Диференціальні рівняння і математична фізика

УДК 517.95+511.2
DOI: 10.31471/2304-7399-2020-1(59)-16-28

ЗАДАЧА ЛІНІЙНОГО СПРЯЖЕННЯ З НЕЛОКАЛЬНОЮ БАГАТОТОЧКОВОЮ УМОВОЮ ДЛЯ ПАРАБОЛО-ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ В ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБЛАСТІ

І. Я. Савка[1], Р. В. Шевчук[2], І. Р. Тимків[3]

[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України; 79060, м. Львів, вул. Наукова 3-б; e-mail: s-i@ukr.net;

[2]Національний університет «Львівська Політехніка»; 79013, м. Львів, вул. Степана Бандери, 12; e-mail: r.v.shevchuk@gmail.com;

[3]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76018, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; e-mail: tymkiv_if@ukr.net

Досліджується задача лінійного спряження з багатоточковою умовою за часовою змінною для мішаного рівняння параболо-гіперболічного типу другого порядку в циліндричній області, яка є декартовим добутком відрізка на багатовимірний тор. У шкалі просторів Соболєва отримано умови єдиності та існування розв'язку задачі. Доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) значень лівого крайнього вузла у багатоточковій умові.

Ключові слова: *задача лінійного спряження, багатоточкова умова, параболо-гіперболічне рівняння, простір Соболєва, проблема малих знаменників.*

1. Задачі спряження для мішаних рівнянь виникають при дослідженні процесів, що проходять в двошарових середовищах із різко відмінними фізичними властивостями [1-5]. Наприклад, у роботі [1] наводиться приклад задачі про рух газу по каналу з пористим навколишнім середовищем: рух газу в каналі описувався хвильовим рівнянням, а ззовні – рівнянням дифузії. Інші застосування параболо-гіперболічних рівнянь можна знайти у роботах [5,6]. Початок досліджень крайових задач для рівнянь мішаного типу було покладено Ф. Трікомі (1928) та С. Геллерстедтом (1935). Питання щодо розв’язності крайових задач з різними типами умов для параболо-гіперболічних рівнянь другого та вищих порядків активно розглядались у роботах різних авторів (Врагов В., Джураєв Т., Єлєєв В., Корзюк В., Нахушев А., Сабітов К., Салахітдінов М., Lions J., Al-Droubi A., Ashyralyev A. та інші, див. [9-15]). У роботах [16-18] для параболо-гіперболічного рівняння в прямокутній області змінних (t, x) досліджено крайові задачі спряження з локальними та нелокальними (в тому числі періодичними) умовами за змінними x та t. Для випадку багатьох змінних задачі спряження з нелокальними умовами для параболо-гіперболічного рівняння другого порядку вивчались у роботах [20-22]. Дана робота узагальнює результати роботи [22] на випадок задачі з умовами лінійного спряження.

Нехай $\Omega^p = (R/2\pi Z)^p$ – p-вимірний тор, $D^p = (-\alpha, \beta) \times \Omega^p$ – циліндрична область змінних (t, x), де $\alpha > 0, \beta > 0$, $x = (x_1, .., x_p)$, а поверхня $\{t = 0\} \times \Omega^p$ розбиває область D^p на дві підобласті: $D_-^p = (-\alpha, 0) \times \Omega^p$ і $D_+^p = (0, \beta) \times \Omega^p$.

Запровадимо такі функціональні простори: H_q, $q \in R$, – простір, одержаний поповненням простору скінченних сум $\varphi(x) = \sum_{k \in Z^p} \varphi_k e^{i(k,x)}$, за нормою $\|\varphi; H_q\| = \sqrt{\sum_{k \in Z^p} |\varphi_k|^2 (1 + \|k\|)^{2q}}$, де $k = (k_1, .., k_p)$ – вектор з цілими координатами, $\|k\| = \sqrt{k_1 + .. + k_p}$, φ_k – комплексне число; $C^n([0,T]; H_q)$, $n \in Z_+$, – простір функцій $u(t, x) = \sum_{k \in Z^p} u_k(t) e^{i(k,x)}$, $u_k(t) \in C([0,T])$, таких, що для кожного фіксованого $t \in [0,T]$ похідні $\dfrac{\partial^s u(t,x)}{\partial t^s} := \sum_{k \in Z^p} u_k^{(s)}(t) e^{i(k,x)}$, $s \in \{0, 1, \ldots, n\}$, належать до простору H_q і є неперервними за t в нормі цього простору

$$\left\| u; C^n([0,T]; H_q) \right\| = \sum_{s=0}^{n} \max_{t \in [0,T]} \left\| \frac{\partial^s u(t,\cdot)}{\partial t^s}; H_{q-s} \right\|.$$

2. В області D розглянемо задачу знаходження розв’язку $u = u(t, x)$, який задовольняє параболо-гіперболічне рівняння

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \Delta u = 0, \ (t,x) \in D_-^p, \\ u_t - b\Delta u = 0, \quad (t,x) \in D_+^p, \end{cases} \tag{1}$$

умови лінійного спряження (склеювання) при $t = 0$:

$$\begin{aligned} u(-0,x) - \nu_1 u(+0,x) &= \varphi_1(x), \\ u_t(-0,x) - \nu_2 u_t(+0,x) &= \varphi_2(x), \end{aligned} \qquad x \in \Omega^p, \tag{2}$$

та m-багатоточкову нелокальну умову, яка пов'язує шуканий розв'язок у r точках при $t < 0$ та у $(m-r)$ точках при $t > 0$:

$$B[u] \equiv \sum_{j=1}^{r} \left(\mu_j u(t_j, x) + \tilde{\mu}_j u_t(t_j, x) \right) + \sum_{j=r+1}^{m} \mu_j u(t_j, x) = \psi(x), \ x \in \Omega^p, \tag{3}$$

де $a, b, \nu_1, \nu_2, \mu_j, \tilde{\mu}_j, t_j$ – дійсні числа, m, r – деякі натуральні числа, причому

$$a > 0, b > 0, \ \nu_1 \nu_2 \neq 0, \ m > r > 0,$$

$$-\alpha = t_1 < t_2 < \ldots < t_r < 0 < t_{r+1} < t_{r+2} < \ldots < t_{m-1} < t_m = \beta,$$

а $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ – задані функції із шкали просторів $\{H_q\}_{q \in R}$.

Частковий випадок задачі (1)–(3) у випадку

$$\nu_1 = \nu_2 = 1, \ \varphi_1 \equiv \varphi_2 \equiv 0, \tilde{\mu}_1 = \ldots = \tilde{\mu}_r = 0$$

було розглянуто у роботі [22].

Означення: *Розв'язком задачі* (1)–(3) *називаємо таку функцію* $u = u(t,x)$, *що*

$$u \in C^2([-\alpha, 0]; H_q) \cap C^1([0, \beta]; H_q), \tag{4}$$

$$\left\| u_{tt} - a^2 \Delta u; C([-\alpha, 0]; H_{q-2}) \right\| = 0, \quad \left\| u_t - b\Delta u; C([0,\beta]; H_{q-2}) \right\| = 0, \tag{5}$$

$$\begin{gathered} \lim_{\varepsilon \to +0} \left\| u(-\varepsilon, \cdot) - \nu_1 u(+\varepsilon, \cdot) - \varphi_1; H_q \right\| = 0, \\ \lim_{\varepsilon \to +0} \left\| u_t(-\varepsilon, \cdot) - \nu_2 u_t(+\varepsilon, \cdot) - \varphi_2; H_q \right\| = 0, \\ \left\| B[u] - \psi; H_q \right\| = 0. \end{gathered} \tag{6}$$

3. Розв'язок задачі (1)–(3) будемо шукаємо у вигляді ряду Фур'є

$$u(t,x) = \sum_{k \in Z^p} u_k(t) e^{i(k,x)}. \tag{7}$$

Тоді з умов (4)–(6) випливає, що кожна з функцій $u_k(t)$, $k \in Z$, у залежності від знаку змінної t є розв'язком рівняння

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 u_k(t)}{dt^2} + a^2 \|k\|^2 u_k(t) = 0, \ t < 0, \\ \dfrac{du_k(t)}{dt} + b\|k\|^2 u_k(t) = 0, \quad t > 0, \end{cases} \tag{8}$$

справджує умови лінійного спряження

$$u_k(-0)-\nu_1 u_k(+0)=\varphi_{1k}, \quad \frac{du_k(-0)}{dt}-\nu_2\frac{du_k(+0)}{dt}=\varphi_{2k}, \tag{9}$$

і нелокальну умову

$$B[u_k]\equiv\sum_{j=1}^{r}\left(\mu_j u_k(t_j)+\tilde{\mu}_j\frac{du_k(t_j)}{dt}\right)+\sum_{j=r+1}^{m}\mu_j u_k(t_j)=\psi_k, \tag{10}$$

де $\varphi_{1k}, \varphi_{2k}, \psi_k$ – коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_1, \varphi_2, \psi$ відповідно.

Розв'язок рівняння (8), що справджує умови (9), зображується формулами

$$u_k(t)=\begin{cases}\nu_1 C_k+\varphi_{2k}t+\varphi_{1k}, & t<0,\\ C_k, & t>0,\end{cases} \qquad k=0, \tag{11}$$

$$u_k(t)=\begin{cases}\left(\dfrac{\varphi_{2k}}{a\|k\|}-\dfrac{b}{a}\nu_2\|k\|C_k\right)\sin(a\|k\|t)+(\nu_1 C_k+\varphi_{1k})\cos(a\|k\|t), & t<0,\\ C_k e^{-b\|k\|^2 t}, & t>0,\end{cases} \tag{12}$$

для $k\in Z^p\setminus\{0\}$. Далі сталі C_k будемо визначати з умов (10):

$$\sum_{j=1}^{r}\left(\mu_j(\nu_1 C_0+\varphi_{2k}t_j+\varphi_{1k})+\tilde{\mu}_j\varphi_{2k}\right)+\sum_{j=r+1}^{m}\mu_j C_0=\psi_k, \ k=0,$$

$$\sum_{j=1}^{r}\mu_j\left(\left(\frac{\varphi_{2k}}{a\|k\|}-\frac{b}{a}\nu_2\|k\|C_k\right)\sin(a\|k\|t_j)+(\nu_1 C_k+\varphi_{1k})\cos(a\|k\|t_j)\right)+$$
$$+\sum_{j=1}^{r}\tilde{\mu}_j a\|k\|\left(\left(\frac{\varphi_{2k}}{a\|k\|}-\frac{b}{a}\nu_2\|k\|C_k\right)\cos(a\|k\|t_j)-(\nu_1 C_k+\varphi_{1k})\sin(a\|k\|t_j)\right)+$$
$$\sum_{j=r+1}^{m}\mu_j C_k e^{-b\|k\|^2 t_j}=\psi_k, \qquad k\neq 0,$$

після перетворень яких, отримаємо співвідношення

$$C_k\left(\nu_1\sum_{j=1}^{r}\mu_j+\sum_{j=r+1}^{m}\mu_j\right)+\sum_{j=1}^{r}\left(\mu_j\varphi_{1k}+(\mu_j t_j+\tilde{\mu}_j)\varphi_{2k}\right)=\psi_k, \quad k=0,$$

$$C_k\left(\sum_{j=1}^{r}\left(\left(\nu_1\mu_j-b\nu_2\tilde{\mu}_j\|k\|^2\right)\cos(a\|k\|t_j)-\left(\frac{b\nu_2\mu_j}{a}+a\nu_1\tilde{\mu}_j\right)\|k\|\sin(a\|k\|t_j)\right)+\right.$$
$$\left.+\sum_{j=r+1}^{m}\mu_j e^{-b\|k\|^2 t_j}\right)+\varphi_{1k}\sum_{j=1}^{r}\left(\mu_j\cos(a\|k\|t_j)-\tilde{\mu}_j a\|k\|\sin(a\|k\|t_j)\right)+$$
$$+\frac{\varphi_{2k}}{a\|k\|}\sum_{j=1}^{r}\left(\mu_j\sin(a\|k\|t_j)+\tilde{\mu}_j a\|k\|\cos(a\|k\|t_j)\right)=\psi_k, \quad k\neq 0.$$

Розв'язність задачі (1)–(3) залежить від властивостей величин

$$\delta_k = \sum_{j=1}^{r}\Big(\big(\nu_1\mu_j - b\nu_2\tilde{\mu}_j\|k\|^2\big)\cos(a\|k\|t_j) -$$
$$-\big(b\nu_2\mu_j / a + a\nu_1\tilde{\mu}_j\big)\|k\|\sin(a\|k\|t_j)\Big) + \sum_{j=r+1}^{m}\mu_j e^{-b\|k\|^2 t_j},\ \ k \in Z^p. \tag{13}$$

Зокрема, якщо $\delta_k \neq 0$ для деякого значення вектора $k \neq 0$, то

$$C_k = \frac{1}{\delta_k}\Bigg(\psi_k - \varphi_{1k}\sum_{j=1}^{r}\big(\mu_j\cos(a\|k\|t_j) - \tilde{\mu}_j a\|k\|\sin(a\|k\|t_j)\big) -$$
$$-\frac{\varphi_{2k}}{a\|k\|}\sum_{j=1}^{r}\big(\mu_j\sin(a\|k\|t_j) + \tilde{\mu}_j a\|k\|\cos(a\|k\|t_j)\big)\Bigg).$$

Теорема 1. *Для єдиності розв’язку задачі* (1)–(3) *необхідно і досить, щоб виконувались умови*

$$\forall k \in Z^p \qquad \delta_k \neq 0. \tag{14}$$

Якщо виконуються умови (14), то у формальному розв’язку (7) задачі (1)–(3) коефіцієнти Фур’є зображуються формулами

$$u_k(t) = \begin{cases} \varphi_{2k}t + \varphi_{1k} + \dfrac{\nu_1}{\delta_k}\left(\psi_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{r}\big(\mu_j\varphi_{1k} + (\mu_j t_j + \tilde{\mu}_j)\varphi_{2k}\big)\right), & t < 0, \\ \dfrac{1}{\delta_k}\left(\psi_k - \displaystyle\sum_{j=1}^{r}\big(\mu_j\varphi_{1k} + (\mu_j t_j + \tilde{\mu}_j)\varphi_{2k}\big)\right), & t \geq 0, \end{cases} \tag{15}$$

для $k = 0$, а для решти $k \in Z^p \setminus \{0\}$ – формулами

$$u_k(t) = \begin{cases} \varphi_{1k}\left(\cos(a\|k\|t) - \dfrac{S_k^1}{\delta_k}\left(\nu_1\cos(a\|k\|t) - \dfrac{b}{a}\nu_2\|k\|\sin(a\|k\|t)\right)\right) + \\ \dfrac{\varphi_{2k}}{a\|k\|}\left(\sin(a\|k\|t) - \dfrac{S_k^2}{\delta_k}\left(\nu_1\cos(a\|k\|t) - \dfrac{b}{a}\nu_2\|k\|\sin(a\|k\|t)\right)\right) + \\ \dfrac{\psi_k}{\delta_k}\left(\nu_1\cos(a\|k\|t) - \dfrac{b}{a}\nu_2\|k\|\sin(a\|k\|t)\right), & t < 0, \\ \dfrac{1}{\delta_k}\left(\psi_k - \varphi_{1k}S_k^1 - \dfrac{\varphi_{2k}}{a\|k\|}S_k^2\right)e^{-b\|k\|^2 t}, & t \geq 0, \end{cases} \tag{16}$$

де

$$S_k^1 = \sum_{j=1}^{r}\big(\mu_j\cos(a\|k\|t_j) - \tilde{\mu}_j a\|k\|\sin(a\|k\|t_j)\big),$$

$$S_k^2 = \sum_{j=1}^{r}\big(\mu_j\sin(a\|k\|t_j) + \tilde{\mu}_j a\|k\|\cos(a\|k\|t_j)\big).$$

Збіжність ряду (7) за умов (4), тобто існування розв’язку задачі

(1)–(3), взагалі кажучи, пов'язана з проблемою малих знаменників [23], оскільки величини δ_k, $k \in Z^p$, будучи відмінними від нуля, можуть набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості цілих k і спричиняти розбіжність цього ряду (7) у відповідних просторах $C^2([-\alpha,0]; H_q)$ і $C^1([0,\beta]; H_q)$. Однак, якщо малі знаменники δ_k допускають поліноміальну асимптотичну поведінку при $\|k\| \to \infty$, то за відповідних припущень на гладкість заданих функцій $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$ можна встановити існування єдиного розв'язку задачі (1) – (3).

Теорема 2. *Нехай виконується умова* (14) *та існує така стала* $\gamma > 0$, *що для всіх (крім, можливо скінченної кількості) векторів* $k \in Z^p$ *виконується оцінка*

$$|\delta_k| \geq \|k\|^{-\gamma}. \tag{17}$$

Тоді, якщо $\varphi_1 \in H_{q+\gamma+4}$ *і* $\varphi_2, \psi \in H_{q+\gamma+3}$, *то існує єдиний розв'язок* $u \in C^2([-\alpha,0]; H_q) \cap C^1([0,\beta]; H_q)$ задачі (1)–(3). *При цьому виконуються нерівності*

$$\|u; C^2([-\alpha,0]; H_q)\| \leq C_1 \left(\|\varphi_1; H_{q+\gamma+4}\| + \|\varphi_2; H_{q+\gamma+3}\| + \|\psi; H_{q+\gamma+3}\|\right),$$
$$\|u; C^1([0,\beta]; H_q)\| \leq C_2 \left(\|\varphi_1; H_{q+\gamma+3}\| + \|\varphi_2; H_{q+\gamma+2}\| + \|\psi; H_{q+\gamma+2}\|\right),$$

де додатні сталі C_1 *і* C_2 *не залежать від функцій* $\varphi_1, \varphi_2, \psi_1$.

Доведення. Позначимо через K множину таких векторів $k \in Z^p$, для яких виконується протилежна до (17) нерівність, тобто

$$K = \{ k \in Z^p : |\delta_k| < \|k\|^{-\gamma} \}. \tag{18}$$

Оскільки за умовою теореми множина K – скінченна та $\inf_{k \in Z^p} |\delta_k| > 0$, то

$$\forall k \in Z^p \quad |\delta_k| \geq C_0 \|k\|^{-\gamma}, \quad C_0 = \min\left\{1, \min_{k \in K}\{\|k\|^{\gamma} |\delta_k|\}\right\}. \tag{19}$$

Легко бачити, що для всіх векторів $k \in Z^p$ справедливими є такі оцінки зверху на вирази S_k^1 і S_k^2:

$$|S_k^1| \leq M\|k\|, \quad |S_k^2| \leq M\|k\|, \qquad M = \sum_{j=1}^{r} \left(|\mu_j| + a|\tilde{\mu}_j|\right). \tag{20}$$

З оцінок (19) і (20) та формул (15) і (16) випливає, що

$$|u_0^{(s)}(t)| \leq \begin{cases} C_3 \left(|\varphi_{10}| + |\varphi_{20}| + \psi_0\right), & t < 0,\ s = 0,1,2, \\ C_4 \left(|\varphi_{10}| + |\varphi_{20}| + \psi_0\right), & t > 0,\ s = 0,1, \end{cases}$$

$$\left|u_k^{(s)}(t)\right| \le \begin{cases} C_5\left(\|k\|^{2+\gamma+s}|\varphi_{1k}| + \|k\|^{1+\gamma+s}|\varphi_{2k}| + \|k\|^{1+\gamma+s}|\psi_k|\right), & t<0, \quad s=0,1,2, \\ C_6\left(\|k\|^{1+\gamma+2s}|\varphi_{1k}| + \|k\|^{\gamma+2s}|\varphi_{2k}| + \|k\|^{\gamma+2s}|\psi_k|\right), & t>0, \quad s=0,1, \end{cases}$$

$k \neq 0$, де

$$C_3 = \max\left\{\left|1-\nu_1\delta_0^{-1}\sum_{j=1}^{r}\mu_j\right|, \alpha + \left|\nu_1\delta_0^{-1}\sum_{j=1}^{r}\left(\mu_j t_j + \tilde{\mu}_j\right)\right|, \left|\nu_1\delta_0^{-1}\right|\right\},$$

$$C_4 = \max\left|\left\{\left|\delta_0^{-1}\sum_{j=1}^{r}\mu_j\right|, \left|\delta_0^{-1}\sum_{j=1}^{r}\left(\mu_j t_j + \tilde{\mu}_j\right)\right|, \left|\delta_0^{-1}\right|\right\}\right|,$$

$$C_5 = \left(1 + (M+1)\left(|\nu_1| + \frac{b}{a}|\nu_2|\right)\right)\max\{a^{-1}, a^2\},$$

$$C_6 = \max\{1, M, M/a\}\cdot\max\{1, b\}.$$

Тоді для розв’язку задачі (1)–(3) отримуємо нерівності

$$\left\|u; C^2([-\alpha,0]; H_q)\right\|^2 = \sum_{s=0}^{2}\max_{t\in[-\alpha,0]}\left\|\frac{\partial^s u(t,\cdot)}{\partial t^s}; H_q\right\|^2 \le 3C_3^2\left(|\varphi_{10}| + |\varphi_{20}| + \psi_0\right)^2 +$$

$$+\sum_{s=0}^{2}\sum_{k\in Z^p\setminus\{0\}} C_5^2\left(\|k\|^{2+\gamma+s}|\varphi_{1k}| + \|k\|^{1+\gamma+s}|\varphi_{2k}| + \|k\|^{1+\gamma+s}|\psi_k|\right)^2\left(1+\|k\|\right)^{2q} \le$$

$$\le 3\max\{C_3^2, C_5^2\}\sum_{k\in Z^p}\left((1+\|k\|)^{\gamma+4}|\varphi_{1k}| + (1+\|k\|)^{\gamma+3}|\varphi_{2k}| +\right.$$

$$\left.+(1+\|k\|)^{\gamma+3}|\psi_k|\right)^2\left(1+\|k\|\right)^{2q} \le 6\max\{C_3^2, C_5^2\}\sum_{k\in Z^p}\left((1+\|k\|)^{2(q+\gamma+4)}|\varphi_{1k}|^2 +\right.$$

$$\left.+(1+\|k\|)^{2(q+\gamma+3)}|\varphi_{2k}|^2 + (1+\|k\|)^{2(q+\gamma+3)}|\psi_k|^2\right) \le$$

$$\le C_1\left(\|\varphi_1; H_{q+\gamma+4}\| + \|\varphi_2; H_{q+\gamma+3}\| + \|\psi; H_{q+\gamma+3}\|\right),$$

$$\left\|u; C^1([0,\beta]; H_q)\right\|^2 = \max_{t\in[0,\beta]}\left\|u(t,\cdot); H_q\right\|^2 + \max_{t\in[0,\beta]}\left\|\frac{\partial u(t,\cdot)}{\partial t}; H_q\right\|^2 \le$$

$$\le 2C_4^2\left(|\varphi_{10}| + |\varphi_{20}| + \psi_0\right)^2 +$$

$$+2\sum_{k\in Z^p\setminus\{0\}} C_6^2\left(\|k\|^{\gamma+3}|\varphi_{1k}| + \|k\|^{\gamma+2}|\varphi_{2k}| + \|k\|^{\gamma+2}|\psi_k|\right)^2\left(1+\|k\|\right)^{2q} \le$$

$$\le 2\max\{C_4^2, C_6^2\}\sum_{k\in Z^p}\left((1+\|k\|)^{\gamma+3}|\varphi_{1k}| + (1+\|k\|)^{\gamma+2}|\varphi_{2k}| +\right.$$

$$\left.+(1+\|k\|)^{\gamma+2}|\psi_k|\right)^2\left(1+\|k\|\right)^{2q} \le 4\max\{C_4^2, C_6^2\}\sum_{k\in Z^p}\left((1+\|k\|)^{2(q+\gamma+3)}|\varphi_{1k}|^2 +\right.$$

$$\left.+(1+\|k\|)^{2(q+\gamma+2)}|\varphi_{2k}|^2 + (1+\|k\|)^{2(q+\gamma+2)}|\psi_k|^2\right) \le$$

$$\le C_2\left(\|\varphi_1; H_{q+\gamma+3}\| + \|\varphi_2; H_{q+\gamma+2}\| + \|\psi; H_{q+\gamma+2}\|\right),$$

де $C_1 = 6\max\{C_3^2, C_5^2\}$, $C_2 = 4\max\{C_4^2, C_6^2\}$, з яких випливає доведення теореми.

4. Проаналізуємо умови виконання нерівностей (17). Для цього скористаємось метричним підходом, який полягає у вивчення міри множин параметрів задачі, для яких вказані нерівності виконується або порушуються.

Лема Бореля-Кантеллі [23]. *Нехай* $\{A_m\}_{m=1}^{\infty}$ *– послідовність вимірних (за мірою Лебега) множин з* R *таких, що ряд* $\sum_{m=1}^{\infty} measA_m$ *є збіжний. Тоді міра Лебега в множини тих точок, які потрапляють до нескінченної кількості множин цієї послідовності, дорівнює нулю, тобто*

$$measA = 0, \quad A = \limsup_{m\to\infty} A_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{r=m}^{\infty} A_r .$$

Лема Пяртлі [23]. Якщо функція $f \in C^n(I)$ є такою, що

$$\forall t \in I \qquad \left| f^{(n)}(t) \right| \geq \delta > 0,$$

то $meas\{t \in I : \left| f(t) \right| < \varepsilon\} \leq 2n\sqrt[n]{\varepsilon / \delta}$.

Надалі зафіксуємо коефіцієнти рівняння (1), коефіцієнти умов (2) і (3) та значення у всіх справа від $t_1 = -\alpha$ вузлах $t = t_j$, $j = 2,..., m$; нефіксованим (вільним) вважаємо параметр крайнього лівого вузла $t_1 = -\alpha$. Позначимо $I_T = [T_1, T_2]$ – деякий фіксований відрізок дійсної прямої R, де $T_1 < T_2 < 0$.

Теорема 3 *Якщо* $a^2 \nu_1 \tilde{\mu}_1 + b\nu_2 \mu_1 \neq 0$, *то для майже всіх (стосовно міри Лебега в просторі* R*) чисел* $t_1 \in I_T$ *оцінка (17) виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in Z^p$ *при* $\gamma > 2p - 1$.

Доведення. Розглянемо вирази δ_k, $k \in Z^p$, як функції змінної t_1 на відрізку I_T

$$f_k(t_1) = \delta_k = \left(\nu_1\mu_1 - b\,\nu_2\tilde{\mu}_1\|k\|^2\right)\cos(a\|k\|t_1) -$$
$$-\left(b\,\nu_2\mu_1 / a + a\,\nu_1\tilde{\mu}_1\right)\|k\|\sin(a\|k\|t_1) + \Phi_k,\ k \in Z^p,$$

де Φ_k – вираз, який не залежить від t_1, тобто

$$\Phi_k = \sum_{j=2}^{r} \left(\left(\nu_1\mu_j - b\nu_2\tilde{\mu}_j\|k\|^2\right)\cos(a\|k\|t_j) -\right.$$
$$\left. -\left(b\nu_2\mu_j / a + a\nu_1\tilde{\mu}_j\right)\|k\|\sin(a\|k\|t_j)\right) + \sum_{j=r+1}^{m} \mu_j e^{-b\|k\|^2 t_j},\ k \in Z^p.$$

Запровадимо множини

$$A_k = \{t_1 \in I_T : | f_k(t_1) | < \|k\|^{-\gamma}\}, \quad \gamma > 0, \ k \in Z^p,$$

а також множину A – множину тих чисел, які належать нескінченній кількості множин $A_k, k \in Z^p$.

Двічі продиференціюємо функцію $f_k(t_1)$:

$$f'_k(t_1) = -a\|k\|\left(\nu_1\mu_1 - b\nu_2\tilde{\mu}_1\|k\|^2\right)\sin(a\|k\|t_1) - a\|k\|^2\left(\frac{b\nu_2\mu_1}{a} + a\nu_1\tilde{\mu}_1\right)\cos(a\|k\|t_1),$$

$$f''_k(t_1) = -a^2\|k\|^2\left(\nu_1\mu_1 - b\nu_2\tilde{\mu}_1\|k\|^2\right)\cos(a\|k\|t_1) + a^2\|k\|^3\left(\frac{b\nu_2\mu_1}{a} + a\nu_1\tilde{\mu}_1\right)\sin(a\|k\|t_1),$$

Тоді одержуємо диференціальне рівняння

$$\sin(a\|k\|t_1)\, f''_k(t_1) - a\|k\|\cos(a\|k\|t_1)\, f'_k(t_1) = a\|k\|^3\left(b\nu_2\mu_1 + a^2\nu_1\tilde{\mu}_1\right),$$

з якого випливає нерівність

$$0 < \|k\|^2\left(b\nu_2\mu_1 + a^2\nu_1\tilde{\mu}_1\right) \le \frac{| f''_k(t_1)|}{a\|k\|} + | f'_k(t_1)| \le 2\max\left\{\frac{| f''_k(t_1)|}{a\|k\|}, | f'_k(t_1)|\right\}, \quad (17)$$

для всіх $k \in Z^p \setminus \{0\}$.

Порахуємо тепер для кожного вектора k кількість нулів на відрізку I_T наступних функцій:

$$g_k^+ = f'_k(t_1) + \frac{f''_k(t_1)}{a\|k\|}, \quad g_k^- = f'_k(t_1) - \frac{f''_k(t_1)}{a\|k\|}.$$

Дані функції допускають зображення у вигляді

$$g_k^+ = a\|k\|\left(\|k\|\left(b\nu_2\mu_1 / a + a\nu_1\tilde{\mu}_1\right) - \left(\nu_1\mu_1 - b\nu_2\tilde{\mu}_1\|k\|^2\right)\right)\sin(a\|k\|t_1) -$$

$$- a\|k\|\left(\|k\|\left(b\nu_2\mu_1 / a + a\nu_1\tilde{\mu}_1\right) + \left(\nu_1\mu_1 - b\nu_2\tilde{\mu}_1\|k\|^2\right)\right)\cos(a\|k\|t_1) =$$

$$= a\|k\|\sqrt{2\|k\|^2\left(b\nu_2\mu_1 / a + a\nu_1\tilde{\mu}_1\right)^2 + 2\left(\nu_1\mu_1 - b\nu_2\tilde{\mu}_1\|k\|^2\right)^2}\, \sin(a\|k\|t_1 - \theta_k),$$

$$g_k^- = -a\|k\|\left(\|k\|\left(b\nu_2\mu_1 / a + a\nu_1\tilde{\mu}_1\right) + \left(\nu_1\mu_1 - b\nu_2\tilde{\mu}_1\|k\|^2\right)\right)\sin(a\|k\|t_1) -$$

$$- a\|k\|\left(\|k\|\left(b\nu_2\mu_1 / a + a\nu_1\tilde{\mu}_1\right) - \left(\nu_1\mu_1 - b\nu_2\tilde{\mu}_1\|k\|^2\right)\right)\cos(a\|k\|t_1) =$$

$$= -a\|k\|\sqrt{2\|k\|^2\left(b\nu_2\mu_1 / a + a\nu_1\tilde{\mu}_1\right)^2 + 2\left(\nu_1\mu_1 - b\nu_2\tilde{\mu}_1\|k\|^2\right)^2}\, \cos(a\|k\|t_1 - \theta_k),$$

де

$$\theta_k = arctg\frac{\|k\|\left(b\nu_2\mu_1 / a + a\nu_1\tilde{\mu}_1\right) + \left(\nu_1\mu_1 - b\nu_2\tilde{\mu}_1\|k\|^2\right)}{\|k\|\left(b\nu_2\mu_1 / a + a\nu_1\tilde{\mu}_1\right) - \left(\nu_1\mu_1 - b\nu_2\tilde{\mu}_1\|k\|^2\right)}, \ k \in Z^p.$$

Кількість нулів функцій g_k^+ і g_k^- дорівнює кількості цілих чисел m^+ і m^- відповідно, які справджують нерівності

$$\frac{T_1 a\|k\| - \theta_k}{\pi} \le m^+ \le \frac{T_2 a\|k\| - \theta_k}{\pi},$$

$$\frac{T_1 a\|k\| - \theta_k - \pi/2}{\pi} \le m^- \le \frac{T_2 a\|k\| - \theta_k - \pi/2}{\pi},$$

звідки для фіксованого ненульового вектора k випливає, що кожна з функцій $g_k^+(t_1)$ і $g_k^-(t_2)$ може мати не більше $N_0\|k\|$ нулів, де $N_0 = a(T_2 - T_1)/\pi + 1$.

Позначимо через $\xi_k^1,...,\xi_k^{\tau(k)}$ всі різні нулі обох функцій $g_k^+(t_1)$ і $g_k^-(t_1)$ з проміжку (T_1, T_2), де $\tau(k)$ – кількість таких нулів, причому $\xi_k^1 < \xi_k^2 ... < \xi_k^{\tau(k)}$ і виконується оцінка зверху $\tau(k) \le 2N_0\|k\|$.

Зробимо розбиття відрізка $[T_1, T_2]$ точками $\xi_k^1,...,\xi_k^{\tau(k)}$:

$$I_T = [T_1, T_2] = \bigcup_{j=0}^{\tau(k)} [\xi_k^j, \xi_k^{j+1}], \qquad T_1 = \xi_k^0, T_2 = \xi_k^{\tau(k)+1}.$$

На кожному такому відрізку $[\xi_k^j, \xi_k^{j+1}]$, $j = 0,...\tau(k)$, при фіксованому $k \in Z^p \setminus \{0\}$ обидві функції $g_k^+(t_1)$ і $g_k^-(t_2)$ зберігають знак, а тому з нерівності (21) маємо

$$\forall t_1 \in [\xi_k^j, \xi_k^{j+1}] \qquad |f_k'(t_1)| \ge \frac{1}{2}\left(b\nu_2\mu_1 + a^2\nu_1\tilde{\mu}_1\right)\|k\|^2$$

або
$$\forall t_1 \in [\xi_k^j, \xi_k^{j+1}] \qquad |f_k''(t_1)| \ge \frac{a}{2}\left(b\nu_2\mu_1 + a^2\nu_1\tilde{\mu}_1\right)\|k\|^3.$$

Якщо на відрізку $[\xi_k^j, \xi_k^{j+1}]$ виконується перша з вищевказаних умов, то за лемою Пяртлі для довільного $\gamma > 0$ отримаємо оцінку

$$measA_k \cap [\xi_k^j, \xi_k^{j+1}] \le \frac{4\|k\|^{-\gamma-2}}{\left(b\nu_2\mu_1 + a^2\nu_1\tilde{\mu}_1\right)}, \quad k \in Z^p \setminus \{0\},$$

а якщо друга з умов – оцінку

$$measA_k \cap [\xi_k^j, \xi_k^{j+1}] \le \frac{4\sqrt{2}\ \|k\|^{(-\gamma-3)/2}}{\sqrt{a\left(b\nu_2\mu_1 + a^2\nu_1\tilde{\mu}_1\right)}}, \qquad k \in Z^p \setminus \{0\}.$$

Із нерівностей

$$\mathrm{meas}A_k = \sum_{j=0}^{l(k)} \mathrm{meas}\left(A_k \cap [\xi_k^j, \xi_k^{j+1}]\right) \le \tau(k) \max_{j=0,1...n} \mathrm{meas}A_k \cap [\xi_k^j, \xi_k^{j+1}] \le$$

$$\le \frac{8\sqrt{2}N_0\|k\|}{\min\left\{b\nu_2\mu_1 + a^2\nu_1\tilde{\mu}_1, \sqrt{a(b\nu_2\mu_1 + a^2\nu_1\tilde{\mu}_1)}\right\}} \max\left\{\frac{1}{\|k\|^{\gamma+2}}, \frac{1}{\|k\|^{(\gamma+3)/2}}\right\} \le$$

$$\le C_7 \frac{1}{\|k\|^{(\gamma+1)/2}}$$

де $\gamma > 0$, $C_7 = \dfrac{8\sqrt{2}N_0}{\min\left\{b\nu_2\mu_1 + a^2\nu_1\tilde{\mu}_1, \sqrt{a(b\nu_2\mu_1 + a^2\nu_1\tilde{\mu}_1)}\right\}}$.

Тоді при $\gamma > 2p-1$ ряд $\sum\limits_{k\in Z^p\setminus\{0\}} measA_k$ є збіжним. Тому за лемою Бореля-Кантеллі $\mathrm{meas}A = 0$. Отже, для кожного $t_1 \in [T_1, T_2]\setminus A$ існує таке число $\tilde{K} = \tilde{K}(t_1)$, що оцінка (17) виконується для всіх $\|k\| > \tilde{K}$. Теорему доведено.

Зауваження. Результат теореми 3 узгоджується та доповнює результат теореми 4 з роботи [22].

Література

1. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений // УМН. –1959. – Т. 3, вып. 3(87). – С. 3–19.
2. Стручина Г. М. Задача о сопряжении двух уравнений // Инженерно-физический журнал. – 1961. – 4(11). – С. 99–104.
3. Уфлянд Я. С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях // Инженерно-физический журнал. – 1964. – 7(1). – С. 89–92.
4. Ладыженская О.А., Ступялис Л. Об уравнениях смешанного типа // Вестн. ЛГУ. Сер. матем., механ. и астр. – 1965. – 19 (4), С. 38–46.
5. Золина Л.А. О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа // Журн. вычислительной мат. и мат. физики. – 1966. – 6, № 6. – С. 991–1001.
6. Al-Droubi, A., Renardy, M. Energy methods for a parabolic-hyperbolic interface problem arising in electromagnetism. Z. angew. Math. Phys. 39, 931–936 (1988). https://doi.org/10.1007/BF00945129
7. Sun,J., Yang J. & Sun L. A class of hyperbolic-parabolic coupled systems applied to image restoration. Bound Value Probl 2016, 187 (2016). doi:https://doi.org/10.1186/s13661-016-0696-2
8. Chen S., Vazquez R. and Krstic M. Backstepping control design for a coupled hyperbolic-parabolic mixed class PDE system, 2017 IEEE 56th Annual Conference on Decision and Control (CDC), Melbourne, VIC, 2017, pp. 664-669. doi: https://doi.org/10.1109/CDC.2017.8263737
9. Джураев Т., Сопуев А., Мамажанов М. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
10. Врагов В.Н. Смешанная задача для одного класса гиперболо-параболических уравнений второго порядка//Дифференц. уравнения. – 1976. – Т.12, №1. – С. 24–31.
11. Нахушев А.М. К теории линейных краевых задач для уравнения второго порядка смешанного гиперболо-параболического типа // Дифференц. уравнения. –1978. – Т. 14, № 1. – С.66–73.

12. Елеев В. А. О краевых задачах для смешанного уравнения гиперболо-параболического типа // Дифференц. уравнения. –1988. – Т. 24, № 4. – С. 627–635.
13. Сабитов К.Б. К теории уравнений смешанного типа. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. – 301 с.
14. Lions J.-L. An example of a coupled parabolic-hyperbolic boundary value problem for a pluri-dimensional structure (in French), Calcolo 22, no. 1, 7–15 (1985), http://dx.doi.org/10.1007/BF02576197
15. Ashyralyev A. and Ozdemir Y., On nonlocal boundary value problems for hyperbolic-parabolic equations, Taiwanese J. Math., 11 (4) (2007), 1075-1089.
16. Ashyralyev A., Yildirim O. On multipoint nonlocal boundary value problems for hyperbolic differential and difference equations. Taiwanese J. Math. 14 (2010), no. 1, 165–194. doi:10.11650/twjm/1500405734
17. Сабитов К.Б. Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области // Матем. заметки. – 2011. – 89 (4). – С. 596–602.
18. Юнусова Г.Р. Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2011. – 8 (89). – С. 108–117.
19. Капустян В. О., Пишнограєв І. О. Умови існування і єдиності розв’язку параболо-гіперболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами // Наукові вісті НТУ "Київський політехнічний інститут". – 2012. № 4. – С. 72–76.
20. Савка І.Я., Симотюк М.М. Задача спряження з інтегральною умовою за часовою змінною для мішаного рівняння параболо-гіперболічного типу // Прикарпатський вісник НТШ. Серія «Число». – 2015. – 1 (28). – С. 72–77.
21. Kuz A.M., Ptashnyk B.Yo. A Problem with Condition Containing an Integral Term for a Parabolic-Hyperbolic Equation // Ukr. Math. J. – 2015. – 67 (5), pp. 723–734.
22. Савка І., Василишин П., Гой Т. Задача спряження з нелокальною багатоточковою умовою за часом для параболо-гіперболічного рівняння в циліндричній області // Некласичні задачі теорії диференціальних рівнянь: збірник наукових праць, присвячений 80-річчю Б.Й. Пташника. – Львів: ІППММ ім. Я.С. Підстригача НАНУ. – 2017. – С. 229–240.
23. Пташник Б. Й., Ільків В. С., Кміть І. Я., Поліщук В. М. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
24. Ільків В.С., Магеровська Т.В. Про константу в лемі Пяртлі // Вісник НУ «Львівська політехніка». Фіз.-мат. науки. – 2007. – №601. – С. 12–17.

Стаття надійшла до редакційної колегії 12.11.2020 р.

LINEAR CONJUGATION PROBLEM WITH MULTIPOINT NONLOCAL CONDITION FOR A PARABOLIC-HYPERBOLIC EQUATION IN CYLINDRICAL DOMAIN

I. Ya. Savka[1], R. V. Shevchyk[2], I. R. Tymkiv[3]

[1]Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine; 79060, Lviv, Naukova Str. 3-b; e-mail: s-i@ukr.net;
[2]Lviv Polytechnic National University; 79013, Lviv, Bandera Str. 12; e-mail: r.v.shevchuk@gmail.com;
[3]Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas; 76019, Ivano-Frankivs'k, Karpatska Str. 5; e-mail: tymkiv_if@ukr.net

The linear conjugation problem with multipoint nonlocal condition in the time variable for a mixed parabolic-hyperbolic equation of the second order in a cylindrical domain, which is Cartesian product of the time segment and the spatial multidimensional torus, is investigated. The conditions of the existence and uniqueness of a solution to the problem in the scale of Sobolev spaces are obtained. It has been proved that these conditions fulfill for almost all (with respect to the Lebesgue measure) values of the left node of the multipoint condition.

Key words: *linear conjugation problem, multipoint nonlocal condition, parabolic-hyperbolic equation, Sobolev space, problem of small denominators.*