УДК 517.95+511.42

ЗАДАЧА З ІНТЕГРАЛЬНИМИ УМОВАМИ ДЛЯ НАВАНТАЖЕНОГО ГІПЕРБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ

М. М. Симотюк, Д. В. Хомяк
Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України; 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б; e-mail: quaternion@ukr.net, khomiak.dmytro@gmail.com

У даній роботі встановлено умови однозначної розв'язності задачі з інтегральними умовами (з показниковими ваговими функціями під знаком інтеграла) для строго гіперболічного рівняння, навантаженого значеннями невідомої функції та її похідних на скінченній кількості гіперплощин. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі.

Ключові слова: *задачі з інтегральними умовами, навантажені гіперболічні рівняння, малі знаменники, діофантові наближення.*

Вступ

Задачі з нелокальними інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними виникають при дослідженні багатьох фізичних та біологічних процесів, зокрема, коли межа області протікання процесу є недоступною для проведення вимірювань або коли неможливо безпосередньо обчислити певні фізичні величини, однак відомі їхні усереднені значення.

У роботах [9, 14] встановлено класи єдиності та класи коректності задач з інтегральними умовами для рівнянь із частинними похідними в необмежених областях, при цьому для побудови розв'язків задач використано метод перетворення Фур'є та диференціально-символьний метод [13]. Що стосується інтегральних задач (з інтегральними умовами у вигляді моментів) для рівнянь із частинними похідними в обмежених областях, то їх розв'язність у багатьох випадках є нестійкою щодо малих змін параметрів області та пов'язана з проблемою малих знаменників [1, 2, 4]. Для вирішення цієї проблеми у цитованих роботах було застосовано метричний.

У даній роботі досліджено умови розв'язності у шкалі просторів Соболєва інтегральної задачі (з показниковими ваговими функціями під знаком інтеграла) для навантаженого строго гіперболічного рівняння, у якому оператор навантаження має вигляд лінійної комбінації значень невідомої функції та її похідних за просторовими координатами на скінченній кількості гіперплощин. Інтерес до вивчення нелокальних крайових задач для навантажених диференціальних рівнянь пов'язаний з тим, що до цих задач приводить моделювання задач довготривалого прогнозування і регулювання рівнів ґрунтових вод і вологи підґрунтя. Зауважимо, що нелокальні задачі для навантажених рівнянь виникають при лінеаризації та чисельному розв'язуванні нелокальних задач для нелінійних рівнянь, при еквівалентному перетворенні нелокальних крайових задач та багатьох інших випадках [8].

1. Постановка задачі

Нехай Ω^p – p-вимірний тор $(\mathbf{R}/2\pi\mathbf{Z})^p$, $Q_T^p=(0,T)\times\Omega^p$, $T>0$, , $x=(x_1,\dots,x_p)\in\Omega^p$, $D_x=(\partial/\partial x_1,\dots,\partial/\partial x_p)$, $D_x^s=\partial^{|s|}/\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}$, $s=(s_1,\dots,s_p)\in\mathbf{Z}_+^p$, $|s|=s_1+\dots+s_p$, $k=(k_1,\dots,k_p)\in\mathbf{Z}^p$, $(k,x)=k_1x_1+\dots+k_px_p$, $\Pi_n(\rho)=\{\vec{z}=(z_1,\dots,z_n)\in\mathbf{C}^n:\max\limits_{1\le j\le n}|z_j|\le\rho>0\}$, $\mathrm{mes}_{\mathbf{R}^n}M$ ($\mathrm{mes}_{\mathbf{C}^n}M$) – міра Лебега в $\mathbf{R}^n$ ($\mathbf{C}^n$) вимірної множини $M\subset\mathbf{R}^n$ ($M\subset\mathbf{C}^n$), $\delta_{j,q}$ – символ Кронекера;

$H_\alpha,\alpha\in\mathbf{R}$, – простір усіх тригонометричних рядів $\varphi=\sum\varphi_k e^{(ik,x)}$ для яких є скінченною норма $\|\varphi(x);H_\alpha\|=\sqrt{\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}^p}|\varphi_k|^2(1+|k|)^{2\alpha}}$;

$C^n([0,T];H_\alpha)$ – банахів простір таких функцій $u(t,x)\equiv\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}^p}u_k(t)\exp(\mathrm{i}k,x)$, $u_k(t)\in C^m[0,T]$, $k\in\mathbf{Z}^p$, для яких є скінченною норма $\|u(t,x);C^n([0,T];H_\alpha)\|=\sum\limits_{j=0}^{n}\max\limits_{t\in[0,T]}\left\|\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}^p}u_k^{(j)}(t)e^{(ik,x)};H_\alpha\right\|$.

Розглядаємо таку задачу для навантаженого гіперболічного рівняння:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial t},D_x\right)u(t,x)\equiv\frac{\partial^n u}{\partial t^n}+\sum_{s_0=0}^{n-1}\sum_{|s|=n-s_0}a_{(s_0,s)}\frac{\partial^n u(t,x)}{\partial t^{s_0}\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}}=$$
$$=F(t,x)+N[u(t,x)],\quad (t,x)\in Q_T^p, \tag{1}$$

$$\int_0^T e^{\mu_j t}u(t,x)dt=\varphi_j(x),\quad j=1,\dots,n,\quad x\in\Omega^p, \tag{2}$$

де, $a_{(s_0,s)}\in\mathbf{R}$, L – строго гіперболічний вираз, $0\le\tau_1<\dots<\tau_m\le T$, $\mu_j\in\mathbf{C}$, $j=1,\dots,n$, $\mu_j\ne\mu_q$, $j\ne q$, $N[u(t,x)]\equiv\sum\limits_{j=1}^{m}B_j(D_x)u(\tau_j,x)$, $B_j(D_x)=\sum\limits_{|s|\le M}b_{j,s}\partial^{|s|}/\partial x_1^{s_1}\dots\partial x_p^{s_p}$, $b_{j,s}\in\mathbf{C}$, $j=1,\dots,m$, $M<n$.

2. Побудова розв'язку та умови єдиності

Розв'язок задачі (1), (2) з простору $C^n([0,T];H_\alpha)$ шукаємо у вигляді ряду

$$u(t,x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}^p}u_k(t)e^{(ik,x)}. \tag{3}$$

Кожен коефіцієнт $u_k(t)$, $k\in\mathbf{Z}^p$, ряду (3) визначаємо рівністю

$$u_k(t)=v_k(t)+w_k(t), \tag{4}$$

де функція $v_k(t)$, $k\in\mathbf{Z}^p$, є розв'язком задачі

$$L_n(d/dt,ik)v_k(t)=0, \tag{5}$$

$$\int_0^T e^{\mu_j t}v_k(t)dt=\varphi_{j,k},\quad j=1,\dots,n,\quad k\in\mathbf{Z}^p, \tag{6}$$

де $\varphi_{j,k}$, $k\in\mathbf{Z}^p$ – коефіцієнти Фур'є функцій $\varphi_j(x)$, $j=1,\dots,n$, а функція $w_k(t)$, $k\in\mathbf{Z}^p$, є розв'язком задачі

$$L_n(d/dt,ik)w_k(t)=F_k(t)+N[v_k(t)+w_k(t)], \tag{7}$$

$$\int_0^T e^{\mu_j t}w_k(t)dt=0,\quad j=1,\dots,n,\quad k\in\mathbf{Z}^p, \tag{8}$$

де $F_k(t)$, $k\in\mathbf{Z}^p$ – коефіцієнти Фур'є функції $F(t,x)$, а $N_k[f(t)]\equiv\sum_{j=1}^m B_j(ik)f(\tau_j)$, $k\in\mathbf{Z}^p$.

Рівняння (5) має таку фундаментальну систему розв'язків:

$$y_{kq}(t)=\begin{cases}t^{q-1}, & k=\vec{0}\\ e^{i\lambda_q(k)t}, & k\neq\vec{0}\end{cases},\quad q=1,\dots,n, \tag{9}$$

де $\lambda_q(k)$, $q=1,\dots,n$, $k\in\mathbf{Z}^p\setminus\{\vec{0}\}$ – дійсні корені рівняння $L(\lambda,k)=0$. Тоді загальний розв'язок рівняння (5) зображується рівністю

$$v_k(t)=\sum_{q=1}^n C_q(k)y_{kq}(t),\ q=1,\dots,n,\ k\in\mathbf{Z}^p. \tag{10}$$

Підставляючи (10) в нелокальні умови (6), отримаємо таку систему для знаходження сталих $C_q(k), q=1,\dots,n$:

$$\sum_{q=1}^n C_q(k)\int_0^T e^{\mu_j t}y_{kq}(t)dt=\varphi_{j,k},\ \ j=1,\dots,n. \tag{11}$$

Через $\Delta(k)$ позначимо визначник системи (11)

$$\Delta(k)=\det\left\|\int_0^T e^{\mu_j t}y_{kq}(t)dt\right\|_{j,q=1}^n,\ k\in\mathbf{Z}^p. \tag{12}$$

Лема 1. *Для кожного $k\in\mathbf{Z}^p$ задача (5), (6) має єдиний розв'язок у просторі $C^n[0,T]$ тоді і тільки тоді, коли*

$$\Delta(k)\neq 0. \tag{13}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 1 у [4, с. 23].

Якщо виконується умова (13), то розв'язок системи (11) зображується рівністю

$$C_q(k)=\sum_{r=1}^{n}\frac{\Delta_{qr}(k)}{\Delta(k)}\varphi_{rk},\ \ q=1,\ldots,n, \tag{14}$$

де $\Delta_{qr}(k)$ $q,r=1,\ldots,n$, – алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині q-го стовпця і r-го рядка у визначнику $\Delta(k)$. Тоді розв'язок задачі (5), (6) має вигляд

$$v_k(t)=\sum_{q=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}\frac{\Delta_{qr}(k)}{\Delta(k)}\varphi_{rk}y_{kq}(t),\ \ k\in\mathbf{Z}^p. \tag{15}$$

Для знаходження розв'язку задачі (7), (8) використаємо метод функції Ґріна. Якщо виконуються умови (13), то існує функція Ґріна задачі (5), (8), яка зображується формулою:

$$G_k(t,\tau)=g_k(t,\tau)+$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\frac{(-1)^j y_{kj}(t)}{\Delta(k)}\sum_{q=1}^{n}(-1)^{1+q}U_q(g_k)\det\|U_\xi(y_{k\eta})\|^{n}_{\substack{\xi,\eta=1;\\ \xi\neq j,\eta\neq q}},\ \ k\in\mathbf{Z}^p, \tag{16}$$

де $g_k(t,\tau)$ визначається рівностями

$$g_k(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2}\displaystyle\sum_{p=1}^{n}\frac{e^{i\lambda_p(k)(t-\tau)}}{\prod\limits_{j=1,j\neq p}^{n}(i\lambda_j(k)-i\lambda_p(k))},\ k\neq\vec{0},\\[2ex] \dfrac{\operatorname{sgn}(t-\tau)}{2}\dfrac{(t-\tau)^{n-1}}{(n-1)!},\ k=\vec{0}.\end{cases}$$

Тоді розв'язок задачі (7), (8), який належить до простору $C^n[0,T]$, зображується формулою

$$w_k(t)=I_k[F_k](t)+N_k[v_k(t)+w_k(t)]I_k[1](t),\ \ k\in\mathbf{Z}^p, \tag{17}$$

де $I_k[f](t)=\int_0^T G_k(t,\tau)f(\tau)d\tau$, $k\in\mathbf{Z}^p$.

Щоб знайти величину $N_k[w_k(t)]$, $j=1,\ldots,m$, у рівності (17) застосуємо до обидвох частин рівності (17) оператор $N[\cdot]$. Дістанемо

$$N_k[w_k(t)]=N_k\left[I_k[F_k](t)\right]+N_k\left[v_k(t)+w_k(t)\right]N_k\left[I_k[1](t)\right],\ k\in\mathbf{Z}^p. \tag{18}$$

Для всіх $k\in\mathbf{Z}^p$ позначимо

$$\Gamma(k)=1-N_k\left[I_k[1](t)\right]. \tag{19}$$

Лема 2. *Нехай виконуються умови (13) і для кожного* $k\in\mathbf{Z}^p$ *виконується умова*

$$\Gamma(k)\neq 0. \tag{20}$$

Тоді задача (7), (8) має у просторі $C^n[0,T]$ *єдиний розв'язок для довільної функції* $F_k \in C[0,T]$.

Доведення. Припустимо, що задача (7), (8) має два різні розв'язки $w_{1k}, w_{2k} \in C^n[0,T]$. Тоді функція $g_k(t) = w_{1k}(t) - w_{2k}(t)$ є нетривіальним розв'язком навантаженого однорідного рівняння

$$L(d/dt, ik)g_k(t) = N_k[g_k(t)] \tag{21}$$

і справджує однорідні умови (8). Оскільки за умовою теореми $\Delta(k) \neq 0$, то існує функція Ґріна задачі (7), (8), і для функції $g_k(t)$ справедливе таке зображення

$$g_k(t) = \int_0^T G_k(t,\tau) N_k[g_k(t)] d\tau. \tag{22}$$

Щоб знайти $N_k[g_k(t)]$ у рівності (22), подіємо на обидві її частини оператором $N[\cdot]$. У результаті для знаходження $N_k[g_k(t)]$ отримаємо, що

$$N_k[g_k(t)](1 - N_k\left[I_k[1](t)\right]) = 0. \tag{23}$$

Оскільки за умовою леми 2 $\Gamma(k) = 1 - N_k\left[I_k[1](t)\right] \neq 0$ для всіх $k \in \mathbf{Z}^p$, то $N_k[g_k(t)] = 0$ для всіх $k \in \mathbf{Z}^p$, а отже, з формули (22) випливає, що $g_k(t) \equiv 0$, що суперечить припущенню. Тому при виконанні умов леми 2 розв'язок задачі (7), (8) – єдиний. Лему доведено.

Якщо виконуються умови (13), (20), то

$$N_k[w_k(t)] = \frac{N_k\left[I_k[F_k](t)\right] + N_k\left[v_k(t)\right] N_k\left[I_k[1](t)\right]}{1 - N_k\left[I_k[1](t)\right]},\ k \in \mathbf{Z}^p, \tag{24}$$

а розв'язок задачі (7), (8) зображується формулою

$$w_k(t) = I_k[F_k](t) + \frac{N_k\left[v_k(t)\right] + N_k\left[I_k[F_k](t)\right]}{1 - N_k\left[I_k[1](t)\right]} I_k[1](t),\ k \in \mathbf{Z}^p. \tag{25}$$

Теорема 1. *Нехай для всіх* $k \in \mathbf{Z}^p$ *виконуються умови (13), (20). Тоді задача (1), (2) не може мати у просторі* $C^n([0,T];H_\alpha)$ *більше двох розв'язків.*

Доведення. Розв'язок задачі (1), (2) шукаємо у вигляді ряду (3), кожен коефіцієнт якого визначаємо рівністю (4), де $v_k(t)$ є розв'язком задачі (5), (6) а $w_k(t)$ – розв'язком задачі (7), (8). За умовою теореми, $\Delta(k) \neq 0$ та $\Gamma(k) \neq 0$ для всіх $k \in \mathbf{Z}^p$. Тоді за Лемами 1, 2 для всіх $k \in \mathbf{Z}^p$ задачі (5), (6) та (7), (8) мають єдиний розв'язок у просторі $C^n[0,T]$. З єдиності розв'язку задач (5), (6) та (7), (8) для всіх $k \in \mathbf{Z}^p$ випливає, що задача (1), (2) не може мати у просторі $C^n([0,T];H_\alpha)$ більше двох розв'язків.

Якщо для всіх $k \in \mathbf{Z}^p$ виконуються умови (13), (20), то формальний розв'язок задачі (1), (2) зображується формулою

$$u(t,x) = \sum_{k \in \mathbf{Z}^p} \left(\sum_{q=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\Delta_{qr}(k)}{\Delta(k)} \varphi_{rk} y_{kq}(t) + I_k[F_k](t) + \right.$$
$$\left. + \frac{N_k\left[v_k(t)\right] + N_k\left[I_k[F_k](t)\right]}{\Gamma(k)} I_k[1](t) \right) e^{(ik,x)}. \tag{26}$$

Збіжність ряду (26) пов'язана проблемою малих знаменників, оскільки величини $\Delta(k)$, $\Gamma(k)$ можуть набувати як завгодно малих за модулем значень для нескінченної кількості векторів $k \in \mathbf{Z}^p$. Це може спричинити розбіжність ряду (26) у шкалі просторів $C^n([0,T];H_\alpha)$, $\alpha \in \mathbf{R}$.

3. Існування розв'язку задачі.

Щоб дослідити умови існування розв'язку задачі (1), (2), доведемо спочатку таку допоміжну лему.

Лема 3. *Для кожного* $k \in \mathbf{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}$ *виконуються оцінки*

$$|\lambda_j(k)| \geq C_3 |k|, \; j = 1,\dots,n. \tag{27}$$

Доведення. Зі структури виразу $L(\partial/\partial t, D_x)$ отримуємо, що

$$L(\lambda, ik) = (i|k|)^n L\left(\frac{\lambda}{i|k|}, \frac{k}{|k|}\right), \; k \neq \vec{0}.$$

Тому корені $\lambda_j(k)$, $j = 1,\dots,n$, $k \neq \vec{0}$, рівняння $L(\lambda, ik) = 0$ можна зобразити у вигляді

$$\lambda_j(k) = i|k|\sigma_j(k), \; j = 1,\dots,n, \tag{28}$$

де $\sigma_j(k)$, $j = 1,\dots,n$, $k \neq \vec{0}$, – дійсні корені рівняння

$$L\left(\sigma, \frac{k}{|k|}\right) = 0. \tag{29}$$

З однорідності полінома $A_0\left(\frac{k}{|k|}\right) = \sum_{|s|=n} a_{(0,s)} \frac{k_1^{s_1}}{|k|^{s_1}} \cdot \ldots \cdot \frac{k_1^{s_p}}{|k|^{s_p}}$, який є вільним членом рівняння (29) та строгої гіперболічності виразу $L(\partial/\partial t, D_x)$ випливає, що на компакті $S = \{\xi \in \mathbf{R}^p : |\xi| = 1\}$ модуль $\left|A_0(\xi)\right|$ відокремлений від нуля деякою додатною сталою C_1, тобто

$$\forall \xi \in S \;\; \left|A_0(\xi)\right| > C_1 > 0. \tag{30}$$

За теоремою Вієта

$$A_0\left(\frac{k}{|k|}\right) = (-1)^n \sigma_1(k) \cdot \ldots \cdot \sigma_n(k), \quad k \neq \vec{0},$$

З оцінок (30) дістанемо, що

$$\left|\sigma_1(k)\cdot\ldots\cdot\sigma_n(k)\right| \geq C_1,\ k \neq \vec{0}. \qquad (31)$$

Коефіцієнти рівняння (38) є рівномірно обмеженими за $k \in \mathbf{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}$, тому й корені цього рівняння є рівномірно обмеженими за k, тобто існує стала $C_2 > 0$ така, що для всіх $k \neq \vec{0}$ виконуються нерівності

$$\left|\sigma_j(k)\right| \leq C_2,\ j = 1,\ldots,n. \qquad (32)$$

Із оцінок (31), (32) отримуємо, що

$$C_3 \leq \left|\sigma_j(k)\right| \leq C_2,\ j = 1,\ldots,n,\ k \neq \vec{0}. \qquad (33)$$

Тоді із формул (28), (33) отримаємо, що $|\lambda_j(k)| \geq C_3 |k|$, $j = 1,\ldots,n$. Лему доведено.

Теорема 2. *Нехай для всіх векторів* $k \in \mathbf{Z}^p$ *виконуються нерівності* $\Delta(k) \neq 0$, $\Gamma(k) \neq 0$. *Нехай існують сталі* $\omega_1, \omega_2 \in \mathbf{R}$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k \in \mathrm{Z}^p$ *виконуються нерівності*

$$|\Delta(k)| \geq (1+|k|)^{-\omega_1}, \qquad (34)$$

$$|\Gamma(k)| \geq (1+|k|)^{-\omega_2}. \qquad (35)$$

Якщо $F \in C([0,T], H_{\alpha+M-n(n-2)+2\omega_1+\omega_2})$, $\varphi_q \in H_{\alpha+M-n(n-3/2)+2\omega_1+\omega_2}$, $q = 1,\ldots,n$, *то у просторі* $C^n([0,T]; H_\alpha)$ *існує єдиний розв'язок задачі (1), (2), який неперервно залежить від функцій* $F(t,x)$ *та* $\varphi_j(x)$, $j = 1,\ldots,n$.

Доведення. Встановимо оцінки зверху для функцій $v_k(t)$, $w_k(t)$ та їхніх похідних до порядку n включно. З леми 3 випливає, що для кожного елемента визначника (12) при $k \neq \vec{0}$ виконуються оцінки

$$\left|\int_0^T e^{(\mu_j + i\lambda_q(k))t} dt\right| = \left|\frac{e^{(\mu_j + i\lambda_q(k))T} - 1}{\mu_j + i\lambda_q(k)}\right| \leq C_4 |k|^{-1},\ j,q = 1,\ldots,n. \qquad (36)$$

Тоді з формул (12) та (36) дістанемо оцінки для алгебричних доповнень $\Delta_{qr}(k)$, $q,r = 1,\ldots,n$

$$\left|\Delta_{qr}(k)\right| \leq C_4 |k|^{-n+1},\ q,r = 1,\ldots,n,\ k \neq \vec{0}. \qquad (37)$$

З формул (15), (37) та (34) отримаємо, що в кожній точці $t \in [0,T]$ виконуються нерівності:

$$\left|\frac{d^j v_k(t)}{dt^j}\right| \leq C_1 \sum_{r=1}^{n} (1+|k|)^{j-n+1+\omega_1} |\varphi_{rk}|,\ j = 0,1,\ldots,n. \qquad (38)$$

Знайдемо оцінку для $d^j w_k(t)/dt^j$, $j = 1,\ldots,n$. З формул (16), (34) та (37) отримуємо оцінку зверху для $\partial^j / \partial t^j \int\limits_0^T G_k(t,\tau) F_k(\tau) d\tau$, $j = 0,1,\ldots,n-1$

$$\left|\frac{\partial^j}{\partial t^j}\int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau)d\tau\right| \le C_4(1+|k|)^{j-(n-1)(n+4)/2+\omega_1} I_k + \delta_{j,n}F_k(t). \qquad (39)$$

де $I_k = \sqrt{\int_0^T |F_k(\tau)|^2\, d\tau}$.

Знайдемо оцінки зверху для модулів виразів, які входять у формулу (25):

$$\left|N_k[v_k(t)]\frac{d^j}{dt^j}I_k[1](t)\right| \le$$

$$\le C_5\sum_{r=1}^n (1+|k|)^{M+j-(n-1)(n+6)/2+2\omega_1} |\varphi_{rk}|,\ j=0,1,\ldots,n,$$

$$\left|N_k\left[I_k[F_k](t)\right]\frac{d^j}{dt^j}I_k[1](t)\right| \le C_6(1+|k|)^{M+j-(n-1)(n+4)+2\omega_1} I_k,\ j=0,1,\ldots,n.$$

Із цих нерівностей випливає, що

$$\left|\frac{d^j}{dt^j}w_k(t)\right| \le C_7\left(\sum_{r=1}^n (1+|k|)^{M+j-(n-1)(n+6)/2+2\omega_1+\omega_2} |\varphi_{rk}| + \right.$$

$$\left. + (1+|k|)^{M+j-(n-1)(n+4)+2\omega_1+\omega_2} I_k\right),\ j=0,1,\ldots,n. \qquad (40)$$

З формул (34), (35), (38) та (40) отримаємо оцінку

$$\max_{t\in[0,T]}\left|\frac{d^j}{dt^j}u_k(t)\right|^2 \le C_8\left((1+|k|)^{2(2\omega_1+\omega_2+M-n(n+2)+4)} I_k^2 + \right.$$

$$\left. + \sum_{r=1}^n (1+|k|)^{2(2\omega_1+\omega_2+M-n(n+3)/2+3)} |\varphi_{qk}|^2\right),\ j=0,1,\ldots,n. \qquad (41)$$

Із формул (41) випливає, що

$$\left\|u(t,x);C^n([0,T],H_\alpha)\right\| \le C_{14}\left(\left\|F(t,x);C([0,T];H_{\alpha+2\omega_1+\omega_2+M-n(n+2)+4})\right\| + \right.$$

$$\left. + \sum_{q=1}^m \left\|\varphi_q(x);H_{\alpha+2\omega_1+\omega_2+M-n(n+3)/2+3}\right\|\right).$$

Теорему доведено.

4. Метричні оцінки малих знаменників.

Теорема 4. *Для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbf{R}$*) чисел* $T>0$ *нерівність (34) виконується для всіх (крім скінченної кількості) векторів* $k\in\mathbf{Z}^p$*, якщо* $\omega_1 > (p+1)\xi_1 - p$*,* $\xi_1 = (n+1)!2^n$.

Доведення теореми проведено у [6].

Нехай $\sigma_1,\ldots,\sigma_p \in \mathbf{Z}_+^p$ – такі мультиіндекси, що $\sigma_1 = (M,0,\ldots,0),\ldots,\sigma_p = (0,0,\ldots,M)$. Многочлени $B_j(ik)$, $j=1,\ldots,m$, можна зобразити у вигляді

$$B_j(ik) = b_j^{\sigma_1}(ik_1)^M + \ldots + b_j^{\sigma_p}(ik_p)^M + \sum_{\substack{|s|\le M, \\ s\ne\sigma_1,\ldots,s\ne\sigma_p}} b_j^s (ik_1)^{s_1}\cdot\ldots\cdot(ik_p)^{s_p}. \quad (42)$$

Щоб отримати оцінки знизу для $\Gamma(k)$ використаємо таку допоміжну лему:

Лема 4. *Нехай* $q_1,\ldots,q_n$ *– деякі натуральні числа, а* $F(z_1,\ldots,z_n)$ *такий многочлен змінних* $z_1,\ldots,z_n$, *що його похідні*

$$\frac{\partial^{q_{j+1}+\ldots+q_n} F}{\partial z_{j+1}^{q_{j+1}} \ldots \partial z_n^{q_n}} \equiv P_j, \ \ j=1,\ldots,n-1,$$

є многочленами змінних $z_1,\ldots,z_j$, *причому* $P_1 = P_1(z_1)$ *має степінь* q_1. *Якщо для всіх* $\vec{z}\in\Pi_n(\rho)$ *виконується нерівність*

$$\left|\frac{\partial^{q_1+\ldots+q_n} F}{\partial z_1^{q_1} \ldots \partial z_n^{q_n}}\right| \ge \delta > 0,$$

то для довільного $\varepsilon > 0$

$$\mathrm{mes}_{\mathbf{C}^n}\{\vec{z}\in\Pi_n(\rho) : |F(z_1,\ldots,z_n)| \le \varepsilon\} \le C(q_1,\ldots,q_n)\cdot(\varepsilon/\delta)^{2/(q_1,\ldots,q_n)}.$$

Теорема 5. *Нехай для всіх* $k\in\mathbf{Z}^p$ *виконується умова (13). Для кожного* $j=1,\ldots,m$ *нерівність (35) виконується для майже всіх (щодо міри Лебега в* $\mathbf{R}\times\mathbf{C}^p$*) векторів* $(\tau_j,\vec{b}_j) = (\tau_j, b_j^{\sigma_1},\ldots,b_j^{\sigma_p}) \in [0,T]\times\mathbf{C}^p$ *для всіх (крім скінченної кількості)* $k\in\mathbf{Z}^p$, *якщо* $\omega_2 \ge p/2 - M + n(p+1)$.

Доведення. Для кожного $k\in\mathbf{Z}^p$ розглянемо такі множини:

$$M_{j,\omega_2}(k,\rho) = \left\{(\tau_j,\vec{b}_j)\in[0,T]\times\Pi_p(\rho) : |\Gamma(k)| < (1+|k|)^{-\omega_2}\right\},$$

де $j=1,\ldots,m$, $\rho\in\mathbf{N}$. З огляду на лему Бореля-Кантеллі [4] і те, що простір $\mathbf{C}^p$ можна покрити зліченною кількістю полікругів $\Pi_p(\rho)$, $\rho\in\mathbf{N}$, для доведення теореми досить перевірити, що ряди

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}^p} \mathrm{mes}_{\,\mathbf{R}\times\mathbf{C}^p} M_{j,\omega_2}(k,\rho), \ \ j=1,\ldots,m, \quad (43)$$

є збіжними для кожного $\rho\in\mathbf{N}$, якщо $\omega_2 \ge p - M + n(p+1)$. Для цього покажемо, що

$$\mathrm{mes}_{\,\mathbf{R}\times\mathbf{C}^p} M_{j,\omega_2}(k,\rho) \le \frac{C_{17}}{(1+|k|)^{p+\varepsilon}}, \ \ j=1,\ldots,m, \quad (44)$$

де додатні сталі C_{17}, ε не залежать від $k\in\mathbf{Z}^p$. Зауважимо, що будь-який цілочисловий вектор $k\in\mathbf{Z}^p$ належить до однієї з множин $K_1,\ldots,K_p$, де $K_q = \left\{k=(k_1,\ldots,k_p)\in\mathbf{Z}^p : |k_q| \ge (1+|k|)/p\right\}$, $q=1,\ldots,p$.

Для оцінки зверху мір множин $M_{j,\omega_2}(k,\rho)$, $j=1,\ldots,m$, де $k\in K_q$ для деякого q, $q=1,\ldots,p$, зауважимо, що виконується включення

$$M_{j,\omega_2}(k,\rho) \subset M^1_{j,\omega_2}(k,\rho,q) \cup M^2_{j,\omega_2}(k,\rho,q)\,,\ j=1,\ldots,m\,,\ k\in \mathbf{Z}^p\,, \tag{45}$$

де

$$M^1_{j,\omega_2}(k,\rho,q) = \Big\{(\tau_j,\vec{b}_j)\in[0,T]\times\Pi_p(\rho): |\Gamma(k)| < (1+|k|)^{-\omega_2},$$

$$\left|\partial\Gamma(k)/\partial b_j^{\sigma_q}\right| \ge (1+|k|)^{-\chi}\Big\} \tag{46}$$

$$M^2_{j,\omega_2}(k,\rho,q) = \Big\{(\tau_j,\vec{b}_j)\in[0,T]\times\Pi_p(\rho): \left|\partial\Gamma(k)/\partial b_j^{\sigma_q}\right| < (1+|k|)^{-\chi}\Big\}. \tag{47}$$

Спочатку оцінимо зверху $\operatorname{mes}_{\mathbf{R}\times\mathbf{C}^p} M^2_{j,\omega_2}(k,\rho,q)$. Якщо тепер $k\in K_q$ для деякого q і точка $(\tau_j,\vec{b}_j)\in M^2_{j,\omega_2}(k,\rho,q)$, то з рівностей (19) та означення множин (47) отримаємо, що в цій точці виконується нерівність

$$\left|\int_0^T G_k(\tau_j,\tau)d\tau\right| < |k_q|^{-M}\,(1+|k|)^{-\chi} \le p^M(1+|k|)^{-M-\chi}. \tag{48}$$

Тому

$$M^2_{j,\omega_2}(k,\rho,q)\subset$$

$$\subset\left\{\tau_j\in[0,T]: \left|\int_0^T G_k(\tau_j,\tau)d\tau\right| < p^M(1+|k|)^{-M-\chi}\right\}\times\left\{\vec{b}_j\in\Pi_p(\rho)\right\}.$$

Оскільки

$$\left|L\left(\partial/\partial\tau_j,k\right)\int_0^T G_k(\tau_j,\tau)d\tau\right| = 1,\ \ j=1,\ldots,m\,,$$

то з леми 2 (див. [5]) випливає, що

$$\operatorname{mes}_{\mathbf{R}}\left\{\tau_j\in[0,T]: \left|\int_0^T G_k(\tau_j,\tau)d\tau\right| < p^M(1+|k|)^{-M-\chi}\right\}\le$$

$$\le C_{17}(1+|k|)^{1-(M+\chi)/n} = C_{17}(1+|k|)^{-p-\sigma},\ j=1,\ldots,m\,, \tag{49}$$

де $\sigma=(M+\chi)/n-p-1>0$. З нерівностей $\operatorname{mes}_{\mathbf{R}\times\mathbf{C}^p} M^1_{j,\omega_2}(k,\rho,q)\le C_{18}T(\pi\rho^2)^{p-1}(1+|k|)^{2(\chi-\omega_2)}$ випливає, що

$$\operatorname{mes}_{\mathbf{R}\times\mathbf{C}^p} M^2_{j,\omega_2}(k,\rho,q)\le C_{17}(\pi\rho^2)^p(1+|k|)^{-p-\sigma},\ j=1,\ldots,m\,. \tag{50}$$

Оцінимо тепер зверху $\operatorname{mes}_{\mathbf{R}\times\mathbf{C}^p} M^1_{j,\omega_2}(k,\rho,q)$, де $k\in K_q$ для деякого q. Для фіксованих параметрів τ_j, $b_j^{\sigma_1},\ldots,b_j^{\sigma_{q-1}},b_j^{\sigma_{q+1}},\ldots,b_j^{\sigma_p}$ функція $\Gamma(k)$ є лінійною функцією параметра $b_j^{\sigma_q}$. Із леми 4 випливає, що

$$\operatorname{mes}_{\mathbf{C}} M^1_{j,\omega_2}(k,\rho,q,\tau_j,\vec{b}_j^{\sigma_q})\le C_{18}(+|k|)^{2(\chi-\omega_2)},\ j=1,\ldots,m\,, \tag{51}$$

де $\vec{b}_j^{\sigma_q}=(b_j^{\sigma_1},\ldots,b_j^{\sigma_{q-1}},b_j^{\sigma_{q+1}},\ldots,b_j^{\sigma_p})$,

$$M^1_{j,\omega_2}(k,\rho,q,\tau_j,\vec{b}_j^{\sigma_q}) = \left\{b_j^{\sigma_q}\in\Pi_1(\rho): \left(\tau_j,\vec{b}_j\right)\in M^1_{j,\omega_2}(k,\rho,q)\right\}.$$

Інтегруючи оцінку (51) в області $[0,T]\times\Pi_{p-1}(\rho)$, отримаємо

$$\operatorname{mes}_{\mathbf{R}\times\mathbf{C}^p} M^1_{j,\omega_2}(k,\rho,q)\le C_{18}T(\pi\rho^2)^{p-1}(1+|k|)^{2(\chi-\omega_2)}\le C_{19}(1+|k|)^{-p-\varepsilon}, \tag{52}$$

де $j = 1,\ldots,m$, $\varepsilon = 2(\omega_2 - \chi) - p > 0$. Таким чином, з оцінок (50),

$\operatorname{mes}_{\mathbf{R}\times\mathbf{C}^p} M^1_{j,\omega_2}(k,\rho,q) \le C_{18} T(\pi\rho^2)^{p-1}(1+|k|)^{2(\chi-\omega_2)}$ випливає, що

$$\operatorname{mes}_{\mathbf{R}\times\mathbf{C}^p} M_{j,\omega_2}(k,\rho,q) \le C_{20} \max\left\{(1+|k|)^{-p-\sigma},(1+|k|)^{-p-\varepsilon}\right\},\ j = 1,\ldots,m. \quad (53)$$

З нерівностей (53) випливають оцінки (44). Теорему доведено.

Висновки

У роботі отримано формальний розв’язок задачі з інтегральними умовами з показниковими ваговими функціями для строго гіперболічного рівняння навантаженого значеннями невідомої функції та її похідних на скінченній кількості гіперплощин, доведено теорему про існування розв’язку у шкалі просторів Соболєва, а також встановлено метричні оцінки знизу для малих знаменників, які виникають при побудові розв’язку. При доведенні цих оцінок з'ясовано детальну структуру цих знаменників, при цьому використано техніку розділених різниць.

Результати можна поширити на випадок малих знаменників, що виникають у задачах з інтегральними умовами для систем рівнянь із частинними похідними.

Література

1. Ільків В.С. Задача з інтегральними умовами для рівняння з частинними похідними другого порядку / В.С. Ільків, Т.В. Магеровська // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська Політехніка“. Сер. Фіз.-мат. науки. – 2008. – Вип.625, №625. – С. 12-19.
2. Медвідь О.М. Інтегральна задача для лінійних рівнянь із частинними похідними / О.М. Медвідь, М.М. Симотюк // Мат. Студії. – 2007. – Т.28, № 2. – С. 115-140.
3. Медвідь О. Інтегральна задача для навантажених рівнянь із частинними похідними / О. Медвідь // Математичний вісник НТШ. – 2007. – Т.4. – С. 201-213.
4. Нелокальні крайові задачі для рівнянь із частинними похідними / Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, І.Я. Кміть, В.М. Поліщук. – К.: Наук. думка, 2002. – 416 с.
5. Симотюк М.М. Багатоточкова задача для навантаженого полігармонічного рівняння / М.М. Симотюк // Прикладні проблеми механіки і математики. – Науковий збірник, 2003. –Вип.1. – С. 25-34.
6. Ільків В.С. Метричні оцінки малих знаменників інтегральної задачі для навантаженого гіперболічного рівняння / В.С. Ільків, М.М. Симотюк, Д.В. Хомяк // Вісн. Нац. ун-ту “Львівська Політехніка“. Сер. фізико-математичні науки. – 2014. – Вип. 804, №804. – С. 29-38.
7. Дженалиев М.Т. К теории линейных краевых задач для нагруженных дифференциальных уравнений / М.Т. Дженалиев / Алматы: Компьютерный центр ИТПМ. – 1995. – 270 с.

8. Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро-дифференциального уравнения второго порядка / Дифференц. уравнения. – 1976. – Т.12, №1. – С. 103-108.
9. Фардигола Л.В. Интегральная краевая задача в слое / Л.В. Фардигола // Матем. заметки. – 1993. – **53**, Вып.6. – С. 122-129.
10. Попов А.Ю. Экспоненциальные классы разрешимости в задаче теплопроводности с нелокальным условием среднего по времени / А.Ю. Попов, И.В. Тихонов // Мат. сборник. – 2005. – **196**, №9. – С. 71-102.
11. Кузь А.М. Задача з інтегральними умовами за часом для рівнянь гіперболічних за Гордінгом / А.М. Кузь, Б.Й. Пташник // Український математичний журнал. – 2013. – **65**, № 2. – С. 252-265.
12. Bouziani A. Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation / A. Bouziani // J. Appl. Math. Stochastic Anal. **9** (1996), no. 3. – P. 323-330.
13. Каленюк П.І. Узагальнена схема відокремлення змінних. Диференціально-символьний метод / П.І. Каленюк, З.М. Нитребич. – Львів: Вид-во НУ „Львівська Політехніка“, 2002. – 292 с.
14. Каленюк П.І. Про ядро задачі з інтегральною умовою для рівняння із частинними похідними нескінченного порядку / П.І. Каленюк, З.М. Нитребич, І.В. Когут // Вісн. Нац. ун-ту "Львів. Політехніка". Сер. фізико-математичні науки. – 2008. – Вип.625, №625. – С. 5-11.

Стаття надійшла до редакційної колегії 18.05.2015 р.
Рекомендовано до друку член-кореспондентом НАН України,
д.ф.-м.н., професором ***Пташником Б.Й.*** *(м. Львів)*,
д.ф.-м.н., професором ***Королем І.І.*** *(м. Ужгород)*

INTEGRAL PROBLEM FOR LOADED HYPERBOLIC EQUATION

M. M. Symotyuk, D. V. Khomiak
Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematic;
79060, L'viv, Naukova Str, 3-b; ph.: +380 (32) 263-83-77;
e-mail: quaternion@ukr.net; khomiak.dmytro@gmail.com

In this paper it is constructed solution of integral problem for loaded hyperbolic equation, proved theorem on existence of solution in the class of Sobolev spaces and given lower estimations for the solutions using metric approach.

Key words: *problem with integral conditions, loaded hyperbolic equations, small denominators, Diophantine approximation.*