УДК 517.95

ЗАДАЧА СПРЯЖЕННЯ З ІНТЕГРАЛЬНОЮ УМОВОЮ ЗА ЧАСОВОЮ ЗМІННОЮ ДЛЯ МІШАНОГО РІВНЯННЯ ПАРАБОЛО-ГІПЕРБОЛІЧНОГО ТИПУ

І. Я. Савка, М. М. Симотюк

Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я.С. Підстригача НАН України; 79060, м. Львів, вул. Наукова, 3-б; e-mail: quaternion@ukr.net, s-i@ukr.net

Встановлено умови коректної розв'язності у шкалі просторів Соболєва задачі спряження з інтегральною умовою для параболо-гіперболічного рівняння у циліндричній області $(-\alpha,\beta)\times(R^p/2\pi Z^p)$.

Ключові слова: *параболо-гіперболічне рівняння, задача спряження, інтегральна умова, простір Соболєва.*

Вступ.

У роботі [1] вказано на необхідність розгляду задач спряження для рівнянь із частинними похідними, коли на одній частині області рівняння є параболічним, а на іншій – гіперболічним. Зокрема, в [1] наведено приклад задачі про рух газу вздовж каналу з пористим навколишнім середовищем: рух газу в каналі описується хвильовим рівнянням, а ззовні – рівнянням дифузії. Інші застосування цих задач спряження можна знайти у працях [2]-[4].

У прямокутній області двох змінних (t,x) крайові задачі спряження з локальними та нелокальними (зокрема, періодичними та інтегральними) умовами за змінною x для параболо-гіперболічного рівняння досліджено у роботах [5]-[10]. Постановки подібних задач з інтегральною умовою за часовою змінною t у науковій літературі не розглядались. Дана робота присвячена дослідженню задачі спряження з інтегральною умовою за часовою змінною t та умовами періодичності за просторовими змінними для параболо-гіперболічного рівняння.

1. Позначення.

Нехай $\Delta^p=(-\alpha,\beta)\times\Omega^p$, α, β – додатні числа, $\Omega^p=R^p/2\pi Z^p$ – p-вимірний тор (Z^p – цілочислова гратка в дійсному просторі R^p), $p\in N$, $k=(k_1,\ldots,k_p)\in Z^p$, $\|k\|=\sqrt{k_1^2+\ldots+k_p^2}$, $x=(x_1,\ldots,x_p)\in\Omega^p$, $(t,x)\in\Delta^p$; H_q, $q\in R$, – соболєвський простір функцій, отриманий поповненням множини тригонометричних многочленів $\varphi(x)=\sum\limits_k \varphi_k\exp(ik,x)$ за нормою

$$\left\|\phi; H_q\right\| = \left(\sum_{k\in Z^p} (1+|k|^2)^q \, |\phi_k|^2\right)^{1/2};$$

$\mathbf{C}^n(I;\mathbf{H}_q)$ ($n \in \mathrm{Z}_+$ $n \in \mathrm{Z}_+$, I – відрізок дійсної прямої R) – простір функцій

$$u(t,x) = \sum_{k\in Z^p} u_k(t)\exp(ik,x)$$

таких, що для кожного фіксованого $t \in I$ функції

$$\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j} \equiv \sum_{k\in Z^p} u_k^{(j)}(t)\exp(ik,x), \quad 0 \le j \le n,$$

належать до простору $\mathbf{H}_{q-j}$ і як елементи цього простору є неперервними за t на I; норму в просторі $\mathbf{C}^n(I;\mathbf{H}_q)$ задаємо формулою

$$\left\|u;\mathbf{C}^n(I;\mathbf{H}_q)\right\|^2 = \sum_{j=0}^{n} \max_{t\in I} \left\|\frac{\partial^j u(t,x)}{\partial t^j};\mathbf{H}_{q-j}\right\|^2.$$

2. Постановка задачі.

В області D^p для параболо-гіперболічного рівняння

$$Lu \equiv \begin{cases} u_t - a\Delta = 0, & (t,x) \in D_+^p, \\ u_{tt} - b^2\Delta u = 0, & (t,x) \in D_-^p, \end{cases} \tag{1}$$

розглянемо задачу з умовами спряження на поверхні $\{t = 0\}$ зміни типу рівняння

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to+0} u(-\varepsilon,x) &= \lim_{\varepsilon\to+0} u(\varepsilon,x), \\ \lim_{\varepsilon\to+0} u_t(-\varepsilon,x) &= \lim_{\varepsilon\to+0} u_t(\varepsilon,x), \end{aligned} \qquad x \in \Omega^p, \tag{2}$$

та додатковою інтегральною умовою

$$\int_{-\alpha}^{\beta} u(t,x)dt = \varphi(x), \qquad x \in \Omega^p, \tag{3}$$

де a, b – додатні числа, $\Delta \equiv \partial^2/\partial x_1^2 + \ldots + \partial^2/\partial x_p^2$ – оператор Лапласа, $\mathrm{D}_+^p = \mathrm{D}^p \cap \{t > 0\}$, $\mathrm{D}_-^p = \mathrm{D}^p \cap \{t < 0\}$, $\varphi(x)$ – задана функція.

Означення. *Розв'язком задачі* (1)-(3) *називаємо функцію и з класу* $\mathbf{C}^1([0,\beta];\mathbf{H}_q) \cap \mathbf{C}^2([-\alpha,0];\mathbf{H}_q)$*, для якої справджуються рівності*

$$\left\|Lu;\mathbf{C}([0,\beta];\mathbf{H}_{q-2})\right\| = 0, \quad \left\|Lu;\mathbf{C}([-\alpha,0];\mathbf{H}_{q-2})\right\| = 0, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\lim_{\varepsilon\to+0}\left\|u(-\varepsilon,x) - u(\varepsilon,x);\mathbf{H}_q\right\| = 0, \\ &\lim_{\varepsilon\to+0}\left\|u_t(-\varepsilon,x) - u_t(\varepsilon,x);\mathbf{H}_{q-1}\right\| = 0, \end{aligned} \tag{5}$$

$$\left\| \int_{-\alpha}^{\beta} u(t,x)dt - \varphi(x); \mathbf{H}_{q+2} \right\| = 0. \qquad (6)$$

2. Умови єдиності розв'язку задачі.

Розв'язок задачі шукаємо у вигляді ряду Фур'є

$$u(t,x) = \sum_{k \in Z^p} u_k(t) \exp(ik,x). \qquad (7)$$

З умов (4)-(6) випливає, що для кожного $k \in Z^p$ коефіцієнт $u_k(t)$ ряду (7) є розв'язком задачі для звичайного диференціального рівняння

$$\begin{cases} u_k'(t) + a\|k\|^2 u_k(t) = 0, & 0 < t \le \beta \\ u_k''(t) + b^2\|\mathrm{k}\|^2 u_k(t) = 0, & -\alpha \le t < 0, \end{cases} \qquad (8)$$

з умовами спряження при $t = 0$

$$u_k(-0) = u_k(+0), \qquad u_k'(-0) = u_k'(+0) \qquad (9)$$

та інтегральною умовою

$$\int_{-\alpha}^{\beta} u_k(t)dt = \varphi_k, \qquad (10)$$

де φ_k, $k \in Z^p$, – коефіцієнти Фур'є функції $\varphi(x)$.

Загальний розв'язок рівняння (8) має вигляд

$$u_k(t) = \begin{cases} c_k \exp(-a\|k\|^2 t), & t > 0, \\ a_k \cos(b\|k\|t) + b_k \dfrac{\sin(b\|k\|t)}{b\|k\|}, & t < 0, \end{cases} \qquad k \in Z^p, \qquad (11)$$

де a_k, b_k і c_k – довільні сталі, для $k = \vec{0}$ значення виразу $\dfrac{\sin(b\|k\|t)}{b\|k\|}$ приймаємо рівним t. Функція (11) задовольняє умови (9) тільки тоді, коли

$$a_k = c_k, \qquad b_k = -a\|k\|^2 c_k.$$

Тому розв'язок рівняння (8), що справджує умови спряження (9), зображується формулою

$$u_k(t) = \begin{cases} c_k \exp(-a\|k\|^2 t), & t \ge 0, \\ c_k \cos(b\|k\|t) - \dfrac{c_k a\|k\|}{b} \sin(b\|k\|t), & t < 0, \end{cases} \qquad k \in Z^p.$$

Щоб знайти сталу c_k, використаємо інтегральну умову (10). Отримуємо

$$c_k \delta_k = \varphi_k, \quad k \in \mathrm{Z}^p,$$

де

$$\delta_0 = \alpha + \beta,$$

$$\delta_k \equiv \frac{\sin(\alpha b\|k\|)}{b\|k\|} - \frac{a}{b^2}\cos(\alpha b\|k\|) + \frac{a}{b^2} + \frac{1-\exp(-a\|k\|^2\beta)}{a\|k\|^2}, \quad k \in Z^p \setminus \{0\}.$$

Таким чином, справедлива наступна теорема.

Теорема 1. *Якщо існує розв'язок задачі* (1)-(3)*, то він єдиний тоді і тільки тоді, коли для всіх* $k \in Z^p \setminus \{\vec{0}\}$ *виконується умова*

$$\delta_k \neq 0. \tag{12}$$

3. Умови існування розв'язку задачі.

Якщо для всіх $k \in Z^p \setminus \{\vec{0}\}$ виконується умови (12), то формальний розв'язок задачі (1)-(3) зображується рядом

$$u(t,x) = \frac{\varphi_0}{\alpha+\beta} + \sum_{|k|>0} u_k(t)\exp(ik,x), \tag{13}$$

де

$$u_k(t) = \begin{cases} \varphi_k \delta_k^{-1}\exp(-a\|k\|^2 t), & t \geq 0, \\ \varphi_k \delta_k^{-1}(\cos(b\|k\|t) - \dfrac{a}{b}\|\mathrm{k}\|\sin(b\|k\|t)), & t < 0, \end{cases} \quad k \in \mathsf{Z}^p \setminus \{\vec{0}\}. \tag{14}$$

Встановимо умови, при виконанні яких ряд (13) є збіжним. Для цього знайдемо оцінку знизу для виразів d_k, $k \in Z^p \setminus \{\vec{0}\}$, які входять знаменниками у вирази для коефіцієнтів ряду (13) (див. формули (14)).

Лема. *Для всіх тих значень* $k \in Z^p$*, для яких* $\|k\| > \sqrt{\ln 2/(a\beta)}$*, виконується оцінка*

$$\delta_k \geq \frac{C_1}{a}\|\mathrm{k}\|^{-2} > 0, \tag{15}$$

де $C_1 = \inf\limits_{\|\mathrm{k}\|>\sqrt{\ln 2/(a\beta)}} \left\{1/2 - e^{-a\beta\|k\|^2}\right\}.$

Доведення. Зобразимо δ_k у вигляді

$$\delta_k = \frac{1}{a\|k\|^2}\left(1 - (e^{-a\|k\|^2\beta} + \sigma_k)\right),$$

де

$$\sigma_k = \frac{a\|\mathrm{k}\|}{b^2}\left(\sqrt{a^2\|\mathrm{k}\|^2 + b^2}\sin(\alpha b\|k\| - \psi_k) - a\|k\|\right),$$

$$\psi_k = \mathrm{arctg}(a\|k\|/b).$$

Оскільки

$$\sigma_k \leq \frac{a\|k\|}{b^2}\left(\sqrt{a^2\|\mathrm{k}\|^2 + b^2} - a\|k\|\right) = \frac{a\|k\|}{\sqrt{a^2\|\mathrm{k}\|^2 + b^2} + a\|k\|} \leq \frac{1}{2},$$

то

$$\delta_k \geq \frac{1}{a\|k\|^2}\left(1/2 - e^{-a\|k\|^2\beta}\right) \geq \frac{C_1}{a\|k\|^2}$$

для всіх $\|\mathrm{k}\| > \sqrt{\ln 2/(a\beta)}$, що й треба було довести.

Теорема 2. *Нехай для всіх* $k \in Z^p$*, для яких* $0 < \|k\| \leq \sqrt{\ln 2/(a\beta)}$*, виконується умова* (12)*. Тоді для довільної функції* $\varphi \in \mathbf{H}_{q+3}$ *існує єдиний розв'язок задачі* (1)-(3)*, який зображується рядом* (13) *і неперервно залежить від* φ.

Доведення. З нерівності (15) леми випливає, що для всіх $k \in Z^p$, $k \neq \vec{0}$, виконується нерівність

$$|\delta_k| \geq \frac{C_3}{a\|k\|^2}, \quad C_3 = \min\{C_1, C_2\},$$

де $C_2 = \min\left\{a\|k\|^2 \,|\, \delta_k \,|: 0 < \|k\| \leq \sqrt{\ln 2/(a\beta)}\right\}$. Тоді з нерівностей

$$|u_k^{(j)}(t)| \leq \begin{cases} \dfrac{a^{j+1}}{C_3}\|\mathrm{k}\|^{2j+2}\,|\varphi_k|, & t \geq 0, \\ \dfrac{ab^j(1+\frac{a}{b})}{C_3}\|\mathrm{k}\|^{j+3}\,|\varphi_k|, & t < 0, \end{cases} \quad j = 0,1,2, \quad k \neq \vec{0},$$

випливає, що для ряду (13) виконуються оцінки

$$\begin{aligned} \left\|u; \mathbf{C}^1([0,\beta]; \mathbf{H}_q)\right\| &\leq C_3 \sum_{k \in Z^p} (1+\|k\|^2)^{q+3}\,|\varphi_k|^2 = C_3\left\|\varphi; \mathbf{H}_{q+3}\right\|, \\ \left\|u; \mathbf{C}^2([-\alpha,0]; \mathbf{H}_q)\right\| &\leq C_4 \sum_{k \in Z^p} (1+\|k\|^2)^{q+3}\,|\varphi_k|^2 = C_4\left\|\varphi; \mathbf{H}_{q+3}\right\|, \end{aligned} \tag{16}$$

де C_3, C_4 – додатні сталі, що не залежать від k. З отриманих нерівностей (16) випливає твердження теореми.

Література

1. Гельфанд И.М. Некоторые вопросы анализа и дифференциальных уравнений / И.М. Гельфанд // УМН. – 1959. – Т.3, №3. – С. 3-19.
2. Стручина Г.М. Задача о сопряжении двух уравнений / Г.М. Стручина // Инж.-физ. журнал. 1961. – Т. 4, №11. – С. 99-104.
3. Уфлянд Я.С. К вопросу о распространении колебаний в составных электрических линиях / Я.С. Уфлянд // Инж.-физ. журнал. – 1964. – Т.7, №1. – С. 89-92.
4. Золина Л.А. О краевой задаче для модельного уравнения гиперболо-параболического типа / Л.А. Золина // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1966. – Т.6, №6. – С. 991-1001.

5. Джураев Т. Краевые задачи для уравнений параболо-гиперболического типа / Т. Джураев, А. Сопуев, М. Мамажанов. – Ташкент: Фан, 1986. – 220 с.
6. Сабитов К.Б. Нелокальная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области / К.Б Сабитов // Матем. заметки. – 2011. – Т.89, №4. – С. 596-602.
7. Сабитов К.Б. Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием / К.Б. Сабитов // Дифференц. уравнения. – 2010. – **46**, №10. – С. 1468-1478.
8. Сабитов К.Б. Начально-граничная задача для уравнения смешанного типа в прямоугольной области / К.Б. Сабитов, Л.Х. Рахманова // Дифференц. уравнения. – 2008. – Т.44, №9. – С. 1175-1181.
9. Юнусова Г.Р. Нелокальные задачи для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа / Г.Р. Юнусова // Вестник СамГУ. Естественнонаучная серия. – 2011. – 8 (89). – С. 108-117.
10. Капустян В.О. Умови існування і єдиності розв'язку параболо-гіперболічного рівняння з нелокальними крайовими умовами / В.О. Капустян, І.О. Пишнограєв // Наукові вісті НТУ "КПІ". – 2012. – №4. – С. 72-76
11. Нелокальні крайові задачі для рівнянь з частинними похідними / Б.Й. Пташник, В.С. Ільків, І.Я. Кміть, В.М. Поліщук. – К.: Наукова думка, 2002. – 416 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 20.05.2015 р.
Рекомендовано до друку член-кореспондентом НАН України,
*д.ф.-м.н., професором **Пташником Б.Й.** (м. Львів),*
*д.ф.-м.н., професором **Королем І.І.** (м. Ужгород)*

CONJUGATION PROBLEM WITH INTEGRAL CONDITION WITH RESPECT TO TIME FOR MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE EQUATION

I. Ya. Savka, M. M. Symotyuk
Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics;
79060, Lviv, Naukova str. 3b;
e-mail: quaternion@ukr.net, s-i@ukr.net

The conditions of correctness in Sobolev spaces to the conjugation problem with integral condition for parabolic-hyperbolic equations in cylindrical domain $(-\alpha, \beta) \times (R^p / 2\pi Z^p)$ *are established.*

***Key words**: parabolic-hyperbolic equation, conjugation problem, integral condition, Sobolev space.*