УДК 517.988.6:517.988.8

ОДИН КЛАС МЕТОДІВ ІТЕРАТИВНОГО АГРЕГУВАННЯ ДЛЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ

М. І. Копач[1], Б. А. Шувар[2], Н. О. Шувар[3]

[1]Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; 76025, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57; e-mail: kopachm2009@gmail.com

[2]Національний університет «Львівська політехніка»; 78000, м. Львів, вул. С. Бандери, 12;

[3]Київський національний університет імені Тараса Шевченка; 01601, м. Київ, вул. Володимирська, 64/13

Для систем лінійних алгебраїчних рівнянь встановлені достатні умови збіжності одного класу методів ітеративного агрегування, які не передбачають, щоб спектральний радіус відповідного оператора був меншим за одиницю, а також напівупорядкованості простору, в якому ці рівняння розглядаються.

Ключові слова: *декомпозиція, агрегуючі функціонали, ітеративне агрегування*

Вступ

Декомпозицію операторних рівняннь за допомогою методів ітеративного агрегування часто використовують для розв’язання практичних задач, що трапляються, наприклад, в математичній економіці, в теорії марковських процесів і т.п. Найчастіше в дослідженнях цих методів для лінійного рівняння

$$x = \widetilde{A}x + b \tag{1}$$

фігурують припущення про знакосталість оператора $\widetilde{A}$, вільного члена та агрегуючих функціоналів, а також про нерівність $\rho(\widetilde{A}) < 1$ для спектрального радіуса $\rho(\widetilde{A})$ оператора $\widetilde{A}$ (див., напр., [1, 2, 3, 4]). В цій замітці досліджуємо один клас методів ітеративного агрегування за допомогою методики із [5, 6, 7], яка не використовує нерівність $\rho(\widetilde{A}) < 1$ та поняття напівупорядкованості простору E, в якому розглядається рівняння (1).

Побудова алгоритму

Вважаємо, що рівняння (1) записане у вигляді

$$x = \sum_{j=1}^{N} A_j x + A_0 x + b, \tag{2}$$

де $A_j : E \to E \quad (j = \overline{1,N})$, $A_0 : E \to E$, $b \in E$, E – евклідів простір розмірності N_0. Припускаємо, що матриці A_j мають вигляд

$$A_j = \psi_j \varphi_j^T \quad (j = \overline{1,N}), \tag{3}$$

в яких ψ_j, φ_j є вектор-стовпцями, T-символ транспонування. Позначимо через $u^T v$ скалярний добуток $(u,v) \quad (u,v \in E)$, а також

$$A = \sum_{j=1}^{N} A_j, \quad \Lambda = \{\lambda_{ij}\}, \lambda_{ij} = (\varphi_i, \psi_j) \quad (i = \overline{1,N}). \tag{4}$$

Очевидно, що

$$A_j x = \psi_j (\varphi_j, x) \quad (j = \overline{1,N}). \tag{5}$$

Будемо розглядати систему рівнянь, складену з рівняння (2) і рівняння

$$y = \Lambda y - \Phi A_0 x - (\varphi, b), \tag{6}$$

де $\Phi = \{\varphi_1^T, ..., \varphi_N^T\}^T$. Рівняння (6) можна подати і в такій формі

$$y_i = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j - (\varphi_i, A_0 x) - (\varphi_i, b) \quad (i = \overline{1,N}). \tag{7}$$

Нехай,

$$\varepsilon = \{\{x, y\} \mid \Phi x + y = \theta', x \in E, y \in E'\}, \tag{8}$$

де E' – евклідів простір розмірності N, θ' – нульовий вектор в E'. Побудуємо ітераційний процес за допомогою формул

$$x_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} A_j x^{(n)} + A_0 x^{(n)} + b + \sum_{j=1}^{N} a_j (x^{(n)})(y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)}), \tag{9}$$

$$y_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N} \lambda_{ij} y_j^{(n+1)} - (\varphi_i, A_0 x^{(n)}) - (\varphi_i, b) \quad (i = \overline{1,N}). \tag{10}$$

Припустимо, що справджується умова

$$(\varphi_i, a_j(x)) = \lambda_{ij} \quad (x \in E, i, j = \overline{1,N}). \tag{11}$$

Запишемо (9),(10) відповідно у вигляді

$$x^{(n+1)} = Ax^{(n)} + A_0 x^{(n)} + b + a(x^{(n)})(y^{(n)} - y^{(n+1)}), \tag{12}$$

$$y^{(n+1)} = \Lambda y^{(n+1)} - \Phi A_0 x^{(n)} - \Phi b, \tag{13}$$

де $a(x) = \{a_1(x), ..., a_N(x)\}$. Рівність (11) можна подати так $\Phi a(x) = \Lambda$.

Допоміжні леми

Наведемо наступні твердження, які істотньо використовуватимемо для побудови умов збіжності алгоритму.

Лема 1. Нехай: 1) матриця $I' - \Lambda$ є невиродженою, де I' – одинична матриця в E'; 2) $\{x^*, y^*\}$ – розвязок системи (2), (7). Тоді $\{x^*, y^*\} \in \varepsilon$.

Доведення. З рівностей (2) і (7), використовуючи означення (8) та беручи до уваги формули (4), (5), отримуємо

$$(\varphi_i, x^*) + y_i^* = \sum_{j=1}^{N}(\varphi_i, A_j x) + (\varphi_i, A_o x^*) + (\varphi_i, b) +$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij} y_j^* - (\varphi_i, A_0 x^*) - (\varphi_i, b) = \sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}[(\varphi_j, x^*) + y_j^*],$$

Завдяки існуванню оберненої матриці $(I' - \Lambda)^{-1}$ звідси одержуємо, що $\{x^*, y^*\} \in \varepsilon$.

Лема 2. Нехай:1) $\{x^{(0)}, y^{(0)}\} \in \varepsilon$; 2) існує матриця $(I' - \Lambda)^{-1}$; 3) виконана умова (11). Тоді для послідовних наближень $\{x^{(n)}, y^{(n)}\}$, побудованих за допомогою формул (9),(10) при $n = 1,2,...$, будемо мати $\{x^{(n)}, y^{(n)}\} \in \varepsilon$.

Доведення. Із співвідношень (9),(10) при $n = 1,2,...$, маємо

$$(\varphi_i, x^{(n+1)}) + y_i^{(n+1)} = \sum_{j=1}^{N}(\varphi_i, A_j x^{(n)}) + (\varphi_i, A_o x^{(n)}) +$$
$$+\sum_{j=1}^{N}(\varphi_i, a_j(x^{(n)}))(y_j^{(n)} - y_j^{(n+1)}) + (\varphi_i, b) +$$
$$+\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij} y_j^{(n+1)} - (\varphi_i, A_0 x^{(n)}) - (\varphi_i, b) = \sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}[(\varphi_j, x^{(n)}) + y_j^{(n)}],$$

Тому на основі принципу індукції можна вважати лему доведеною.

Лема 3. Нехай $a_j(x)$ при $x \in E$ означено за формулою

$$a_j(x) = \frac{A_j x}{(\varphi_j, x)} \quad (j = \overline{1, N}). \tag{14}$$

Тоді справджуються рівності (11).

Доведення. З (5),(14) випливає

$$(\varphi_i, a_j(x)) = \frac{(\varphi_i, A_j x)}{(\varphi_j, x)} = \frac{(\varphi_i, \psi_j)(\varphi_j, x)}{(\varphi_j, x)} = \lambda_{ij},$$

що й потрібно було довести.

Збіжність ітерацій

З рівностей (2),(7),(12) та (13) отримуємо

$$y^{(n+1)} - y^* = -(I' - \Lambda)^{-1}\Phi A_0 (x^{(n)} - x^*), \tag{15}$$

$$x^{(n+1)} - x^* = \widetilde{A}(x^{(n)} - x^*) + a(x^{(n)})(y^{(n)} - y^*) - a(x^{(n)})(y^{(n+1)} - y^*), \tag{16}$$

Оскільки з лем 1 та 2 можна одержати, що

$$y^{(n)} - y^* = -\Phi(x^{(n)} - x^*),$$

то з (15),(16) випливає

$$x^{(n+1)} - x^* = B(x^{(n)})(x^{(n)} - x^*), \qquad (17)$$

де

$$B = \widetilde{A} - a(x)(I' - \Lambda)^{-1}\Phi(I - \widetilde{A}). \qquad (18)$$

Співвідношення (3), (4), (5) є підставою для рівності

$$\Phi A = \Lambda\Phi. \qquad (19)$$

Твердження 1. Нехай: 1) справджуються умови леми 2; 2) із співвідношень $\{x, y\} \in \varepsilon$ випливає, що існує куля $D = \{\{x, y\} \in \varepsilon, \left\| x - x^{(0)} \right\| < \varepsilon_1, | y - y^{(0)} | < \varepsilon_2\}$, в якій

$$\left\| B(x) \right\| \le q. \qquad (20)$$

Якщо

$$q < 1, \qquad (21)$$

то послідовності $\{x^{(n)}\}$ та $\{y^{(n)}\}$, побудовані за формулами (12),(13), збігаються відповідно до x^* та y^*, як компонент розв'язку системи (2), (7) не повільніше від геометричної прогресії зі знаменником q.

Доведення. Висновок твердження випливає із співвідношень (17)-(21) і принципу списку.

Зауважимо, що якщо в умові твердження 1 замість матриці $B(x)$, означеної за формулою (18), взяти матрицю

$$B = \widetilde{A} - \Psi(I' - \Lambda)^{-1}\Phi(I - \widetilde{A}), \qquad (22)$$

де $\Psi = \{\psi_1, ..., \psi_N\}^T$, і потребувати виконання умови леми 3, то висновок залишиться в силі. При цьому, зважаючи на те, що згідно формули (22) не фігурує залежність матриці B від x, то, замінивши умову (21) вимогою, щоб був меншим від одиниці спектральний радіус матриці B, можна стверджувати, що вище згадані послідовності $\{x^{(n)}\}, \{y^{(n)}\}$ збігаються до x^* та y^* відповідно.

Література

1. Красносельський М.А. Позитивные линейные системы / М.А. Красносельський, Е.А. Лифшиц, А.В. Соболев. – М.:Наука, 1985. – 256 с.
2. Marec I. Conference issues of the theory and practice of iterative aggregation/disaggregation methods / I. Marec, P. Mayer, I. Pultarova // Economic Transaction of Numerical Analysis. – 2009. – 35. – P. 185-200.
3. Parallel SimRank Computation on Large Graphs with Aggregation / G. He, H. Feng, C. Li, H. Chen // IDD'10, Juli 25-28. – Washington, DC, USA. – 2010. – P. 543-552.
4. Гробова Т.А. Методы итеративного агрегирования для приближенного решения алгебраических систем и интегральных уравнений /

Т.А. Гробова, В.Я. Стеценко. – Ставрополь: Изд-во Ставропольского гос. ун-та, 2003. – 87 с.
5. Шувар Б.А. О сходимости многопараметрических вариантов метода итеративного агрегирования / Б.А. Шувар // Вестник Львовского политехн. ин-та. Прикладная математика. – 1989. – №232. – С. 140-142.
6. Шувар Б.А. Декомпозиція лінійних операторних рівнянь за допомогою методів ітеративного агрегування / Б.А. Шувар, А.Ф. Обшта, М.І. Копач // Матем. вісник НТШ. – 2012. – Т.9. – С. 384-398.
7. Двосторонні наближені методи / Б.А. Шувар, М.І. Копач, С.М. Ментинський, Обшта А.Ф. – Івано-Франківськ: ВДВ ЦІТ. – 2007. – 515 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 19.02.2015 р.
Рекомендовано до друку д.т.н., професором ***Олійником А.П.,***
д.ф.-м.н., професором ***Каленюком П.І.*** *(м. Львів)*

ONE CLASS OF ITERATIVE AGGREGATION METHODS FOR SYSTEMS OF LINEAR ALGEBRAIC EQUATIONS

M. I. Kopach[1], B. A. Shuvar[2], N. O. Shuvar[3]
[1]Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76025, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
e-mail: kopachm2009@gmail.com
[2]Lviv Polytechnic National University;
78000, Lviv, Bandera str., 12;
[3]Taras Shevchenko National University of Kyiv;
01601, Kyiv, Volodymyrska str., 64/13

For systems of linear algebraic equations introduced sufficient conditions for convergence of a class of iterative aggregation methods that do not require the spectral radius of the operator was less than one and semiordering space in which these equations are considered.

Key words: *decomposition, aggregating functionals, iterative aggregation*