УДК 519.17, 519.173

ОПТИМІЗАЦІЯ ТРІАНГУЛЯЦІЇ ТРИКУТНИКА

А. І. Казмерчук
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
76000, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: a_kazmerchuk@ukr.net

Розглядається задача тріангуляції трикутника за допомогою прямих. Отримано оцінки для кількості трикутників. Знайдено мінімальну кількість прямих, при розбитті якими відношення кількості трикутників до кількості прямих не менше заданого числа.

Ключові слова: *тріангуляція трикутника, задача тріангуляції трикутника прямими.*

1. Вступ

Задача тріангуляції опуклого многокутника, як одна із задач обчислювальної геометрії, важлива також і своїми прикладними аспектами. У даній роботі вивчається питання тріангуляції трикутника при проведенні m прямих. Дано відповідь на питання, поставлене в [1], про відшукання при $k = 4$ мінімального m, для якого $\frac{T(m)}{m} \ge k$, де $T(m)$ – максимальна кількість трикутників при тріангуляції m прямими. Отримано також відповідь на питання при $k = 2{,}3$.

2. Основний результат

Теорема 1: $\min\limits_{\frac{T(m)}{m} \ge k} m = a_k$, *де* $a_2 = 1, a_3 = 9, a_4 = 12$.

Доведення: Нехай при проведенні m прямих трикутник розбивається на менші трикутники. Продовження прямих за межі трикутника витираємо. Після цього утворюється граф, для якого введемо позначення: $\hat{A}_1$ – кількість вершин на сторонах вихідного трикутника, $\hat{A}_2$ – кількість вершин всередині вихідного трикутника, $Đ_1$ – кількість ребер на сторонах вихідного трикутника, $Đ_2$ – кількість ребер всередині вихідного трикутника, $\tilde{A}$ – кількість граней-трикутників побудованого графа.

З умов балансу кількості ребер та при підрахунку суми кутів навколо всіх вершин графа, отримуємо рівності

$$3\tilde{A} = 2Đ_2 + Đ_1 \quad (1)$$

$$\tilde{A} = 2\hat{A}_2 + \hat{A}_1 - 2 \quad (2)$$

$$\hat{A}_1 = Đ_1 \quad (3)$$

Позначимо через α_i степінь i-ої вершини графа. При додаванні степенів всіх вершин кожне ребро враховується два рази, тому

$$\sum_{i=1}^{\hat{A}_1+\hat{A}_2} \alpha_i = 2(\text{Đ}_1 + \text{Đ}_2), \tag{4}$$

для внутрішніх вершин

$$\sum_{i=1}^{\hat{A}_2} \alpha_i = 2\text{Đ}_2 - 2m, \tag{5}$$

а для зовнішніх вершин

$$\sum_{i=1+\hat{A}_2}^{\hat{A}_1+\hat{A}_2} \alpha_i = 2\text{Đ}_1 + 2m. \tag{6}$$

Враховуючи підрахунок кількості областей на площині, яка може утворюватися при перетині m прямих, отримаємо оцінку

$$\tilde{A} + \sum_{i=1}^{\hat{A}_2} \frac{(\alpha_i/2-1)(\alpha_i/2-2)}{2} + \sum_{i=1+\hat{A}_2}^{\hat{A}_2+\hat{A}_1} \frac{(\alpha_i-2)(\alpha_i-3)}{2} \le \frac{m(m+1)}{2} + 1. \tag{7}$$

Визначимо $\beta_i = \frac{\alpha_i}{2} - 1$ для внутрішніх вершин і $\beta_i = \alpha_i - 2$ для зовнішніх вершин. Тоді величина, на яку зменшується кількість областей при утворенні кратних вузлів, дорівнює $\gamma = \sum_{i=1}^{\hat{A}_2+\hat{A}_1} \frac{\beta_i(\beta_i - 1)}{2}$.

Далі, враховуючи (5), (1), (3), а також (6), отримуємо

$$\gamma = \sum_{i=1}^{\hat{A}_2+\hat{A}_1} \beta_i = \tilde{A} + m - 1. \tag{8}$$

Враховуючи опуклість функції $f(x) = \frac{x(x-1)}{2}$, і рівність (6), отримуємо, що мінімального значення γ при фіксованих значеннях $\tilde{A}$ і m досягається за таких β_i, при яких максимальне з них відрізняється від мінімального не більше, ніж на 1.

У випадку $\tilde{A} + m - 1 \le \hat{A}_2 + \hat{A}_1$ з урахуванням очевидної нерівності

$$\hat{A}_1 \le 2m + 3, \tag{9}$$

оскільки всі зовнішні вершини або можуть бути вершинами вихідного трикутника або утворюються при перетині прямих і трикутника, і рівності (2), отримуємо $\tilde{A} \le 7$. Цей випадок при $m \ge 4$ нецікавий, оскільки при $m = 4$ маємо $T(4) = 8$.

У випадку $\mathit{Г} + m - 1 \ge 3(B_2 + B_1)$ з рівності (2) отримуємо $m \ge \frac{\mathit{Г}}{2} + \frac{3B_1}{2} + 4$. Тоді з урахуванням того, що $T(m) \ge 2m$, прийдемо до протиріччя, тому цей випадок неможливий.

У випадку $2(\hat{A}_2+\hat{A}_1)<\tilde{A}+m-1<3(\hat{A}_2+\hat{A}_1)$ з (2) отримуємо

$$\hat{A}_1 \le m-3 . \tag{10}$$

Нехай δ^1 – кількість доданків $\beta_i=2$, а δ^2 – кількість доданків $\beta_i=3$. Тоді з системи

$$\begin{cases} \delta^1+\delta^2=1+\dfrac{\tilde{A}+\hat{A}_1}{2}, \\ 2\delta^1+3\delta^2=\tilde{A}+m-1 \end{cases}$$

і з урахуванням (10) отримуємо

$$\Gamma+\gamma \ge \Gamma+\delta^1+3\delta^2=2m-5+\frac{3\Gamma-3B_1}{2} \ge \frac{3\Gamma}{2}+\frac{m-1}{2}. \tag{11}$$

Підставляючи (11) в (7), а також враховуючи умову

$$\tilde{A} \ge 4m , \tag{12}$$

отримуємо нерівність $m^2-12m+3\ge 0$, з якої випливає $m\ge 12$.

У випадку $\hat{A}_2+\hat{A}_1 \le \tilde{A}+m-1<2(\hat{A}_2+\hat{A}_1)$ з (2) отримуємо

$$\hat{A}_1 > m-3 . \tag{13}$$

Нехай δ^1 – кількість доданків $\beta_i=1$, а δ^2 – кількість доданків $\beta_i=2$. Тоді з системи

$$\begin{cases} \delta^1+\delta^2=1+\dfrac{\tilde{A}+\hat{A}_1}{2}, \\ \delta^1+2\delta^2=\tilde{A}+m-1 \end{cases}$$

отримуємо $\delta^2=m-2+\dfrac{\tilde{A}-\hat{A}_1}{2}$, $\delta^1=-m+3+\hat{A}_1$. Нехай δ_1^1 – кількість доданків $\beta_i=1$, а δ_1^2 – кількість доданків $\beta_i=2$, що відповідають зовнішнім вершинам, а δ_2^1 – кількість доданків $\beta_i=1$, а δ_2^2 – кількість доданків $\beta_i=2$, що відповідають внутрішнім вершинам.

Отримаємо систему

$$\begin{cases} \delta_1^1+\delta_1^2=\hat{A}_1, \\ \delta_2^1+\delta_2^2=\hat{A}_2, \\ \delta_1^1+\delta_2^1=\hat{A}_1-m+3, \\ \delta_1^1+2\delta_1^2=2m, \end{cases}$$

де перші три рівняння випливають з позначень, а четверте – з (8). Розв’язуючи систему, знаходимо $\delta_2^1=m+3-\hat{A}_1$ і, як наслідок, $\hat{A}_1\le m+3$. А далі отримуємо

$$\tilde{A}+\gamma \ge \tilde{A}+\delta^2 = m-2+\frac{3\tilde{A}-\hat{A}_1}{2} \ge \frac{3\tilde{A}}{2}+\frac{m-7}{2} \ . \qquad (14)$$

Підставляючи (14) у (7), а також враховуючи умову (12), отримуємо $m^2-12m+9 \ge 0$, з якої випливає $m \ge 12$. І, в результаті, отримуємо оцінку $m \ge 12$.

На рис. 1 показано, як 12 прямих тріангулюють трикутник на 48 трикутників. Зовнішні вершини ділять кожну сторону трикутника у відношенні $\theta:(1/2-\theta):(1/2-\theta):\theta$, де θ – корінь рівняння $4\theta^3-8\theta^2+6\theta-1=0$.

Далі, з (14) при $m \ge 4$ випливає оцінка $\tilde{A} \le \frac{m^2}{3}+3$. З неї, в тому числі, випливає $\frac{T(m)}{m} \ge 3$ при $m \ge 8$. Але з попереднього випливає, що у випадку $m \ge 8$ для всіх вузлів, можливо, за виключенням одного $\beta_i = 2$, що неможливе. Також зауважимо, що потрібна тріангуляція $m \ge 9$ побудована в [1], а випадок $k=2$ тривіальний.

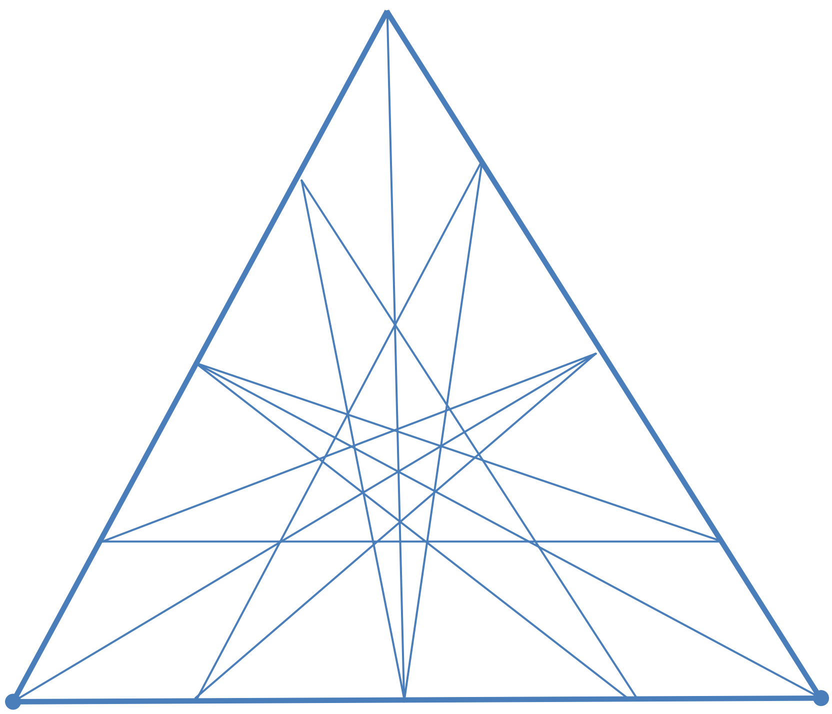

Рис. 1. Тріангуляція трикутника 12 прямими

Література

1. Сайт www.dxdy.ru, Математический марафон. Задача 200.

Стаття надійшла до редакційної колегії 27.05.2015 р.
Рекомендовано до друку к.ф.-м.н., доцентом ***Мазуренком Н.І.,***
к.т.н., доцентом ***Ріпецьким Р.Й.***

OPTIMIZATION OF TRIANGLE'S TRIANGULATION

A. I. Kazmerchuk
Vasil Stefanik Prycarpathian national university;
76000, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
e-mail: a_kazmerchuk@ukr.net

The problem of triangulation triangle with straight lines is examined. Estimates for the number of triangles are obtained. We found the minimum number of straight lines in the division that the ratio of the number of triangles to the number of straight lines is not less than the given number.

Key words: *triangle's triangulation, triangle's triangulation problem with straight lines.*