[a;b]$ вектор-функцій: $l=\mathrm{col}\,(l_1,...,l_m):C\,[a;b]\to R^m,\ l_i:C[a;b]\to R$.

Припустимо, що породжуюча крайова задача

$$B(t)\frac{dx}{dt}=A(t)x+f(t), \qquad t\in[a;b] \tag{3}$$

$$l\,x(\cdot)=\alpha, \quad \alpha\in R^m, \tag{4}$$

отримана з (1), (2) при $\varepsilon=0$, не має розв'язків при довільних неоднорідностях $f(t)$ з простору $C^{q-1}[a;b]$ і $\alpha\in R^m$.

Виникає питання, чи можна за допомогою лінійних збурень зробити крайову задачу (3), (4) розв'язною? І якщо можна, то яким повинен бути збурюючий доданок – матриця $B_1(t)$ в диференціальній системі (1), щоб крайова задача (1), (2) стала розв'язною при довільних неоднорідностях $f(t)$ з відповідного простору і $\alpha\in R^m$.

Будемо вважати, що система (3) невиродженим лінійним перетворенням зводиться до центральної канонічної форми [1, 2].

Згідно теоремою 1 [3], породжуюча крайова задача (3), (4) має r-параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$x(t,c_r)=X_r(t)c_r+(Gf)(t)+X_{n-s}(t)Q^{+}\alpha, \tag{5}$$

$$[r=(n-s)-n_1] \quad \forall\, c_r\in R^r$$

тоді і тільки тоді, коли неоднорідності $f(t)\in C^{q-1}[a,b]$ в диференціальній системі та $\alpha\in R^m$ у крайовій умові задовольняють d лінійно незалежних умов

$$P_{Q_d^*}\Big\{\alpha-l\,\Big(\int_a^{\cdot}X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)\,f(\tau)d\tau-$$

$$-\Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1}I^k\frac{d^k}{dt^k}\Big(\big[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)\big]^{-1}\Psi^*(t)\,f(t)\Big)(\cdot)\Big)\Big\}=0, \qquad d=m-n_1. \tag{6}$$

Поставлену задачу будемо розв'язувати використовуючи метод Вішика-Люстерника [4]. Розв'язок крайової задачі (1), (2) шукаємо в вигляді частини ряду Лорана за степенями малого параметру ε:

$$x(t,\varepsilon)=\sum_{i=-1}^{+\infty}\varepsilon^i x_i(t)=\frac{x_{-1}(t)}{\varepsilon}+x_0(t)+\varepsilon x_1(t)+\varepsilon^2 x_2(t)+\ldots \quad . \tag{7}$$

Підставимо ряд (7) в крайову задачу (1), (2) і прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях ε. При ε^{-1} для знаходження коефіцієнта $x_{-1}(t)$ ряду (7) отримаємо вироджену лінійну однорідну крайову задачу

$$B(t)\dot{x}_{-1}(t)=A(t)\,x_{-1}(t), \qquad lx_{-1}(\cdot)=0\,. \tag{8}$$

Згідно з (5), однорідна крайова задача (8) має r – параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків:

$$x_{-1}=x_{-1}(t,c_{-1})=X_{n-s}(t)P_{Q_r}c_{-1}=X_r(t)c_{-1}, \qquad c_{-1}\in R^r.$$

де r-вимірний вектор-стовбець c_{-1} буде визначений з умови розв'язності задачі для знаходження коєфіцієнта $x_0(t)$ ряду (7). Для знаходження коефіцієнта $x_0(t)$ ряду (7) при ε^0 отримаємо вироджену лінійну неоднорідну крайову задачу:

$$B(t)\dot{x}_0(t)=A(t)\,x_0(t)-B_1(t)\,\dot{x}_{-1}(t,c_{-1})+f(t), \tag{9}$$
$$l\,x_0(\cdot)=\alpha$$

Критерій (6) розв'язності задачі (9) має вигляд

$$P_{Q_d^*}\Big\{\alpha-l\,\Big(\int_a^{\cdot}X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)\Big\{-B_1(\tau)\dot{x}_{-1}(\tau,c_{-1})+f(\tau)\Big\}d\tau-$$
$$-\Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1}I^k\frac{d^k}{dt^k}\Big(\big[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)\big]^{-1}\Psi^*(t)\Big\{-B_1(t)\dot{x}_{-1}(t,c_{-1})+f(t)\Big\}\Big)(\cdot)\Big)\Big\}=0,$$

звідки з урахуванням виду $x_{-1}(t,c_{-1})$ отримаємо алгебраїчну відносно $c_{-1}\in R^r$ систему

$$B_0c_{-1}=-P_{Q_d^*}\Big\{\alpha-l\,\Big(\int_a^{\cdot}X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)\,f(\tau)d\tau-$$
$$-\Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1}I^k\frac{d^k}{dt^k}\Big(\big[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)\big]^{-1}\Psi^*(t)\,f(t)\Big)(\cdot)\Big)\Big\}, \tag{10}$$

в якій B_0 – $(d\times r)$-вимірна матриця:

$$B_0=-P_{Q_d^*}l\Big(\int_a^{\cdot}X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)\Big\{-B_1(\tau)\dot{X}_r(\tau)\Big\}d\tau-$$
$$-\Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1}I^k\frac{d^k}{dt^k}\Big(\big[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)\big]^{-1}\Psi^*(t)\Big\{-B_1(t)\dot{X}_r(t)\Big\}\Big)(\cdot)\Big).$$

Для розв'язності системи (10) необхідно і достатньо, щоб виконувалась умова

$$P_{B_0^*}\, P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - l\,\Big(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)\, f(\tau)d\tau -$$

$$-\Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k}\Big(\big[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)\big]^{-1}\Psi^*(t)\, f(t)\Big)(\cdot)\Big)\Big\} = 0\,.$$

Оскільки умова (6) не виконується, з останнього виразу одержуємо умову $P_{B_0^*} = 0$, яка еквівалентна [5] умові

$$rank\ B_0 = d \le r\,. \qquad (11)$$

Тут $P_{B_0^*} - (d\times d)$-вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^d на ядро $kerB_0^*$ матриці $B_0^* = B_0^T$.

Множина розв'язків алгебраїчної відносно $c_{-1}\in R^r$ системи (10) має вигляд

$$c_{-1} = \bar{c}_{-1} + P_\rho c_\rho, \quad \forall c_\rho \in R^\rho,$$

де

$$\bar{c}_{-1} = -B_0^+\, P_{Q_d^*}\Big\{\alpha - l\,\Big(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)\, f(\tau)\, d\tau -$$

$$-\Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k}\Big(\big[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)\big]^{-1}\Psi^*(t)\, f(t)\Big)(\cdot)\Big)\Big\};$$

B_0^+ – єдина псевдообернена до B_0 матриці; $P_{B_0} - (r\times r)$ – вимірна матриця (ортопроектор), яка проектує простір R^r на ядро $\ker B_0$. Так як $rankP_{B_0} = r - rankB_0 = r - d = n - s - m = \rho,$ то матрицю P_{B_0} замінимо $(r\times\rho)$-вимірною матрицею P_ρ, яка складається з ρ лінійно незалежних стовбців матриці P_{B_0}.

Однорідна крайова задача (8) має ρ – параметричну сім'ю розв'язків (з урахуванням виразу для c_{-1})

$$x_{-1}(t, c_\rho) = \bar{x}_{-1}(t, \bar{c}_{-1}) + X_r(t)P_\rho c_\rho, \quad \forall c_\rho \in R^\rho, \qquad (12)$$

$$\bar{x}_{-1}(t, \bar{c}_{-1}) = X_r(t)\bar{c}_{-1}.$$

Загальний розв'язок крайової задачі (9) при умові (11) має вигляд

$$x_0(t, c_0) = X_r(t)c_0 + \Big(G\Big[-B_1(\cdot)\dot{\bar{x}}_{-1}(\cdot, \bar{c}_{-1}) + f(\cdot)\Big]\Big)(t) + X_{n-s}(t)Q^+\alpha +$$

$$+\Big[\Big(G\Big[-B_1(\cdot)\dot{X}_r(\cdot)\Big]\Big)(t)\Big]P_\rho\, c_\rho = X_r(t)c_0 + F_{-1}(t) + K_{-1}(t)P_\rho\, c_\rho,$$

де $$F_{-1}(t)=\left(G\left[-B_1(\cdot)\dot{\bar{x}}_{-1}(\cdot,\bar{c}_{-1})+f(\cdot)\right]\right)(t)+X_{n-s}(t)Q^{+}\alpha;$$

$$K_{-1}(t)=\left(G\left[-B_1(\cdot)\dot{X}_r(\cdot)\right]\right)(t);$$

c_0 – r-вимірний вектор констант, який буде визначено з умови розв'язності крайової задачі для знаходження коефіцієнта $x_1(t)$ ряду (7). Для знаходження коефіцієнта $x_1(t)$ ряду (7) при ε^1 отримаємо вироджену лінійну однорідну крайову задачу:

$$B(t)\dot{x}_1(t)=A(t)x_1(t)-B_1(t)\dot{x}_0(t,c_0),\tag{13}$$
$$l\,x_1(\cdot)=0$$

З критерію розв'язності крайової задачі (13) отримаємо алгебраїчну відносно $c_0\in R^r$ систему

$$B_0c_0=P_{Q_d^*}\,l\left(\int_a^{\cdot}X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)\left[-B_1(\tau)\left\{\dot{F}_{-1}(\tau)+\dot{K}_{-1}(\tau)P_\rho c_\rho\right\}\right]d\tau-\right.$$
$$\left.-\Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1}I^k\frac{d^k}{dt^k}\left(\left[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)\right]^{-1}\Psi^*(t)\left[-B_1(t)\left\{\dot{F}_{-1}(t)+\dot{K}_{-1}(t)P_\rho c_\rho\right\}\right]\right)(\cdot)\right)$$

При умові (11) з останньої рівності знаходимо $c_0\in R^r$:

$$c_0=B_0^+P_{Q_d^*}l\left(\int_a^{\cdot}X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)\left[-B_1(\tau)\left\{\dot{F}_{-1}(\tau)+\dot{K}_{-1}(\tau)P_\rho c_\rho\right\}\right]d\tau-\right.$$
$$\left.-\Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1}I^k\frac{d^k}{dt^k}\left(\left[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)\right]^{-1}\Psi^*(t)\left[-B_1(t)\left\{\dot{F}_{-1}(t)+\dot{K}_{-1}(t)P_\rho c_\rho\right\}\right]\right)(\cdot)\right)+P_\rho c_\rho.$$

Останній вираз запишемо у вигляді

$$c_0=\bar{c}_0+D_0P_\rho c_\rho,\qquad \forall c_\rho\in R^\rho,$$

де

$$\bar{c}_0=B_0^+P_{Q_d^*}l\left(\int_a^{\cdot}X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)\left[-B_1(\tau)\dot{F}_{-1}(\tau)\right]d\tau-\right.$$
$$\left.-\Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1}I^k\frac{d^k}{dt^k}\left(\left[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)\right]^{-1}\Psi^*(t)\left[-B_1(t)\dot{F}_{-1}(t)\right]\right)(\cdot)\right).$$

$$D_0=I_r+B_0^+P_{Q_d^*}l\left(\int_a^{\cdot}X_{n-s}(\cdot)Y_{n-s}^*(\tau)\left[-B_1(\tau)\dot{K}_{-1}(\tau)\right]d\tau-\right.$$
$$\left.-\Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1}I^k\frac{d^k}{dt^k}\left(\left[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)\right]^{-1}\Psi^*(t)\left[-B_1(t)\dot{K}_{-1}(t)\right]\right)(\cdot)\right).$$

Таким чином, крайова задача (9) при умові (11) має ρ-параметричну сім’ю розв'язків

$$x_0\left(t, c_\rho\right) = \overline{x}_0(t, \overline{c}_0) + \overline{X}_0\left(t\right) P_\rho c_\rho, \qquad \forall c_\rho \in R^\rho,$$

де

$$\overline{x}_0(t, \overline{c}_0) = X_r(t)\overline{c}_0 + F_{-1}\left(t\right);$$
$$\overline{X}_0\left(t\right) = X_r(t) D_0 + K_{-1}\left(t\right).$$

При умові (11) крайова задача (13) має ρ- параметричну сім'ю розв'язків

$$x_1\left(t, c_1\right) = X_r\left(t\right)c_1 + F_0\left(t\right) + K_0\left(t\right) P_\rho c_\rho,$$

в якій c_1 – r-вимірний вектор констант, який буде визначено на наступному кроці з умови розв'язності крайової задачі для знаходження коефіцієнта $x_2\left(t\right)$ ряду (7). Продовжуючи цей процес побачимо, що коефіцієнти $x_i\left(t\right)$ ряду (7) визначаються з крайової задачі

$$B(t)\,\dot{x}_i(t) = A(t)\,x_i(t) - B_1(t)\,\dot{x}_{i-1}(t, c_{i-1}),$$
$$l\,x_i(\cdot) = 0$$

яка при умові (11) має ρ – параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків

$$x_i\left(t, c_i\right) = \overline{x}_i(t, \overline{c}_i) + \overline{X}_i\left(t\right) P_\rho c_\rho, \qquad \forall c_\rho \in R^\rho, \qquad i = 1, 2, ...$$

де

$$\overline{x}_i\left(t, \overline{c}_i\right) = X_r(t)\overline{c}_i + F_{i-1}\left(t\right),$$

$$\overline{c}_i = B_0^+ P_{Q_d^*} l\left(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot) Y_{n-s}^*(\tau)\left[-B_1(\tau)\dot{F}_{i-1}(\tau)\right] d\tau -\right.$$
$$\left. -\Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k}\left(\left[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)\right]^{-1}\Psi^*(t)\left[-B_1(t)\dot{F}_{i-1}(t)\right]\right)(\cdot)\right);$$

$$\overline{X}_i\left(t\right) = X_r(t) D_i + K_{i-1}\left(t\right), \qquad \overline{X}_{-1}(t) = X_r(t), \tag{14}$$

$$D_i = I_r + B_0^+ P_{Q_d^*} l\left(\int_a^{\cdot} X_{n-s}(\cdot) Y_{n-s}^*\left[-B_1(\tau)\dot{K}_{i-1}(\tau)\right] d\tau -\right.$$
$$\left. -\Phi(\cdot)\sum_{k=0}^{q-1} I^k \frac{d^k}{dt^k}\left(\left[\Psi^*(t)L(t)\Phi(t)\right]^{-1}\Psi^*(t)\left[-B_1(t)\dot{K}_{i-1}(t)\right]\right)(\cdot)\right);$$

$$F_{i-1}(t) = \left(G\left[-B_1(\cdot)\dot{\overline{x}}_{i-1}(\cdot, \overline{c}_{-1})\right]\right)(t); \qquad K_{i-1}(t) = \left(G\left[-B_1(\cdot)\dot{\overline{X}}_{i-1}(\cdot)\right]\right)(t).$$

Отже, справедливим є наступне твердження.

Теорема. *Нехай вироджена породжуюча крайова задача (3), (4) при довільних неоднорідностях* $f\left(t\right) \in C^{q-1}\left[a, b\right]$ *і* $\alpha \in R^m$ *не має* *розв'язків. Тоді крайова задача (1), (2) при умові*

$$rank\ B_0 = d, \quad d = m - rahk\, Q,$$

має $\rho = n - s - m$ -параметричну сім'ю лінійно незалежних розв'язків у вигляді частини ряду Лорана:

$$x\left(t, c_\rho\right) = \sum_{i=-1}^{+\infty} \varepsilon^i [\overline{x}_i \left(t, \overline{c}_i\right) + \overline{X}_i\left(t\right) P_\rho c_\rho], \qquad \forall c_\rho \in R^\rho, \tag{11}$$

де коефіцієнти $\overline{x}_i\left(t, \overline{c}_i\right)$, $\overline{c}_i$, $\overline{X}_i(t)$ визначаються з формул (14).

Зауваження. 1. Аналогічно [4,6] можна довести, що ряд (11) буде для кожного фіксованого достатньо малого $\varepsilon \in \left(0; \varepsilon_0\right]$ рівномірно збігатися при $\forall \quad t \in [a, b]$.

2. Умова (11) є достатньою умовою існування розв'язків крайової задачі (1), (2). У випадку, коли умова (11) не виконується, то розв'язки крайової задачі (1), (2) необхідно шукати у вигляді ряду (7) з від'ємними степенями малого параметра з ε, які менші за -1.

Приклад. Покажемо застосування теореми на прикладі наступної крайової задачі.

$$\left[\begin{pmatrix} \sin 2t - 1 & \cos 2t \\ -\cos 2t & \sin 2t - 1 \end{pmatrix} + \varepsilon B_1(t)\right] \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + f(t), \tag{15}$$

$$lx(\cdot) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(2\pi) = \alpha, \tag{16}$$

де $B_1(t) = \left\{b_{ij}(t)\right\}_{i,j=1}^{2}$.

Фундаментальна матриця відповідної однорідної незбуреної ($\varepsilon = 0,\ f = 0$) системи (15) має вигляд [3]:

$$X_1(t) = X_r(t) = X_{n-s}(t) = \begin{pmatrix} \cos t - \sin t \\ -(\cos t + \sin t) \end{pmatrix} e^{-t}.$$

У нашому випадку $n = 2, m = d = r = s = q = 1$, тоді $B_1(t) \in C^1[a; b]$.

Матриця Q, ортопроектори P_Q, P_{Q^*} на ядро і коядро матриці Q дорівнюють

$$Q = lX_1(\cdot) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} X_1(0) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} X_1(2\pi) = 0; \qquad Q^+ = 0.$$

$$P_{Q^*} = I_1 - QQ^+ = 1, \qquad P_{Q_d^*} = 1,$$

$$P_Q = I_1 - Q^+Q = 1, \qquad P_{Q_r} = 1.$$

Нехай породжуючи крайова задача

$$\begin{pmatrix} \sin 2t - 1 & \cos 2t \\ -\cos 2t & \sin 2t - 1 \end{pmatrix} \frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} x + f(t),$$

$$lx(\cdot) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(0) + \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} x(2\pi) = \alpha,$$

яка отримана з (15), (16) при $\varepsilon = 0$ не має розв'язків при довільних неоднорідностях $f(t) \in C[0, 2\pi]$ і $\alpha \in R^1$. Покажемо, як за допомогою лінійного збурення при похідній в диференціальній системі (15) $\varepsilon B_1(t)$ крайова задача (15), (16) буде розв'язною.

Матриця $Y_1(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix} e^t$ є фундаментальною матрицею системи спряженої до однорідної диференціальної системи (15),

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}; \qquad \Psi(t) = \begin{pmatrix} \sin t + \cos t \\ \sin t - \cos t \end{pmatrix}; \qquad \Psi^*(t) L\,\Phi(t) = 4.$$

Знайдемо матрицю B_0. В нашому випадку матриця B_0 є скаляр і обчислюємо її за формулою

$$B_0 = -l\left(\int_0^{\cdot} X_1(\cdot) Y_1^*(\tau)\left[-B_1(\tau)\dot{X}_1(\tau)\right]d\tau - \Phi(\cdot)\left(\left[\Psi^*(t)L\,\Phi(t)\right]^{-1}\Psi^*(t)\left[-B_1(t)\dot{X}_1(t)\right]\right)(\cdot)\right)$$

$$\dot{X}_1(t) = 2\begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix} e^{-t}.$$

$$B_0 = b_{21}(0) - b_{11}(0) + \left[b_{11}(2\pi) - b_{21}(2\pi) - b_{12}(2\pi) + b_{22}(2\pi)\right]e^{-2\pi}.$$

Отже, згідно доведеної теореми умови на компоненти b_{ij} збуреної матриці $B_1(t)$, при яких $B_0 \neq 0$, є достатніми умовами розв'язності крайової задачі (15), (16).

Отже, наведений приклад показує, що не розв'язну крайову задачу можна зробити розв'язною за допомогою збурень біля матриці при похідній.

Література

1. Самойленко А.М., Шкіль М.І., Яковець В.П. Лінійні системи диференціальних рівнянь з виродженням. – Київ: Вища школа, 2000. – 294с.
2. Бояринцев Ю.Е. Регулярные и сингулярные системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. – Новосибирск: Наука (Сиб. отд-ние), 1980. – 216 с.
3. Бойчук О.А., Шегда Л.М. Вироджені нетерові крайові задачі // Нелінійні коливання. − 2007. − Т.10, №3. − С. 303−312.
4. Вишик В.И. Люстерник Л.А. Решение некоторых задач о возмущениях в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений // Успехи мат. наук. – 1960. − 15, вып. 3. − С. 3−80.
5. Гантмахер Ф.Р. Теорія матриць. – М.: Наука, 1967. – 572 с.
6. Бойчук А.А., Коростиль И.А., Фечкан М. Условия бифуркации решения абстрактного волнового уравнения // Дифференц. Уравнения. – 2007. – 43, №4. –С. 481–487.

Стаття надійшла до редакційної колегії 04.11.2020 р.

DEGENERATE BOUNDARY-VALUE PROBLEMS WITH A PERTURBING MATRIX FOR A DERIVATIVE

L. M. Shehda
Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Karpatska Str.15;
ph: +380(342) 727131; e-mail: shegda.luba@gmail.com

In the paper, there is considered degenerated Noether boundary value problem with a perturbing matrix for a derivative, in which the boundary condition is given by a linear vector functional. We have proposed an algorithm to consrtuct a set of linearly independent solutions of boundary value problems with a small parameter in the general case, when the number of boundary conditions given by a linear vector functional does not match with the number of unknowns in a degenerate differential system. There is used the technique of pseudoinverse Moore-Penrose matrices. Applying the Vishik-Lyusternik method, the solution of the boundary value problem is obtained as part of the Laurent series in powers of small parameter. We obtain conditions for the bifurcation of solutions of linear degenerated Noether boundary-value problems with a small parameter under the assumption that the unperturbed degenerated differential system can be reduced to central canonical form.

Key words: *canonical form, degenerate Noether BVP, pseudoinverse matrice.*