УДК 517.91

ПЕРІОДИЧНІСТЬ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ СИСТЕМ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ЗІ ЗБУРЕННЯМ

І. Я. Кузишин

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України; 79060, Львів, вул. Наукова, 3б; e-mail: jessamin6@mail.ru

Одержано умови існування нетривіальних періодичних розв'язків для лінійної системи з нелінійним збуренням. Проведено узагальнення задачі Релея на різні за порядком та кількістю параметрів диференціальні рівняння та знайдено нові класи систем диференціальних рівнянь, що мають періодичні розв'язки при збуреннях на гіперповерхні.

Ключові слова: *метод малого параметру, періодичний розв'язок, збурення лінійної автономної системи.*

1. Вступ

Дослідження питання існування періодичних розв'язків звичайних диференціальних рівнянь та їх систем є досить важливим для практики, особливо для електротехніки, хімічної кінетики, математичної біології, адже дозволяють створювати все точніші їхні математичні моделі. Зокрема для цього використовують автономні системи диференціальних рівнянь першого порядку та звичайні диференціальні рівняння звідні до них. Історично основи методу відшукання періодичних розв'язків при малих параметрах заклали астрономи, зокрема Ньюкомб та Ліндстедт, а у роботі Пуанкаре (1893) він був доведений до досконалості [1]

Розглянемо таку систему диференціальних рівнянь зі збуренням у векторному вигляді:

$$W' = BW + g(W), \tag{1}$$

де $W = (w_1, w_2, ..., w_N)$ – вектор невідомих функцій, $W \in R^N$, а матриця B і вектор збурення $g(W)$ мають спеціальний вигляд.

2. Умови існування нетривіальних періодичних розв'язків

Накладемо умови:

Умова І: *Нехай існує невироджена квадратна матриця C порядку N, що $B = CDC^{-1}$, $g(W) = C \cdot h(C^{-1}W)$, де матриця D має вигляд*

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ a_{N1} & a_{N2} & a_{N3} & ... & a_{NN} \end{pmatrix}, \qquad (2)$$

a_{N1}, $a_{N2},...,a_{NN}$ – *дійсні числа, вектор збурення має вигляд* $h(Z)=(0,0,...,0,h^N(Z))$ *і* $h^N(Z)\in C^{k+1}$, $Z=C^{-1}W$ – *вектор невідомих функцій,* $Z=(z_1,z_2,...,z_N)$, $Z=R^N$.

Умова II: *Нехай існує невироджена квадратна матриця* C *порядку* N, *що* $B=CDC^{-1}$, $g(W)=C\cdot h(C^{-1}W)$, *де матриця* D *має вигляд* (2), *вектор збурення має вигляд* $h(Z)=(0,0,...,0,h^N(Z))$ *і*

$$h^N(Z)=-\sum_{\alpha\in\Lambda^k}\sum_{i=1}^{N}\mu_{\alpha,i}z_i^{\alpha}.$$

Тут Λ^k – множина індексів α, $|\alpha|\le k$ (або Λ^k – множина непарних індексів α), $\mu_{\alpha,i}\in R$.

Якщо $\det C\ne 0$, $c_{i,j}=const$, $i,j=1,2,...,N$ і $CDC^{-1}=B$, то можемо перейти до нової лінійної автономної системи диференціальних рівнянь зі збуренням: $Z'=DZ+h(Z)$, де $Z=C^{-1}W$.

3. Основні результати

Розглянемо систему вигляду (1), що задовольняє умову II. Якщо при $N=2$ матриця A та вектор збурення $h(Z)$ мають вигляд

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -n^2 & 0 \end{pmatrix},\ h(Z)=(0,-(\kappa z_2+\lambda z_2^3)),$$

а матриця C – одинична, $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, то отримаємо класичну задачу Релея, результати розв’язання якої наведені у роботах [1], [2]. Нетривіальний розв’язок цієї задачі існує та є періодичним при виконанні співвідношення між малими параметрами $k+\frac{3}{4}\lambda n^2A^2=0$.

Розглянемо цю задачу при іншому векторі збурення $h(Z)$. Нехай $h(Z)=(0,-(\kappa z_2+\lambda z_2^3+\mu z_2^5))$. Тут $h(Z)=(0,-\sum_{\alpha\in\Lambda_-^k}\mu_{\alpha,2}z_2^{\alpha}))$ при $\mu_{1,2}=\kappa$, $\mu_{3,2}=\lambda$, $\mu_{5,2}=\mu$. Систему

$$z_1' = z_2,$$
$$z_2' = -n^2 z_1 - (\kappa z_2 + \lambda z_2^3 + \mu z_2^5).$$

можна звести до диференціального рівняння:

$$y'' + \kappa y' + \lambda (y')^3 + \mu (y')^5 + n^2 y = 0. \qquad (3)$$

Теорема 1. *При* $N = 2$ *за умови II для задачі* (3) *при заданих початкових умовах*

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, \\ y'(0) &= nA \end{aligned} \qquad (4)$$

за умови, що виконується співвідношення між малими параметрами

$$k + \lambda \frac{3n^2 A^2}{4} + \mu \frac{5n^4 A^4}{8} = 0 \qquad (5)$$

існує періодичний розв'язок.

Доведення. Застосуємо до рівняння метод малого параметру, ідея якого полягає у тому, щоб шукати розв'язок у вигляді ряду по степенях k, λ і μ:

$$y = y_{0,0,0} + \kappa y_{1,0,0} + \lambda y_{0,1,0} + \mu y_{0,0,1} + \kappa^2 y_{2,0,0} + \kappa\lambda y_{1,1,0} + \lambda^2 y_{0,2,0} + \lambda\mu y_{0,1,1} + \ldots$$

Підставивши його у рівняння (3) та прирівнюючи коефіцієнти біля відповідних степенів k, λ і μ до нуля, з початкових умов (4) отримаємо:

$k^0\lambda^0\mu^0$: $y_{0,0,0} = A\sin nx$, $\quad k^1\lambda^0\mu^0$: $y_{1,0,0} = -\frac{A}{2} x \sin nx$,

$k^0\lambda^1\mu^0$: $y_{0,1,0} = -\frac{nA^3}{32}\cos nx + \frac{nA^3}{32}\cos 3nx - \frac{3n^2A^3}{8} x \sin nx$,

$k^0\lambda^0\mu^1$:

$$y_{0,0,1} = -\frac{n^3A^5}{4}\cos nx - \frac{5n^4A^5}{16} x\sin nx + \frac{5n^3A^5}{128}\cos 3nx + \frac{n^3A^5}{384}\cos 5nx.$$

Щоб визначити періодичний розв'язок, прирівняємо коефіцієнти біля «вікових» членів до нуля:

$$k + \lambda \frac{3n^2 A^2}{4} + \mu \frac{5n^4 A^4}{8} = 0.$$

Тоді періодичний розв'язок задачі існує, має вигляд

$$y = A\sin nx + \lambda\left(-\frac{nA^3}{32}\cos nx + \frac{nA^3}{32}\cos 3nx\right) +$$
$$+ \mu\left(-\frac{n^3A^5}{4}\cos nx + \frac{5n^3A^5}{128}\cos 3nx + \frac{n^3A^5}{384}\cos 5nx\right),$$

де A визначається з формули (5). *Теорему доведено.*

Розглянемо систему (1) розмірності 4, яка задовольняє умову II. Нехай при $N = 4$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -n^2 m^2 & 0 & -(n^2 + m^2) & 0 \end{pmatrix}, \quad h(Z) = (0, -(\kappa z_2 + \lambda z_2^3 + \mu z_2^5)) .$$

Таку систему можна звести до диференціального рівняння

$$y^{(IV)} + (n^2 + m^2) y'' + n^2 m^2 y + \kappa y' + \lambda (y')^3 + \mu (y')^5 = 0 . \qquad (6)$$

Теорема 2. *При* $N = 4$ *за умови II для задачі* (6) *при заданих початкових умовах*

$$y(0) = A,$$
$$y'(0) = 0,$$
$$y''(0) = -n^2 A,$$
$$y'''(0) = 0$$

за умови, що виконується співвідношення між малими параметрами

$$k + \lambda \frac{3n^2 A^2}{4} + \mu \frac{5n^4 A^4}{8} = 0$$

існує періодичний розв'язок.

Розглянемо систему, з якої можна отримати наступне диференціальне рівняння, з вектором збурення, що задовольняє умову I:

$$y^{(IV)} + (n^2 + m^2) y'' + n^2 m^2 y + \kappa \sin y' + \lambda \sin (y')^3 = 0 . \qquad (7)$$

Теорема 3: *При* $N = 4$ *за умови I для задачі* (7) *при заданих початкових умовах*

$$y(0) = 0,$$
$$y'(0) = n,$$
$$y''(0) = 0,$$
$$y'''(0) = -n^3$$

за умови $G(\kappa, \lambda, \mu) = 0$ *існує періодичний розв'язок зі знайденими наближеннями до сьомого порядку включно.*

Зокрема зв'язки G будуть мати вигляд відповідно

- для наближення до третього порядку включно: $G_3 = \kappa \cdot \dfrac{n^2 - 8}{2} + \lambda \cdot 3n^2$;

- для наближення до п'ятого порядку включно:

$$G_5 = \kappa \cdot \frac{n^4 - 24n^2 + 192}{48} + \lambda \cdot 3n^2 ;$$

- для наближення до сьомого порядку включно:

$$G_7 = \kappa \cdot \frac{n^6 - 48n^4 + 1152n^2 + 9216}{2304} + \lambda \cdot 3n^2 .$$

Отже, можна зробити висновок: оскільки отримані умови $G_3 = 0$, $G_5 = 0$, $G_7 = 0$ попарно не рівносильні, то періодичним залишається розв'язок зі знайденим наближенням лише до третього порядку включно.

Література

1. Хайрер Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: Пер. с англ. / Э. Хайрер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер. – М.: Мир, 1990. – 512 с.
2. Lord Rayleigh. On maintained vibrations / Lord Rayleigh // Philosophical Magazine and Journal of Science. – 1883. – V.15, Ser. 5. – P. 229-235.
3. Кузишин І.Я. Періодичні розв'язки лінійних систем звичайних диференціальних рівнянь з нелінійним збуренням. / І.Я. Кузишин, А.І. Казмерчук // Materiały X Międzynarodowej naukowi-praktycznej konferencji "Perspektywiczne opracowania są nauką i technikami - 2014". – 2014. – Vol.18. – С. 55-57.

Стаття надійшла до редакційної колегії 21.04.2015 р.
Рекомендовано до друку к.ф.-м.н., доцентом ***Гургулою С.І.,***
к.ф.-м.н., доцентом ***Гоєм Т.П.***

PERIODICITY OF SOLUTIONS TO LINEAR SYSTEMS OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH PERTUBATION

I. Ya. Kuzyshyn
Pidstrygach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of the NAS of Ukraine; 79060, Lviv, Naukova str., 3b;
e-mail: jessamin6@mail.ru

The conditions of existence of nontrivial periodic solutions for linear systems with nonlinear perturbation are obtained. A generalization of the Rayleigh problem for differential equations with different orders and number of parameters is given and new classes of differential equations with perturbations on hypersurface which have periodic solutions are found.

Key words: *the method of a small parameter, periodic solution, perturbation of linear autonomous system.*