Теорія ймовірностей та математична статистика

УДК 517.9, 519.2

ЯВНИЙ ВИГЛЯД ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ПСЕВДО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ЗІ СТАЛИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Г. С. Бігун[1], М. М. Осипчук[2]

[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 79060, Львів, вул. Наукова, 3-б; e-mail: freischunhaluna@yandex.ru

[2]Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; 76025, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57; e-mail: mykhailo.osypchuk@pu.if.ua

Розглянуто псевдо-диференціальне рівняння виду $u_t' = \mathbf{A}u + (a, \mathbf{B})u$*, де* a *– вектор в* R^d*,* $\mathbf{B}$ *– псевдо-диференціальний оператор з символом* $(i\,|\,\lambda\,|^{\alpha-2}\,\lambda)_{\lambda\in\mathrm{R}^d}$*,* $\mathbf{A} = c\,\mathbf{div}(\mathbf{B})$ *зі сталими* $c > 0$*,* $\alpha \in (1,2]$*. Побудовано фундаментальний розв'язок цього рівняння у вигляді оберненого перетворення Фур'є. Досліджено деякі його властивості.*

Ключові слова: *псевдо-диференціальний оператор, фундаментальний розв'язок, стійкий випадковий процес.*

Вступ.

Означимо для $\gamma > 0$ клас F_γ дійснозначних функцій $\varphi(x)$, заданих на скінченновимірному евклідовому просторі R^d у вигляді перетворення Фур'є

$$\varphi(x) = \int_{\mathrm{R}^d} e^{i(x,\lambda)}\Phi(\lambda)d\lambda, \tag{1}$$

де $(\cdot,\cdot)$ означає скалярний добуток в R^d, та таких, що $|\,\lambda\,|^\gamma\,\Phi(\lambda)$ абсолютно інтегровна на R^d.

Для деякого фіксованого $\alpha \in (1,2]$ позначимо через $\mathbf{B}$ оператор, що діє на функції з $F_{\alpha-1}$ за правилом

$$\mathbf{B}\varphi(x) = \int_{\mathrm{R}^d} i\,|\lambda|^{\alpha-2}\,\lambda e^{i(x,\lambda)}\Phi(\lambda)d\lambda. \tag{2}$$

Зауважимо, що при $\alpha = 2$ цей оператор є градієнтом, який будемо позначати символом ∇.

Нехай $\mathbf{A} = c\,\mathbf{div}(\mathbf{B})$, де $c > 0$ деяка стала, а $\mathbf{div}$ – оператор дівергенції. Легко бачити, що для функцій $\varphi \in F_\alpha$ має місце рівність

$$\mathbf{A}\varphi(x) = -c\int_{\mathrm{R}^d} |\lambda|^{\alpha}\, e^{i(x,\lambda)}\Phi(\lambda)d\lambda. \tag{3}$$

Для достатньо гладких і обмежених разом зі своїми похідними функцій $(\varphi(x))_{x\in\mathrm{R}^d}$ дії операторів $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ можуть бути представлені у вигляді

$$\mathbf{A}\varphi(x) = \frac{c}{\kappa}\int_{\mathrm{R}^d} \frac{\varphi(x+y)-\varphi(x)-(\nabla\varphi(x),y)}{|y|^{d+\alpha}}dy,$$

$$\mathbf{B}\varphi(x) = \frac{1}{\alpha\kappa}\int_{\mathrm{R}^d} \frac{\varphi(x+y)-\varphi(x)}{|y|^{d+\alpha}}y\,dy,$$

де $\kappa = -\dfrac{2\pi^{(d-1)/2}\Gamma(2-\alpha)\Gamma((\alpha+1)/2)\cos(\pi\alpha/2)}{\alpha(\alpha-1)\Gamma((d+\alpha)/2)}$.

Оператор $\mathbf{A}$ є твірним оператором симетричного α-стійкого випадкового процесу, що є марківським процесом в R^d зі щільністю ймовірності переходу ($t > 0$, $x \in \mathrm{R}^d$, $y \in \mathrm{R}^d$)

$$g(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathrm{R}^d} \exp\{i(x-y,\lambda) - ct\,|\lambda|^{\alpha}\}d\lambda \tag{4}$$

Якщо $\alpha = 2$ і $c = \dfrac{1}{2}$, то такий процес є вінеровим.

В роботі [2] побудовано функцію $(G(t,x,y))_{t>0,x\in\mathrm{R}^d,y\in\mathrm{R}^d}$, що є фундаментальним розв'язком псевдо-диференціального рівняння

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = \mathbf{A}_x u(t,x) + (a(x),\mathbf{B}_x)u(t,x), \tag{5}$$

де функція $(a(x))_{x\in\mathrm{R}^d}$ неперервна і обмежена, а індекс x у операторів $\mathbf{A}$ і $\mathbf{B}$ означає їх дію на функцію кількох змінних за змінною x. Серед його властивостей слід відзначити виконання рівності Колмогорова-Чепмена ($s > 0$, $t > 0$, $x \in \mathrm{R}^d$, $y \in \mathrm{R}^d$)

$$G(s+t,x,y) = \int_{\mathrm{R}^d} G(s,x,z)G(t,z,y)dz \tag{6}$$

та правильну при всіх $t > 0$, $x \in \mathrm{R}^d$ рівність

$$\int_{\mathbb{R}^d} G(t,x,y)dy = 1. \tag{7}$$

Відкритим залишалось питання про невід'ємність функції $G(t,x,y)$, що означало б існування марківського процесу в $\mathbb{R}^d$ зі щільністю ймовірності переходу $G(t,x,y)$. Дане повідомлення дає деяку відповідь на це питання.

Нижче ми побудуємо в явному вигляді фундаментальний розв'язок рівняння (5) у випадку сталої функції a, покажемо, що в цій ситуації функція $G(t,x,y)$ не є невід'ємною при $\alpha \neq 2$.

1. Побудова фундаментального розв'язку

Як і в [2] розглянемо функцію $(G(t,x,y))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d}$, яка задається рівністю

$$G(t,x,y) = g(t,x,y) + |a| \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} g(t-\tau,x,z)V(\tau,z,y)dz, \tag{8}$$

де $a \in \mathbb{R}^d$ довільний (відмінний від нульового) сталий вектор, а функція $(V(t,x,y))_{t>0, x\in\mathbb{R}^d, y\in\mathbb{R}^d}$ є сумою ряду

$$V(t,x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} V_k(t,x,y), \tag{9}$$

де ($\hat{a}$ – орт вектора a)

$$V_0(t,x,y) = (\mathbf{B}_x g(t,x,y), \hat{a}), \tag{10}$$

а при $k \geq 1$

$$V_k(t,x,y) = |a| \int_0^t d\tau \int_{\mathbb{R}^d} V_0(t-\tau,x,z)V_{k-1}(\tau,z,y)dz \tag{11}$$

В [2] доведено, що мають місце оцінки

$$|V_0(t,x,y)| \leq \frac{N}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}}, \tag{12}$$

$$|V_k(t,x,y)| \leq M \frac{N^k}{k!} \frac{t^{k/\alpha}}{(t^{1/\alpha} + |y-x|)^{d+\alpha-1}} \prod_{n=1}^{k-1} \left(1 + \frac{n}{\alpha} B\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{n}{\alpha}\right)\right), \tag{13}$$

де N і M деякі додатні сталі, і ряд (9) збігається локально рівномірно по $t > 0$ та рівномірно по $(x,y) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$. Крім того, функція (8) є фундаментальним розв'язком рівняння (5) і виконуються рівності (6), (7).

Далі нам будуть потрібні наступні допоміжні твердження.

Лема 1. *Нехай $\varphi \in F_{\alpha-1}$. Тоді для функції $f(x,y) = \varphi(x-y)$ має місце рівність $\mathbf{B}_x f(x,y) = -\mathbf{B}_y f(x,y)$.*

Доведення. Розглянемо при фіксованому $x \in \mathbb{R}^d$ функцію $f_x(y) = f(x,y)$ та при фіксованому $y \in \mathbb{R}^d$ функцію $f_y(x) = f(x,y)$.

Зауважимо, що ці функції належать до класу $F_{\alpha-1}$. Дійсно,

$$f_x(y)=\int_{\mathsf{R}^d} e^{i(y,\lambda)}\Phi(-\lambda)e^{-i(x,\lambda)}d\lambda$$

і при фіксованому $x\in\mathsf{R}^d$ функція $|\lambda|^{\alpha-1}|\Phi(-\lambda)e^{-i(x,\lambda)}|=|\lambda|^{\alpha-1}|\Phi(-\lambda)|$ інтегровна на R^d. Аналогічно для функції $f_y(x)$.

Тоді за означенням оператора $\mathbf{B}$ матимемо

$$\mathbf{B}_x f(x,y)=\mathbf{B}_x f_y(x)=\int_{\mathsf{R}^d} i\,|\lambda|^{\alpha-2}\,\lambda e^{i(x-y,\lambda)}\Phi(\lambda)d\lambda,$$

$$\mathbf{B}_y f(x,y)=\mathbf{B}_y f_x(y)=\int_{\mathsf{R}^d} i\,|\lambda|^{\alpha-2}\,\lambda e^{i(y-x,\lambda)}\Phi(-\lambda)d\lambda.$$

Зробивши заміну змінної $\lambda=-\mu$ в інтегралі другої рівності, одержимо твердження леми.

Зауваження. *Функція $g(t,x,y)$ як функція від (x,y) при фіксованому $t>0$ задовольняє умову леми 1. Крім того, $g(t,x,y)=g_t(x-y)$, причому $g_t\in F_{k(\alpha-1)}$ з довільним $k\in\mathsf{N}$.*

Лема 2. *Нехай $\varphi\in F_{m(\alpha-1)}$ з деяким $m\in\mathsf{N}$. Тоді для функції $f(x,y)=\varphi(x-y)$ мають місце рівності*

$$(\mathbf{B}_x^a)^k(\mathbf{B}_y^a)^l f(x,y)=(\mathbf{B}_y^a)^l(\mathbf{B}_x^a)^k f(x,y)=(-1)^l(\mathbf{B}_x^a)^{k+l}f(x,y),$$

де оператор $\mathbf{B}^a=(a,\mathbf{B})$ з деяким ненульовим вектором $a\in\mathsf{R}^d$, $k\in\mathsf{N}$, $l\in\mathsf{N}$, $k+l\le m$.

Доведення. Зафіксуємо $x\in\mathsf{R}^d$ і розглянемо функцію

$$f(x,y)=\int_{\mathsf{R}^d} e^{i(y,\lambda)}\Phi(-\lambda)e^{-i(x,\lambda)}d\lambda.$$

Тоді $$(\mathbf{B}_y^a)^l f(x,y)=\int_{\mathsf{R}^d}(i\,|\lambda|^{\alpha-1}(\lambda,a))^l e^{i(y-x,\lambda)}\Phi(-\lambda)d\lambda=$$

$$=(-1)^l\int_{\mathsf{R}^d}(i\,|\lambda|^{\alpha-1}(\lambda,a))^l e^{i(x,\lambda)}\Phi(\lambda)e^{-i(y,\lambda)}d\lambda.$$

Зафіксувавши тепер $y\in\mathsf{R}^d$, одержимо $(\mathbf{B}_x^a)^k(\mathbf{B}_y^a)^l f(x,y)=$

$$=(-1)^l\int_{\mathsf{R}^d}(i\,|\lambda|^{\alpha-1}(\lambda,a))^k(i\,|\lambda|^{\alpha-1}(\lambda,a))^l e^{i(y-x,\lambda)}\Phi(-\lambda)d\lambda=$$

$$=(-1)^l\int_{\mathsf{R}^d}(i\,|\lambda|^{\alpha-1}(\lambda,a))^{k+l}e^{i(x-y,\lambda)}\Phi(\lambda)d\lambda=(-1)^l(\mathbf{B}_x^a)^{k+l}f(x,y).$$

Аналогічно одержуємо такий же вираз і для $(\mathbf{B}_y^a)^l(\mathbf{B}_x^a)^k f(x,y)$.

Зауваження. *До функції $g(t,x,y)$ можна застосовувати оператор $\mathbf{B}^a$ по кожній із змінних x та y довільну скінченну кількість раз в будь-якому порядку.*

Основний результат цього пункту міститься в наступному твердженні.

Теорема. *Фундаментальний розв'язок рівняння (5) зі сталою функцією* $a(x) = a \in \mathrm{R}^d$ *має вигляд*

$$G(t,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathrm{R}^d} \exp\left\{i(|\lambda|^{\alpha-2} ta + x - y, \lambda) - ct|\lambda|^{\alpha}\right\} d\lambda.$$

Доведення. Скористаємось зображеннями (8) і (9) і спочатку доведемо, за індукцією, що для всіх $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, $t > 0$, $x \in \mathrm{R}^d$, $y \in \mathrm{R}^d$ має місце рівність

$$V_k(t,x,y) = (-1)^{k+1} |a|^k \frac{t^k}{k!} (\mathbf{B}_y^{\hat{a}})^{k+1} g(t,x,y). \tag{14}$$

При $k = 0$ рівність (14) правильна (див. також (10)). Нехай вона правильна при деякому $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. Тоді, враховуючи (11), маємо

$$V_{k+1}(t,x,y) = |a| \int_0^t d\tau \int_{\mathrm{R}^d} V_0(t-\tau,x,z) V_k(\tau,z,y) dz.$$

Нерівності (12) і (13) дозволяють стверджувати, що інтеграл

$$\int_{\mathrm{R}^d} V_0(t-\tau,x,z) V_k(\tau,z,y) dz \tag{15}$$

збігається абсолютно при всіх $t > 0$, $x \in \mathrm{R}^d$, $y \in \mathrm{R}^d$ та $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$. Таким чином, маємо рівність

$$V_{k+1}(t,x,y) = \frac{(-|a|)^{k+1}}{k!} \int_0^t \tau^k d\tau \int_{\mathrm{R}^d} \mathbf{B}_x^{\hat{a}} g(t-\tau,x,z) (\mathbf{B}_y^{\hat{a}})^{k+1} g(\tau,z,y) dz.$$

Далі для зручності введемо позначення $\Delta^u \varphi(x) = \varphi(x+u) - \varphi(x)$, $\Xi^u \varphi(x) = |\varphi(x+u)| + |\varphi(x)|$. Тоді можемо записати ($K = 1/(\kappa\alpha)$)

$$(\mathbf{B}_y^{\hat{a}})^{k+1} g(\tau,z,y) = K^{k+1} \int_{\mathrm{R}^d} \dots \int_{\mathrm{R}^d} \prod_{j=1}^{k+1} \frac{(u_j,\hat{a})}{|u_j|^{d+\alpha}} \Delta_y^{u_j} g(\tau,z,y) du_1 \dots du_{k+1},$$

$$\mathbf{B}_x^{\hat{a}} g(t-\tau,x,z) = K \int_{\mathrm{R}^d} \frac{(u_0,\hat{a})}{|u_0|^{d+\alpha}} \Delta_x^{u_0} g(t-\tau,x,z) du_0.$$

Отже,

$$V_{k+1}(t,x,y) = K^{k+2} \frac{(-|a|)^{k+1}}{k!} \int_0^t \tau^k d\tau \int_{\mathrm{R}^d} dz \int_{\mathrm{R}^d} \frac{(u_0,\hat{a})}{|u_0|^{d+\alpha}} \Delta_x^{u_0} g(t-\tau,x,z) du_0 \times$$
$$\times \int_{\mathrm{R}^d} \dots \int_{\mathrm{R}^d} \prod_{j=1}^{k+1} \frac{(u_j,\hat{a})}{|u_j|^{d+\alpha}} \Delta_y^{u_j} g(\tau,z,y) du_1 \dots du_{k+1} \tag{16}$$

Підінтегральна функція в останній формулі може бути оцінена зверху за абсолютною величиною виразом

$$\tau^k \frac{1}{|u_0|^{d+\alpha-1}} \Xi_x^u \frac{t-\tau}{((t-\tau)^{1/\alpha}+|z-x|)^{d+\alpha-1}} \prod_{j=1}^{k+1} \frac{1}{|u_j|^{d+\alpha-1}} \Xi_y^{u_j} \frac{\tau}{(\tau^{1/\alpha}+|y-z|)^{d+\alpha-1}}.$$

Інтеграл від нього за (τ, z) по $(0,t)\times \mathrm{R}^d$ не перевищує (див. [1, лема 5])

$$t^{k+2+1/\alpha} \frac{const}{|u_0|^{d+\alpha-1}} \prod_{j=1}^{k+1} \frac{1}{|u_j|^{d+\alpha-1}} \sum_{j=1}^{k+1} \sum_{C\in C(k+1,j)} \left(t^{1/\alpha} + \left| y + \sum_{l\in C} u_l - x - u_0 \right| \right)^{-d-\alpha+1}, \quad (17)$$

де $C(k+1, j)$ множина комбінацій з $k+1$ перших натуральних чисел по j. Така функція інтегровна за $(u_0, u_1, \ldots, u_{k+1})$ по $D_\varepsilon = \prod_{j=0}^{k+1} \{|u_j| \geq \varepsilon\}$ для кожного $\varepsilon > 0$ при фіксованих $t > 0$, $x \in \mathrm{R}^d$, $y \in \mathrm{R}^d$.

Збіжність інтеграла (15) дозволяє перейти в інтегралі (17) по D_ε до границі при $\varepsilon \to 0+$. Причому, ми можемо попередньо змінити потрібним чином порядок інтегрування.

Отже, в інтегралі з рівності (16) можна змінити порядок інтегрування і, враховуючи лінійність різницевих операторів Δ^u, одержати рівність

$$V_{k+1}(t,x,y) = \frac{(-|a|)^{k+1}}{k!} \int_0^t \tau^k d\tau \mathbf{B}_x^{\hat{a}} (\mathbf{B}_y^{\hat{a}})^{k+1} \int_{\mathrm{R}^d} g(t-\tau, x, z) g(\tau, z, y) dz =$$

$$= \frac{(-|a|)^{k+1}}{(k+1)!} t^{k+1} \mathbf{B}_x^{\hat{a}} (\mathbf{B}_y^{\hat{a}})^{k+1} g(t,x,y).$$

З врахуванням тверджень лем 1 і 2 маємо

$$V_{k+1}(t,x,y) = (-1)^{k+2} \frac{|a|^{k+1}}{(k+1)!} t^{k+1} (\mathbf{B}_y^{\hat{a}})^{k+2} g(t,x,y).$$

Цим і завершується доведення рівностей (14). Крім того, з леми 1 маємо, що при всіх $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ та $t > 0$, $x \in \mathrm{R}^d$, $y \in \mathrm{R}^d$

$$V_k(t,x,y) = \frac{(|a|t)^k}{k!} (\mathbf{B}_x^{\hat{a}})^{k+1} g(t,x,y).$$

Тоді $V(t,x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|a|t)^k}{k!} (\mathbf{B}_x^{\hat{a}})^{k+1} g(t,x,y)$ і

$$G(t,x,y) = g(t,x,y) + \\ + |a| \int_0^t d\tau \int_{\mathrm{R}^d} g(t-\tau, x, z) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|a|\tau)^k}{k!} (\mathbf{B}_z^{\hat{a}})^{k+1} g(\tau, z, y) dz. \quad (18)$$

Ряд в рівності (18) збігається рівномірно по $z \in \mathrm{R}^d$ і локально рівномірно по $\tau > 0$. Тому можливе почленне інтегрування цього ряду, після чого другий доданок правої частини рівності (18) прийме вигляд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|a|^{k+1}}{k!}\int_0^t\tau^k d\tau\int_{\mathrm{R}^d}g(t-\tau,x,z)(\mathbf{B}_z^{\hat{a}})^{k+1}g(\tau,z,y)dz=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-|a|)^{k+1}}{k!}\int_0^t\tau^k d\tau\int_{\mathrm{R}^d}g(t-\tau,x,z)(\mathbf{B}_y^{\hat{a}})^{k+1}g(\tau,z,y)dz,$$

де враховано твердження леми 1.

Аналогічні до наведених вище викладки дозволяють винести оператор $(\mathbf{B}_y^{\hat{a}})^{k+1}$ з-під інтеграла по z і одержати

$$G(t,x,y)=g(t,x,y)+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-|a|)^{k+1}}{(k+1)!}t^{k+1}(\mathbf{B}_y^{\hat{a}})^{k+1}g(t,x,y)=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(\mathbf{B}_x^{a})^{k}g(t,x,y). \tag{19}$$

Врахувавши рівність (4), можемо записати

$$(\mathbf{B}_x^{a})^{k}g(t,x,y)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathrm{R}^d}(i|\lambda|^{\alpha-2}(\lambda,a))^k\, exp\{i(x-y,\lambda)-ct|\lambda|^{\alpha}\}d\lambda .$$

Отже,

$$G(t,x,y)=\frac{1}{(2\pi)^d}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_{\mathrm{R}^d}(i|\lambda|^{\alpha-2}\,t(\lambda,a))^k\, exp\{i(x-y,\lambda)-ct|\lambda|^{\alpha}\}d\lambda . \tag{20}$$

Зауважимо, що ряд $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(i|\lambda|^{\alpha-2}\,t(\lambda,a))^k$ збігається локально рівномірно по λ на R^d. Тому для кожного $r>0$ і $U_r=\{\lambda\in\mathrm{R}^d:|\lambda|\le r\}$

$$\int_{U_r}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(i|\lambda|^{\alpha-2}\,t(\lambda,a))^k\, exp\{i(x-y,\lambda)-ct|\lambda|^{\alpha}\}d\lambda=$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int_{U_r}(i|\lambda|^{\alpha-2}\,t(\lambda,a))^k\, exp\{i(x-y,\lambda)-ct|\lambda|^{\alpha}\}d\lambda. \tag{21}$$

Оскільки $\left|\frac{1}{k!}\int_{U_r}(i|\lambda|^{\alpha-2}\,t(\lambda,a))^k\exp\{i(x-y,\lambda)-ct|\lambda|^{\alpha}\}d\lambda\right|\le$

$$\le\frac{(t|a|)^k}{k!}\int_{\mathrm{R}^d}(|\lambda|^{k(\alpha-1)}\exp\{-ct|\lambda|^{\alpha}\}d\lambda=R_k ,$$

а останній інтеграл можна легко обчислити і одержати

$$R_k=\frac{(t|a|)^k}{k!}\frac{S_d}{\alpha}(ct)^{-\frac{d+k(\alpha-1)}{\alpha}}\Gamma\left(\frac{d+k(\alpha-1)}{\alpha}\right),$$

де S_d – площа d-вимірної одиничної сфери, то ряд в правій частині рівності (21) збігається рівномірно по r на $(0,+\infty)$, бо

$$\frac{R_{k+1}}{R_k}=\frac{|a|t}{k+1}(ct)^{1/\alpha-1}\frac{\Gamma\left(\frac{d+(k+1)(\alpha-1)}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+k(\alpha-1)}{\alpha}\right)}\to 0,\quad k\to\infty.$$

Перейшовши в рівності (21) до границі при $r\to+\infty$, з врахуванням (20), одержимо

$$G(t,x,y)=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathrm{R}^d}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}(i|\lambda|^{\alpha-2}\,t(\lambda,a))^k\exp\{i(x-y,\lambda)-ct|\lambda|^{\alpha}\}d\lambda=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathrm{R}^d}\exp\{i(|\lambda|^{\alpha-2}\,ta+x-y,\lambda)-ct|\lambda|^{\alpha}\}d\lambda.$$

Теорема доведена.

2. Невід'ємність фундаментального розв'язку

Явна формула для фундаментального розв'язку псевдо-диференціального рівняння (5) зі сталою функцією $a(x)=a\in\mathrm{R}^d$ дозволяє дослідити його невід'ємність.

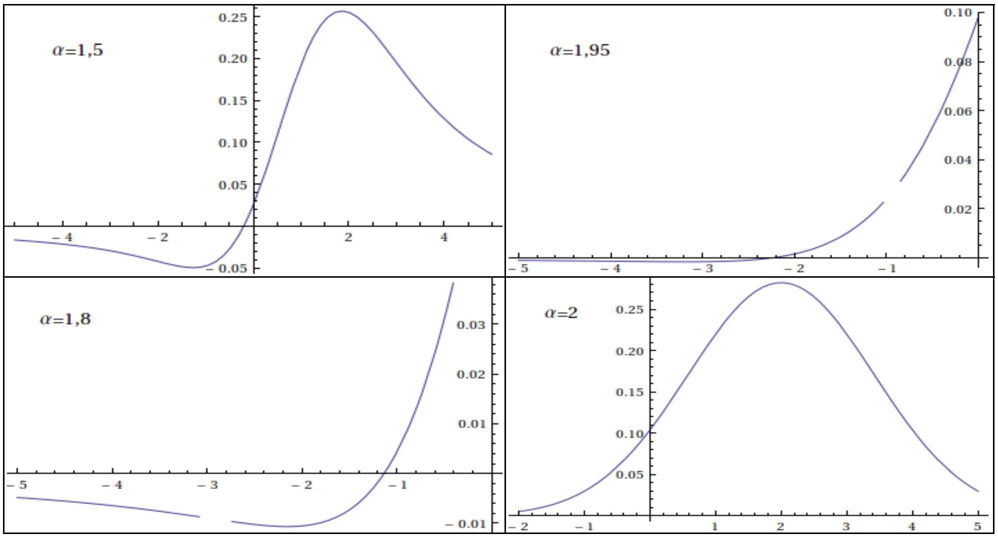

Рис. 1. Графіки функції $G(t,x,y)$ при фіксованих (t,x)

Розглянемо випадок $d=1$. Задавши деякі конкретні значення $c>0$, $t>0$, $x\in\mathrm{R}$, $a\in\mathrm{R}$, можемо побудувати графіки функцій $G(t,x,y)$, як функцій від y при різних значеннях $\alpha\in(1,2]$. На рисунку 1 зображено такі графіки одержані з допомогою Wolfram Mathematica 8. Ми взяли $c=1/2$, $t=2$, $x=0$, $a=1$.

Видно, що функція $G(t,x,y)$ приймає від'ємні значення при $\alpha \in (1,2)$ і тільки при $\alpha = 2$ маємо $G(t,x,y) > 0$. Останній випадок відповідає вінеровому процесу зі сталим переносом.

Література

1. Кочубей А.Н. Параболические псевдодифференциальные уравнения, гиперсингулярные интегралы и марковские процессы / А.Н. Кочубей // Известия АН СССР. – 1988. – **52**(5). – С. 909-934.
2. Osypchuk M.M. On some perturbations of a stable process and solutions to the Cauchy problem for a class of pseudo-differential equations / M.M. Osypchuk // Carpathian Math. Publ. – 2015. – **7** (1).

Стаття надійшла до редакційної колегії 28.04.2015 р.
Рекомендовано до друку член-кореспондентом НАН України,
д.ф.-м.н., професором ***Портенком М.І.*** *(м. Київ),*
д.ф.-м.н., професором ***Копитком Б.І.*** *(м. Львів)*

THE EXPLICIT FORM OF THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF ONE PSEUDO-DIFFERENTIAL EQUATION WITH CONSTANT COEFFICIENTS

G. S. Bigun[1], M. M. Osypchuk[2]

[1]*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NAS of Ukraine; 79060, Lviv, Naukova St., 3-b;*
e-mail: freischunhaluna@yandex.ru

[2]*Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;*
76025, Ivano-Frankivsk, Shevchenka str., 57;
e-mail: mykhailo.osypchuk@pu.if.ua

We consider pseudo-differential equation of the form $u_t' = \mathbf{A}u + (a, \mathbf{B})u$ *where* a *is a vector in* R^d, $\mathbf{B}$ *is a pseudo-differential operator with symbol* $(i|\lambda|^{\alpha-2}\lambda)_{\lambda\in\mathrm{R}^d}$ *and* $c > 0$, $\alpha \in (1,2]$ *are fixed constants. The fundamental solution of this equation is constructed in the form of inverse Fourier transform. Some of its properties investigated.*

Key words: *pseudo-differential operator, fundamental solution, stable stochastic process.*