Механіка

УДК 517.929.514

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ТЕЧІЇ В ТРУБОПРОВОДІ З ВИТОКОМ У ЗОВНІШНЄ СЕРЕДОВИЩЕ

А. П. Олійник, А. А. Мороз
Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська 15;
e-mail: alice.shelyp@gmail.com

Запропоновано математичну модель, яка дозволяє визначати швидкість витоку продукту, що транспортується в ґрунт, який оточує технологічний або магістральний трубопровід. На основі моделювання течії в’язкої рідини з використанням системи рівнянь Нав’є-Стокса та її чисельної реалізації було розроблено модель течії з витоками, запропоновано модель її чисельної реалізації та проведено широкий клас подальших розрахунків.

Ключові слова: *ґрунт, математична модель, розгерметизація, течія.*

Вступ

Виникнення аварійних ситуацій на об’єктах нафтогазового комплексу (трубопроводи, потоки газорідинної суміші в свердловинах) призводять не тільки до екологічних витрат, але і до серйозних наслідків для екології регіону. Проблема використання та рекультивації ґрунтів, забруднених вуглеводнями, вивчається на різних рівнях (зокрема, в ІФНТУНГ виконується проект «RoUaSoil: Транскордонна мережа Румунія – Україна. Управління земельними ділянками, забрудненими нафтопродуктами»). В даній роботі пропонується математична модель, яка дозволяє визначати швидкість витоку продукту, що транспортується, в ґрунт, який оточує технологічних або магістральний трубопровід. На основі моделювання течії в’язкої рідини з використанням системи рівнянь Нав’є-Стокса та її чисельної реалізації [1, 2] було розроблено модель течії з витоками [3], запропоновано модель її чисельної реалізації та проведено широкий клас подальших розрахунків.

Реалізація моделі та чисельний алгоритм

Загальна постановка задачі полягає в наступному: розглядається двовимірна система рівнянь Нав’є-Стокса в прямокутній області, яка завдяки симетрії моделює течію в трубі:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \nu(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) + g_x \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y} + \nu(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}) + g_y \quad , \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \tag{1}$$

Вважається, що тиск лінійно змінюється по довжині труби:

$$P = P_0 - kx\,, \tag{2}$$

де P_0 – початковий тиск, k- коефіцієнт зменшення тиску.

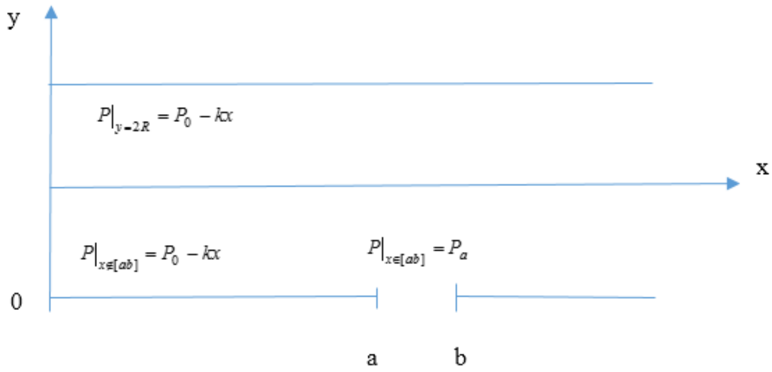
Граничні умови записуються в наступному вигляді:

$$\begin{gathered} u\big|_{x=0} = -\frac{ky^2}{4\mu} + \frac{kRy}{2\mu} \\ u\big|_{y=0} = u\big|_{y=2R} = 0 \\ v\big|_{x=0} = v\big|_{y=0} = 0 \\ v\big|_{y=2R} = \begin{cases} 0, x \le x_1; x \ge x_2 \\ \pm V_{ВИТ}, x \in [\,x_1 x_2\,] \end{cases} \end{gathered} \tag{3}$$

Задача (1)-(3) за допомогою якої шляхом вибору знаку при $V_{ВИТ}$ моделюється як втікання так і витікання рідини з труби, розв’язана з використанням певних різницевих схем, для яких доведено стійкість і проведено комплекс розрахунків з використанням спеціальних програм для ПК. Проте в ході вказаних розрахунків та спроби їх використання для моделювання течії з указаними властивостями виявлено певну обмеженість вказаної моделі: величину $V_{ВИТ}$ можна задавати лише модельно, при цьому не використовується інформація про властивості середовища, куди витікає продукт, що транспортується. Тому виникає питання про побудову моделі, яка б дозволяла знаходити величину $V_{ВИТ}$. З цією метою система рівнянь (1) перетворюється за наступним алгоритмом: диференціюючи перше рівняння системи (1) по x, а друге – по y і використовуючи рівняння нерозривності – третє рівняння системи (1), можна одержати рівняння Пуассона для тиску:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 2\rho(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x})\,. \tag{4}$$

Записуючи граничні умови для тиску у вигляді (рис. 1), одержуємо задачу Діріхле для рівняння Лапласа, методику розв’язку якого методом верхньої релаксації описано в [3, 4].



P_a – тиск в середовищі, що оточує трубу

Рис. 1. Граничні умови для тиску

Пропонується наступний алгоритм для знаходження $V_{ВИТ}$:

1. На першому кроці розв’язується задача (1)-(3) з деякими граничними умовами для $V_{ВИТ}$ за методикою [1]. При цьому одержується розподіл швидкості по об’єкту в цілому.

2. За знайденими полями швидкості u та v розв’язується задача (4) з відповідними граничними умовами.

3. Враховуючи те, що рідина втікає в середовище з певною проникністю k та динамічною в’язкістю μ, для перерахунку граничних умов (величини $V_{ВИТ}$) використовується закон Дарсі:

$$\begin{cases} u = -\dfrac{k}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial x}, \\ v = -\dfrac{k}{\mu}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{k\rho g}{\mu}; \end{cases} \tag{5}$$

де u та v – компоненти вектору швидкості фільтрації, p – тиск рідини, μ – динамічна в’язкість, k – проникність рідини, g – прискорення земного тяжіння, ρ – густина рідини.

4. Розв’язується система (1)-(3) з умовою, що $V_{ВИТ}$ визначається за формулою (5) (компонента v), після чого обчислювальна процедура повторюється. Обчислення продовжується до збіжності ітераційної процедури, яка гарантується доведеною збіжністю та стійкістю розв’язку системи (1)-(3) та задачі Діріхле. Зокрема, для чисельного розв’язання задачі Діріхле з відповідними граничними умовами використовується метод верхньої релаксації по рядках, розрахункова схема якого записується у вигляді (приймаємо, що $p(x, y) = U_{ij}$) [2]:

$$U_{i,j}^{k+1} = (1-\omega)U_{i,j}^{k} + \frac{\omega}{2(1+\beta^2)}\left[U_{i+1,j}^{k+1} + U_{i-1,j}^{k+1} + \beta^2\left(U_{i,j+1}^{k+1} + U_{i,j-1}^{k+1}\right)\right] + F_{i,j}^{k}, \tag{6}$$

де ω – параметр релаксації, $0 < \omega < 2$; $U_{i,j}^{k}$ – значення тиску в точці (x_i,y_j) на кроці ітераційної процедури за номером k, $F_{i,j}^{k}$ – права частина рівняння (4), порахована на цьому ж кроці ітераційної процедури. Рівняння (6) на кожному кроці ітераційної процедури містить три невідомі величини $U_{i-1,j}^{k+1}$; $U_{i,j}^{k+1}$; $U_{i+1,j}^{k+1}$. Величина $U_{i,j}^{k}$ є відомою з попереднього кроку ітераційної процедури, як і значення $U_{i,j+1}^{k}$. Величина $U_{i,j-1}^{k}$ є відомою з попереднього шару по координаті y.

Таким чином система (6) розв’язується методом прогонки, як система з тридіагональною матрицею, причому наявність доданка:

$$F_{i,j}^{k} = 2\rho\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right)_{i,j}^{k} \tag{7}$$

не впливає на загальну поведінку розв’язку, вказані похідні обмежені і задовольняють умови

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|;\left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|;\left|\frac{\partial v}{\partial x}\right|;\left|\frac{\partial v}{\partial y}\right| << 1. \tag{8}$$

Доведено додатну визначеність матриці системи (6) при будь-яких значеннях параметра релаксації $0 < \omega < 2$. Зокрема встановлено, що для головного мінора порядку n система (6) при умовах $\beta = 1(\Delta x = \Delta y$ – параметри розбиття розрахункової сітки), $0 < \omega < 2$ справедливою є оцінка

$$\frac{n+1}{2^n} \le D_n \le 1. \tag{9}$$

При цьому слід зазначити, що при $\omega \to 2$ доведена теоретично збіжність ітераційного методу при практичній реалізації може не досягатись, оскільки в такому випадку визначник системи наближається до нуля (що витікає з (9)), а це обумовлює розбіжність ітераційної процедури. При $\omega \to 0$ $\det A = 1$, тому метод збігається повільно. Якщо рівень точності $\varepsilon = 10^{-4}$, то найкращі результати одержуються при значеннях $0{,}8 < \omega < 1{,}25$.

Висновки

Розроблена модель дозволяє обчислювати швидкість витоку рідини із свердловини та трубопроводів з урахуванням властивості ґрунтів в зоні розташування об’єктів нафтогазового комплексу.

Напрямки подальших досліджень можуть бути пов’язані з вивченням властивостей ґрунтів з метою оцінки реальних швидкостей та з дослідженням залежності між швидкістю витоку та розміром зони порушення герметичності.

Література

1. Shkadov V.I. Viscous liquidn / V.I. Shkadov, Z.D. Zaprjanov // University Press. – Moscow, 1984.
2. Андерсон Д. Вычислительная гидромеханика и теплообмен. В 2-х томах, перевод с англ / Д. Андерсон, Дж. Теннехилл, Р. Плетчер. – М.: Мир, 1990. – Т.1 – 384 с.
3. Olijnyk A.P. Modelling of fluid flow in pipeline with the leaks due to the surface / A.P. Olijnyk, L.O. Shtayer // Journal of Hydrocarbon Power Engineering. – 2014. – Vol 1, Issue 1. – Pp. 45-53.
4. Олійник А.П. Дослідження впливу параметрів релаксації на збіжність чисельного методу послідовної верхньої релаксації для задачі Діріхле / А.П. Олійник, Л.О. Штаєр // Карпатські математичні публікації. – 2012. – Т.4, №2. – С. 289-297.

Стаття надійшла до редакційної колегії 26.05.2015 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором ***Мойсишиним В.М.,***
д.т.н., професором ***Тимківим Д.Ф.***

MATHEMATICAL MODELING FLOW IN PIPELINES WITH LEAKS IN THE ENVIRONMENT

A. P. Olijnyk, A. A. Moroz
Ivano-Frankivsk national technical university of oil and ga;
76019, Ivano-Frankivsk, Karpatska str., 15; e-mail:alice.shelyp@gmail.com

The mathematical model that allows determining the leak rate of the product is transported in soil that surrounds technological or main pipeline. Based on modeling viscous fluid flow system using Navies-Stokes equations and its numerical realization of the model was developed from current leakage, the model and its numerical realization conducted a broad class of future payments.

Key words: *soil, mathematical model, depressurization, flow.*