

---

---

# Механіка

---

---

УДК 539.3

## КОЛИВАННЯ ОРТОТРОПНОЇ ПАНЕЛІ ПОДВІЙНОЇ КРИВИНИ З МНОЖИНОЮ ВКЛЮЧЕНЬ ДОВІЛЬНОЇ КОНФІГУРАЦІЇ, ЖОРСТКО З'ЄДНАНИХ З ПАНЕЛЛЮ

**Т. В. Шоп**

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України;  
79060, м. Львів, вул. Наукова 3-б; e-mail: tetyana.sh@gmail.com*

*В рамках уточненої моделі, яка враховує деформацію поперечного зсуву та всі інерційні компоненти, побудовано розв'язок задачі про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини з довільною кількістю абсолютно жорстких включень довільної геометричної форми, орієнтації та розташування, які жорстко з'єднані з панеллю. Границя панелі є довільної геометричної конфігурації. Розглянуто довільні гармонічні в часі граничні умови на зовнішній границі панелі. Розв'язок побудовано на основі непрямого методу граничних елементів та секвенціального підходу до зображення функції Гріна. Крайову задачу зведено до системи лінійних алгебраїчних рівнянь.*

**Ключові слова:** ортотропна панель подвійної кривини, коливання, включення, власні частоти, послідовнісний підхід, функція Гріна, непрямий метод граничних елементів, метод колокації

**Постановка проблеми.** В сучасному авіа- та кораблебудуванні, широко використовуються анізотропні оболонкові елементи з включеннями різної форми та розташування, які працюють за змінних в часі навантажень. Тому виникає зростаюча потреба дослідження динамічної поведінки таких елементів.

**Аналіз відомих результатів досліджень.** Коливанням суцільних тонкостінних елементів конструкцій багато уваги приділяють чимало фахівців з механіки деформівного твердого тіла [1-3]. Однак недостатньо є опублікованих матеріалів, які стосуються динамічної поведінки ортотропних тонкостінних елементів конструкцій з включеннями, зокрема, панелей. В даній роботі узагальнено результати, отримані в роботі [4].

**Мета роботи** – побудувати розв’язок узагальненої задачі про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множиною включень довільної форми, орієнтації та розташування, які жорстко з’єднані з панеллю, з довільними гармонічними в часі граничними умовами на зовнішній довільної форми границі панелі ефективним методом в рамках уточненої теорії, яка враховує поперечні зсуви та всі інерційні компоненти.

**Постановка задачі.** Розглянути задачу про усталені коливання ортотропної панелі подвійної кривини. Панель містить  $N$  абсолютно жорстких включень довільної форми та розташування, які жорстко з’єднані з панеллю. Контурами включень є криві  $L^{(j)}$ ,  $j = \overline{1, N}$ . Нехай на включення маси  $\tilde{m}^{(j)}$  діють сили з головним вектором  $P^{(j)}(t) = P_0^{(j)} \sin(\omega t)$ , який є нормальним до серединної поверхні панелі і діє в точці центра мас включення. Вважаємо, що включення здійснює поступальний рух вздовж нормальному напрямку до серединної поверхні панелі. Зовнішня границя панелі є також довільної форми, а її контуром – дві взаємодоповнюючі криві  $L^{(0)}$  та  $L^{(N+1)}$ . Можна уявити таку панель, яка в термінах серединної поверхні займає багатозв’язну область  $\Omega$ , як результат довільного вирізу з суцільної панелі, яка в термінах серединної поверхні займає однозв’язну область  $\Pi$  канонічної форми (прямокутну в плані). Криволінійну систему координат з метрикою, близькою до евклідової, розміщено в уявно розширеній області. Координатні лінії криволінійної системи координат співпадають з напрямками головних кривин та осями ортотропії матеріалу панелі. Використовуватимемо позначення статті [8]

Нехай на одній частині зовнішньої границі панелі задано розподілені компоненти переміщень

$$\begin{aligned} w &= w_0(\alpha) \sin(\omega t), \quad u_n = u_{n0}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \gamma_n = \gamma_{n0}(\alpha) \sin(\omega t), \\ u_\tau &= u_{\tau 0}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \gamma_\tau = \gamma_{\tau 0}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \alpha \in L^{(0)}, \end{aligned} \quad (1)$$

а на другій – задано розподілені компоненти зусиль

$$\begin{aligned} Q_n &= Q_{n0}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_n = M_{n0}(\alpha) \sin(\omega t), \quad N_n = N_{n0}(\alpha) \sin(\omega t), \\ N_\tau &= N_{\tau 0}(\alpha) \sin(\omega t), \quad M_\tau = M_{\tau 0}(\alpha) \sin(\omega t), \quad \alpha \in L^{(N+1)}. \end{aligned} \quad (2)$$

Крайові умови на контурах включень мають вигляд

$$\begin{aligned} w(\alpha, t) &= \tilde{w}^{(j)}(t), \quad u_\tau(\alpha, t) = 0, \quad \gamma_\tau(\alpha, t) = 0, \quad u_n(\alpha, t) = 0, \quad \gamma_n(\alpha, t) = 0, \\ \alpha &\in L^{(j)}, \quad j = \overline{1, N}, \end{aligned} \quad (3)$$

де  $\tilde{w}^{(j)}(t) = \tilde{w}_0^{(j)} \sin(\omega t)$  – переміщення  $j$ -ого включення.

Якщо покласти

$$w_0(\alpha) = u_{n0}(\alpha) = \gamma_{n0}(\alpha) = u_{\tau 0}(\alpha) = \gamma_{\tau 0}(\alpha) = 0,$$

$$Q_{n0}(\alpha) = M_{n0}(\alpha) = N_{n0}(\alpha) = N_{\tau 0}(\alpha) = M_{\tau 0}(\alpha) = 0,$$

то матимемо випадок жорсткого закріплення однієї частини границі панелі та вільної від навантаження другої частини панелі.

**Розв'язок задачі.** Для дослідження використано рівняння оболонок, які враховують поперечні зсуви та всі інерційні компоненти [8]

$$[\mathbf{L}]\mathbf{U} = -\mathbf{P}, \quad \mathbf{U} = \{u_1, u_2, w, \gamma_1, \gamma_2\}^T, \quad \mathbf{P} = \{q_1, q_2, q_3, m_1, m_2\}^T, \quad (4)$$

$$\mathbf{L}_{11} = B_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + B_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - k_1^2 \Lambda_1 - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}_{22} = B_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + B_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - k_2^2 \Lambda_2 - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}_{33} = \Lambda_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - [k_1 B_1 (k_1 + v_{12} k_2) + k_2 B_2 (k_2 + v_{21} k_1)] - 2h\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}_{44} = D_1 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_1 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}_{55} = D_{12} \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1^2} + D_2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha_2^2} - \Lambda_2 - \frac{2h^3}{3} \rho \frac{\partial^2}{\partial t^2},$$

$$\mathbf{L}_{14} = \mathbf{L}_{41} = k_1 \Lambda_1, \quad \mathbf{L}_{25} = \mathbf{L}_{52} = k_2 \Lambda_2, \quad \mathbf{L}_{24} = \mathbf{L}_{42} = 0, \quad \mathbf{L}_{15} = \mathbf{L}_{51} = 0,$$

$$\mathbf{L}_{12} = (B_1 v_{12} + B_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{21} = (B_{12} + B_2 v_{21}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{45} = (D_1 v_{12} + D_{12}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{54} = (D_{12} + D_2 v_{21}) \frac{\partial^2}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{34} = -\mathbf{L}_{43} = \Lambda_1 \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad \mathbf{L}_{35} = -\mathbf{L}_{53} = \Lambda_2 \frac{\partial}{\partial \alpha_2},$$

$$\mathbf{L}_{13} = (k_1 \Lambda_1 + B_1 k_1 + B_1 k_2 v_{12}) \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad \mathbf{L}_{31} = -(k_1 \Lambda_1 + B_1 k_1 + B_2 k_2 v_{21}) \frac{\partial}{\partial \alpha_1},$$

$$\mathbf{L}_{23} = (k_2 \Lambda_2 + B_2 k_2 + B_2 k_2 v_{21}) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad \mathbf{L}_{32} = -(k_2 \Lambda_2 + B_2 k_2 + B_1 k_1 v_{12}) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}.$$

Рівняння руху включень матимуть вигляд

$$\tilde{m}^{(j)} \frac{\partial^2 \tilde{w}^{(j)}(t)}{\partial t^2} = P^{(j)}(t) + \int_{L^{(j)}} p^{(j)}(\xi, t) dl(\xi), \quad j = \overline{1, N}, \quad (5)$$

де  $p^{(j)}(\alpha, t) = -Q_n(\alpha, t)$ ,  $\alpha \in L^{(j)}$  – контактні сили взаємодії панелі та включення.

У випадку усталених коливань  $p^{(j)}(\alpha, t) = -Q_n(\alpha) \sin(\omega t)$ . У результаті маємо крайову задачу (1), (2), (3), (4), (5).



$$\left\{ N_{n0}(\alpha), N_{\tau0}(\alpha), Q_{n0}(\alpha), M_{n0}(\alpha), M_{\tau0}(\alpha) \right\}^T =$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} C_{km}(\varepsilon) \left[ \mathbf{\Omega}_{km}^{(P)}(\alpha) \right] \left[ \mathbf{E}_{km}(\xi) \right] \mathbf{T}(\xi) dl(\xi), \quad \alpha \in L^{\varepsilon(N+1)},$$

$$-\omega^2 \tilde{m}^{(j)} \tilde{w}_0^{(j)} = P_0^{(j)} - \int_{L^{(j)}} Q_n(\zeta) dl(\zeta), \quad j = \overline{1, N},$$

де

$$Q_n(\zeta) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_L \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{i=1}^5 C_{km}(\varepsilon) Q_{in}(\zeta) \Phi_{km}^i(\xi) T_i(\xi) dl(\xi),$$

$$\Phi_{km}^1(\xi) = \Phi_{km}^4(\xi) = \Phi_{km}^{cs}(\xi), \Phi_{km}^2(\xi) = \Phi_{km}^5(\xi) = \Phi_{km}^{sc}(\xi), \Phi_{km}^3(\xi) = \Phi_{km}^{ss}(\xi),$$

$$\text{а } \left[ \mathbf{\Omega}_{km}^{(U)}(\alpha) \right], \left[ \mathbf{\Omega}_{km}^{(P)}(\alpha) \right], u_{in}(\alpha), u_{i\tau}(\alpha), \gamma_{in}(\alpha), \gamma_{i\tau}(\alpha), w_i(\alpha),$$

$$M_{in}(\alpha), M_{i\tau}(\alpha), N_{in}(\alpha), N_{i\tau}(\alpha), Q_{in}, i = \overline{1, 5} \text{ – такі ж, як в статті [8].}$$

Розв'язок системи інтегральних рівнянь можна знайти на основі різних числових схем. Для прикладу, достатньо добрі результати дає метод колокацій, коли контури узагальненої кривої  $L$  замінюємо ламаними ( $S^{(j)}$  – кількість відрізків розбиття  $j$ -ого контуру,  $\alpha^{(j)r}$  – середини відрізків розбиття  $j$ -ого контуру,  $l^{(j)r}$  – довжини відрізків розбиття  $L^{(j)r}$ ,  $r = \overline{1, S^{(j)}}$ ), а на кожному з прямолінійних відрізків контурів задаємо такий розподіл невідомих густин  $\mathbf{T}^{(j)}(\xi) = \mathbf{T}^{(j)r} \delta(\alpha^{(j)r}, \xi)$ . Мінімізуємо нев'язку в контрольних точках колокацій  $\alpha^{(j)q}$ , які вибираємо серединами відрізків розбиття контурів або точками, які є на відстані  $\varepsilon$  від них з боку розглядуваної області.

Звідси система  $5 \sum_{j=0}^{N+1} S^{(j)} + N$  лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих  $\tilde{w}_0^{(j)}$ ,  $j = \overline{1, N}$  та  $\mathbf{T}^{(j)r}$ ,  $j = \overline{0, N+1}$ ,  $r = \overline{1, S^{(j)}}$  набуде вигляду

$$\left\{ u_{n0}(\alpha^{(0)q}), u_{\tau0}(\alpha^{(0)q}), w_0(\alpha^{(0)q}), \gamma_{n0}(\alpha^{(0)q}), \gamma_{\tau0}(\alpha^{(0)q}) \right\}^T =$$

$$= \sum_{f=0}^{N+1} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[ \mathbf{\Omega}_{km}^{(U)}(\alpha^{(0)q}) \right] \left[ \mathbf{E}_{km}(\alpha^{(f)r}) \right] \mathbf{T}^{(f)r},$$

$$\alpha^{(0)q} \in L^{(0)}, q = \overline{1, S^{(0)}},$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ 0, 0, \tilde{w}_0^{(j)}, 0, 0 \right\}^T = \\
& \sum_{f=0}^{N+1} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[ \mathbf{\Omega}_{km}^{(U)}(\alpha^{(j)q}) \right] \left[ \mathbf{E}_{km}(\alpha^{(f)r}) \right] \mathbf{T}^{(f)r}, \\
& \alpha^{(j)q} \in L^{(j)}, q = \overline{1, S^{(j)}}, j = \overline{1, N}, \\
& \left\{ N_{n0}(\alpha^{(N+1)q}), N_{\tau 0}(\alpha^{(N+1)q}), Q_{n0}(\alpha^{(N+1)q}), M_{n0}(\alpha^{(N+1)q}), M_{\tau 0}(\alpha^{(N+1)q}) \right\}^T = \\
& = \sum_{f=0}^{N+1} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[ \mathbf{\Omega}_{km}^{(P)}(\alpha^{(N+1)q}) \right] \left[ \mathbf{E}_{km}(\alpha^{(f)r}) \right] \mathbf{T}^{(f)r}, \\
& \alpha^{(N+1)q} \in L^{\varepsilon(N+1)}, q = \overline{1, S^{(N+1)}}, \\
& P_0^{(j)} = \sum_{p=1}^{S^{(j)}} \sum_{f=0}^{N+1} \sum_{r=1}^{S^{(f)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M \sum_{i=1}^5 C_{km}(\varepsilon) \Psi_{in}(\alpha^{(j)p}) \Phi_{km}^i(\alpha^{(f)r}) T_i^{(f)r} - \omega^2 \tilde{m}^{(j)} \tilde{w}_0^{(j)}, \\
& j = \overline{1, N},
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\Psi_{in}(\alpha^{(j)p}) &= \Lambda_1 \Psi_{km}^{cs}(\alpha^{(j)p}) (\gamma_{1km}^i + \lambda_{1k} w_{km}^i - k_1 u_{1km}^i) + \\
&+ \Lambda_2 \Psi_{km}^{sc}(\alpha^{(j)p}) (\gamma_{2km}^i + \lambda_{2m} w_{km}^i - k_2 u_{2km}^i), \\
\Psi_{km}^{cs}(\alpha^{(j)p}) &= n_1(\alpha^{(j)p}) \int_{L^{\varepsilon(j)p}} \Phi_{km}^{cs}(\zeta) dl(\zeta), \\
\Psi_{km}^{sc}(\alpha^{(j)p}) &= n_2(\alpha^{(j)p}) \int_{L^{\varepsilon(j)p}} \Phi_{km}^{sc}(\zeta) dl(\zeta), \quad \alpha^{(j)p} \in L^{\varepsilon(j)p}.
\end{aligned}$$

Власні частоти знаходимо з умови існування нетривіального розв'язку відповідної системи однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь, прирівнюючи визначник системи до нуля. Характеристики напружено-деформованого стану вздовж довільного напрямку з нормаллю  $\mathbf{n}(\alpha) = \{n_1(\alpha), n_2(\alpha)\}$  та дотичною  $\boldsymbol{\tau}(\alpha) = \{\tau_1(\alpha), \tau_2(\alpha)\}$  можна отримати на основі знайдених дискретних значень функцій густин потенціалів простого шару на зовнішніх контурах та контурах включень, використовуючи наступні формули:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_n(\alpha, t) \\ u_\tau(\alpha, t) \\ w(\alpha, t) \\ \gamma_n(\alpha, t) \\ \gamma_\tau(\alpha, t) \end{array} \right\} = \sum_{j=0}^{N+1} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) \left[ \mathbf{\Omega}_{km}^{(U)}(\alpha) \right] \left[ \mathbf{E}_{km}(\alpha^{(j)r}) \right] \mathbf{T}^{(j)r} \sin(\omega t),$$

$$\begin{cases} N_n(\alpha, t) \\ N_\tau(\alpha, t) \\ Q_n(\alpha, t) \\ M_n(\alpha, t) \\ M_\tau(\alpha, t) \end{cases} = \sum_{j=0}^{N+1} \sum_{r=1}^{S^{(j)}} \sum_{k=0}^K \sum_{m=0}^M C_{km}(\varepsilon) [\mathbf{\Omega}_{km}^{(P)}(\alpha)] [\mathbf{E}_{km}(\alpha^{(j)r})] \mathbf{T}^{(j)r} \sin(\omega t).$$

**Числові результати.** Розглянемо частковий випадок задачі, коли маємо шарнірно оперту ортотропну прямокутну в плані панель подвійної кривини з двома круглими включеннями. Тоді область  $\Pi$  доцільно вибрати так, що її межа співпадає з зовнішньою межею панелі. Геометричні та фізичні параметри панелі:  $l_1 = 2 \text{ м}$ ,  $l_2 = 1 \text{ м}$ ,  $h = 0.01 \text{ м}$ ,  $k_1 = 0.1 \text{ м}^{-1}$ ,  $k_2 = 0.2 \text{ м}^{-1}$ ,  $E_1 = 128 \text{ ГПа}$ ,  $E_2 = 11 \text{ ГПа}$ ,  $G_{23} = 1.53 \text{ ГПа}$ ,  $G_{12} = G_{13} = 4.48 \text{ ГПа}$ ,  $\nu_{12} = 0.25$ ,  $\rho = 1500 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$ . Сили, які діють на

включення:  $P_0^{(1)} = 35000 \text{ Н}$ ,  $P_0^{(2)} = -55000 \text{ Н}$ . Маси включень:

$\tilde{m}^{(1)} = 50 \text{ кг}$ ,  $\tilde{m}^{(2)} = 80 \text{ кг}$ . Радіуси та розташування центрів включень:

$b_1 = 0.2 \text{ м}$ ,  $\alpha_1^{*(1)} = 0.5 \text{ м}$ ,  $\alpha_2^{*(1)} = 0.5 \text{ м}$ ;  $b_2 = 0.2 \text{ м}$ ,  $\alpha_1^{*(2)} = 1.4 \text{ м}$ ,  $\alpha_2^{*(2)} = 0.5 \text{ м}$ .

Параметри апроксимації:  $K = 100$ ,  $S^{(1)} = S^{(2)} = 32$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \frac{b_1 \pi}{S^{(1)}} \text{ м}$ ,

$$C_{km}(\varepsilon) = \mu_{km} \frac{4 \left( \sin\left(\frac{\lambda_{1k}\varepsilon_1}{2}\right) \right)^2 \left( \sin\left(\frac{\lambda_{2m}\varepsilon_2}{2}\right) \right)^2}{l_1 l_2 \left( \frac{\lambda_{1k}\varepsilon_1}{2} \right)^2 \left( \frac{\lambda_{2m}\varepsilon_2}{2} \right)^2}.$$

У випадку, коли  $k=0$  чи  $m=0$ , використовуємо відому границю  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  для обчислення значення виразу  $C_{km}(\varepsilon)$ . При параметричному заданні контурів включень враховуємо правило обходу контурів та орієнтацію нормалі.

На рис. 1-3 зображено амплітуду прогину панелі для різних значень частот коливань  $\bar{\omega} = \frac{\omega}{2\pi}$ .

Бачимо, що частота вимушувальних факторів суттєво впливає на амплітуду прогину панелі і, відповідно, на амплітуду переміщень включень. За даних значень частот маємо найпростішу форму коливань. На низькому частотному діапазоні можна спостерігати значне збільшення амплітуди на деяких ділянках панелі при збільшенні частоти вимушувальних факторів (рис. 1, 2), на вищому частотному діапазоні амплітуда при збільшенні частоти має тенденцію до зменшення (рис. 3), тобто

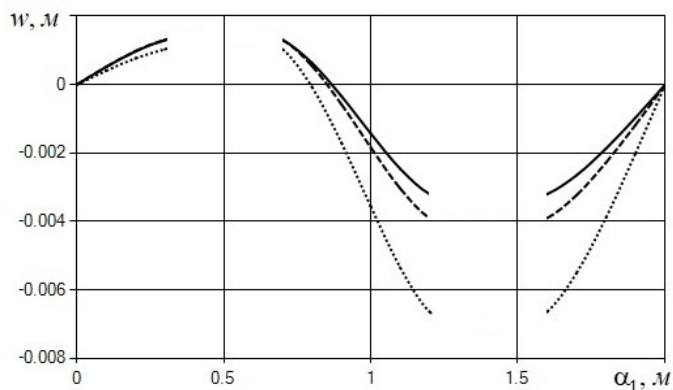


Рис. 1. Амплітуда прогину панелі на лінії  $\alpha_2 = 0.5 \text{ м}$  для різних значень частот коливань: суцільна лінія –  $\bar{\omega} = 5 \text{ Гц}$ , штрихова лінія –  $\bar{\omega} = 30 \text{ Гц}$ , пунктирна лінія –  $\bar{\omega} = 50 \text{ Гц}$ .

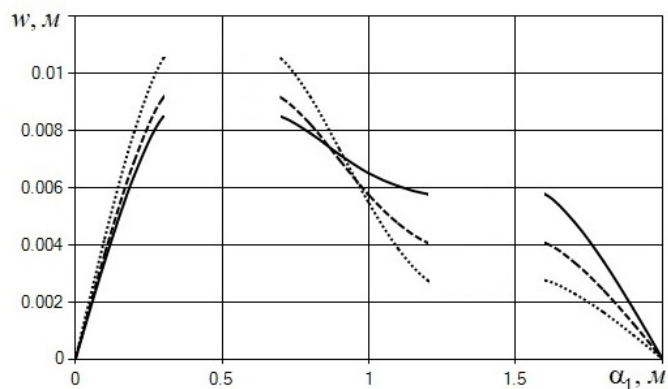


Рис. 2. Амплітуда прогину панелі на лінії  $\alpha_2 = 0.5 \text{ м}$  для різних значень частот коливань: суцільна лінія –  $\bar{\omega} = 80 \text{ Гц}$ , штрихова лінія –  $\bar{\omega} = 83 \text{ Гц}$ , пунктирна лінія –  $\bar{\omega} = 86 \text{ Гц}$

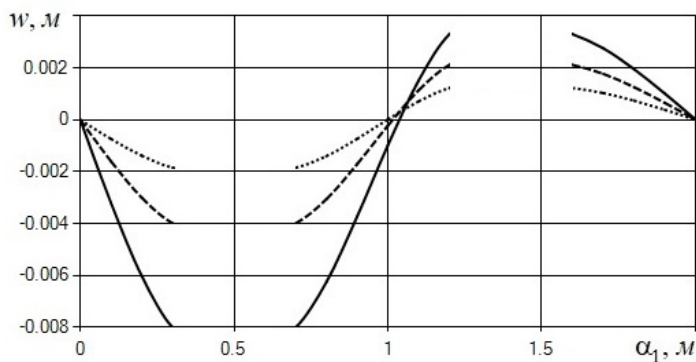


Рис. 3. Амплітуда прогину панелі на лінії  $\alpha_2 = 0.5 \text{ м}$  для різних значень частот коливань: суцільна лінія –  $\bar{\omega} = 110 \text{ Гц}$ , штрихова лінія –  $\bar{\omega} = 120 \text{ Гц}$ , пунктирна лінія –  $\bar{\omega} = 140 \text{ Гц}$



залежність амплітуди прогину панелі загалом і, відповідно, амплітуди переміщень включень від частоти вимушувальних факторів має немотонний характер. Отже, не тільки резонансні частоти є небезпечними для панелі з включеннями, небезпечними можуть бути також частоти з низького частотного діапазону.

**Висновки.** Використовуючи побудовані в роботі лінійні алгебраїчні рівняння, можна отримати розв'язки для довільних мішаних випадків крайових умов на зовнішній границі панелі, розглядаючи довільні комбінації амплітуд  $w(\alpha), u_n(\alpha), \gamma_n(\alpha), u_\tau(\alpha), \gamma_\tau(\alpha), Q_n(\alpha), M_n(\alpha), N_n(\alpha), M_\tau(\alpha), N_\tau(\alpha)$ . Також дозволяються довільні різні мішані крайові умови на всіх складових зовнішньої границі. Тому в рамках поставленої задачі не обов'язково, щоб цілий зовнішній контур панелі був закріплений. Одна або декілька складових зовнішнього контуру можна розглядати якимось чином закріпленим. Ключові рівняння враховують деформацію поперечного зсуву та всі інерційні компоненти, включаючи інерцію обертання. Це дозволяє досліджувати у кращій якості різні типи коливань, спричинених різним характером збурення зовнішньої границі у випадку анізотропних матеріалів. На етапі числового розрахунку необхідним є дослідження збіжності й оптимального вибору значень параметрів апроксимації  $S^{(j)}, K, M, \varepsilon$  в рамках кожного конкретного випадку для отримання достатньо точних числових результатів. Запропонована в статті числова схема дає розв'язки, які добре узгоджуються з відомими результатами для часткових граничних випадків, отриманими іншими методами.

### *Література*

1. Механика композитных материалов и элементов конструкций. В 3-х т. / под. ред. А.Н. Гузя. – Т.1. Механика материалов. – К., 1982. – 368 с.; Т.2. Механика элементов конструкций – К., 1983. – 464 с.; Т.3. Прикладные исследования. – К., 1983. – 262 с.
2. Свободные колебания элементов оболочечных конструкций / Я.М. Григоренко, Е.И. Беспалова, А.Б. Китайгородский, А.И. Шинкарь. – К.: Наук. думка, 1986. – 172 с.
3. Григоренко Я.М. Численно-аналитическое решение задач механики оболочек на основе различных моделей / Я.М. Григоренко, Г.Г. Влайков, А.Я. Григоренко. – К.: Изд. дом «Академперіодика», 2006. – 472 с.
4. Шопа, Т. До побудови розв'язку задачі про коливання ортотропної непологої циліндричної панелі з включенням довільної конфігурації / Т. Шопа // *Машинознавство*. – 2010. – №7 – С. 38-42.
5. Бурак Я.Й. Аналітична механіка локально навантажених оболонок / Я.Й. Бурак, Ю.К. Рудавський, М.А. Сухорольський. – Львів: Інтеллект-Захід, 2007. – 240 с.

6. Lighthill, J. Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions / J. Lighthill. – Cambridge University Press, 1958. – 79 p.
7. Сухорольський, М.А. Послідовності і ряди / М.А. Сухорольський. – Львів: Растр-7, 2010. – 346 с.
8. Шопа Т. Коливання ортотропної панелі подвійної кривини з множиною отворів довільної конфігурації / Т. Шопа // Вісник ТНТУ. – 2012. – № 3. – С. 63-74.

*Стаття надійшла до редакційної колегії 8.03.2013 р.*

*Рекомендовано до друку д.т.н., професором Лусканичем М.В., член-кор. НАН України, д.ф.-м.н., професором Кітом Г.С. (м. Львів)*

## VIBRATION OF ORTHOTROPIC DOUBLY CURVED PANEL WITH A SET OF INCLUSIONS OF ARBITRARY CONFIGURATION RIGIDLY CLAMPED TO THE PANEL

**T. V. Shopa**

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics  
of National Academy of Sciences of Ukraine;  
79060, L'viv, Naukova Str., 3-b; e-mail: tetyana.sh@gmail.com*

*In the framework of the refined theory, which takes into account transverse shear deformation and all inertial components, the solution of the problem on the steady state vibration of the orthotropic doubly curved panel with the arbitrary number of rigid inclusions of the arbitrary geometrical form, orientation, and location is constructed. Inclusions are rigidly clamped to the panel. External boundary of the panel is of the arbitrary geometrical configuration. Arbitrary harmonic in time boundary conditions are considered on the external boundary of the panel. The solution is built on the basis of the indirect boundary elements method and the sequential approach to the representation of the Green's function. The boundary value problem is reduced to the system of algebraic equations.*

**Key words:** *orthotropic doubly curved panel, vibration, inclusions, natural frequencies, sequential approach, Green function, indirect boundary elements method, collocation method.*