УДК 517.956.4

СТРУКТУРА ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ СИСТЕМ КОЛМОГОРОВА ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Г. П. Малицька, І. В. Буртняк
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; 76025, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57; тел. +38 (097) 9862632; e-mail: bvaya@meta. ua

Досліджується структура фундаментального розв'язку задачі Коші для одного класу систем ультрапараболічних рівнянь, що мають скінчену кількість груп змінних за якими вироджується параболічність.

Ключові слова: *системи Колмогорова, фундаментальний розв'язок, вироджені параболічні рівняння.*

Вступ. В цій статті ми досліджуємо фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК) для одного класу систем рівнянь типу Колмогорова, які є природнім узагальненням рівняння дифузії з інерцією. Рівняння, що узагальнюють рівняння Колмогорова, вивчалися в багатьох роботах, особливо детальний виклад теорій рівняння типу дифузії з інерцією представлений в роботі [1-2]. Значний інтерес до дослідження поведінки розв'язків задачі Коші та крайових задач для рівнянь Колмогорова [3-5] викликаний їх широким застосуванням у фінансовій математиці для обчислення цін азіатських опціонів та характеристики волатильності цін [6-7]. Ми розглядаємо системи рівнянь з довільною кількістю груп змінних за якими є виродження параболічності і досліджуємо структуру ФРЗК, зокрема одержано точні залежності і види зсувів на лініях рівня ФРЗК як для систем так і для модельних рівнянь.

І. Позначення і постановка задачі.

Нехай n, n_0 натуральні фіксовані числа і $n_0 > 1$, $x \in R^{n_0}$, $(x,s) = \sum_{j=1}^{n_0} x_j s_j$, $x^* = (x_2, ..., x_{n_0})$. Розглянемо систему рівнянь вигляду

$$\partial_t u_\nu(t,x) - \sum_{j=1}^{n_0-1} x_j\, \partial_{x_{j+1}}\, u_\nu(t,x) = \sum_{k=0}^{2} \sum_{r=1}^{n} a_k^{\nu r}(t,x) \partial_{x_1^k}^k\, u_r(t,x),$$
$$\nu = \overline{1,n}.\ \ x \in \Pi_{(0,T]}, \tag{1}$$

де $\Pi_{(0,T]} = \{(t,x),\ t \in (0,T],\ T > 0,\ x \in R^{n_0}\}$. Припускатимемо, що коефіцієнти $a_k^{\nu r}(t,x)$ цієї системи комплекснозначні функції такі що

$$\partial_t\ \omega_\nu(t,x) = \sum_{k=0}^{2}\ \sum_{r=1}^{n} a_k^{\nu r}(t,x)\partial_{x_1^k}^k\ \omega_r(t,x),\ \nu = \overline{1,n}, \qquad (2)$$

система (2) є рівномірно параболічною за І.Г. Петровським у замиканні $\Pi_{[0,T]}$ множини $\Pi_{(0,T]}$, $(x_2,...,x_{n_0})$ вважаються параметрами. Для зручності запишемо систему (1) у матричній формі:

$$\partial_t u(t,x) - \sum_{j=1}^{n_0-1} x_j \partial_{x_{j+1}}\ u(t,x) = \sum_{k=0}^{2} a_k(t,x)\ \partial_{x_1^k}^k\ u(t,x).$$

Знайдемо розв'язок системи (1), який задовольняє початкову умову

$$u(t,x)_r\ |_{t=\tau} = u_0(x),\ x\ \varepsilon\ R^{n_0},\ 0 \le \tau < t \le T, \qquad (3)$$

де τ – задане число, $u_0 = col(u_{01},(x),...,u_{0n},(x))$ – задана матриця-стовпчик.

II. Розв'язання задачі Коші для систем із сталими коефіцієнтами.

Розглянемо задачу Коші для системи (1), в якій коефіцієнти $a_2^{\nu r}$ сталі, $a_1^{\nu r} \equiv 0, a_0^{\nu r} = 0, \nu = \overline{1,n}, r = \overline{1,n}.$

$$\partial_t u_\nu - \sum_{j=1}^{n_0-1} x_j\ \partial_{x_{j+1}}\ u_\nu(t,x) = \sum_{r=1}^{n} a_2^{\nu r} \partial_{x_1^2}^2 (t,x)\, u_r(t,x),\ \ \nu = \overline{1,n}. \qquad (4)$$

$$u(t,x)\,|_{t=\tau} = u_{0\,r}(x),\ x\ \varepsilon\ R^{n_0},\ r = \overline{1,n},\ 0 \le \tau < t \le T, \qquad (5)$$

де $u_{0r}(x)$ – досить гладкі фінітні функції. Припускатимемо, що λ – корені $\lambda_1,...,\lambda_n$ рівняння $det\{(a_2^{\nu r}\ (is)^2)_{\nu,r=1}^n - \lambda I\} = 0$, де I – одинична матриця порядку n, i – уявна одиниця, задовольняють умову $Re\lambda(s) \le -\delta_0\ s_1^2,\ s_1 \in R^1$ з деякою сталою $\delta_0 > 0$. Використовуючи перетворення Фур'є, задачу Коші (4), (5) зведемо до задачі Коші для систем диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку. Для цього компоненти $u_1,...,u_n$ розв'язку задачі Коші (4), (5) будемо шукати у вигляді оберненого перетворення Фур'є по s від невідомих функцій $\upsilon_1,...,\upsilon_n$, тобто

$$u(t,x) := F^{-1}[\upsilon_r(t,s)](t,x) := (2\pi)^{-n_0/2} \int_{R^{n_0}} exp\{i(x,s)\}\upsilon_r(t,s)ds, 0 \le \tau < t \le T,$$

$$x \in R^{n_0}, r = \overline{1,n}.$$

Враховуючи рівності

$$\partial_t\ F^{-1}[\upsilon_r] = F^{-1}[\partial_t \upsilon_r]; x_j \partial_{x_{j+1}} F^{-1}[\upsilon_r] = F^{-1}[-s_{j+1}\partial_{s_j} \upsilon_r],$$

$\partial^2_{x_1^2} F^{-1}[\upsilon_r] = F^{-1}[-s_1^2 \upsilon_r], \partial_{x_1} F^{-1}[\upsilon_r] = F^{-1}[is_1\upsilon_r]$, одержимо для $\upsilon_1,...,\upsilon_n$ таку задачу Коші

$$\partial_t \upsilon_r(t,s) + \sum_{j=1}^{n_0-1} s_{j+1}\partial_{s_j} \upsilon_r(t,s) = -\sum_{k=1}^{n} a_2^{rk} s_1^2 \upsilon_k(t,s). \qquad (6)$$

$$\upsilon_r(t,s)|_{t=r} = \upsilon_{0r}(s), s \in R^{n_0}, r = \overline{1,n}, 0 \le \tau < t \le T. \qquad (7)$$

Оскільки функції $u_{0r}(x)$ досить гладкі і фінітні, то їхнє перетворення Фур'є є аналітичними функціями, для яких справджуються нерівності

$$|\upsilon_{0r}(s)| \le c(1+|s|)^{-m}, s \in R^{n_0}, m \ge n_0 + 1, \qquad (8)$$

де $\upsilon_{or}(s) := F[u_{0r}(x)]$. У задачі (6), (7) s^* – параметр. Система (6) є системою диференціальних рівнянь із частинними похідними першого порядку, які мають однакові головні частини. Згідно [8, с. 146-148] така система еквівалентна однорідному лінійному диференціальному рівнянню з частинними похідними першого порядку для функції ω від $n+n_0$ незалежних змінних $t, s_1,...,s_{n_0-1}\upsilon_1,...,\upsilon_n$, $\partial_t\omega + \sum_{j=1}^{n_0-1} s_{j+1}\partial_{s_j}\omega +$ $+\sum_{r,l=1}^{n} a_2^{rl} s_1^2 \upsilon_r \partial_{\upsilon_l}\omega = 0$, яке в свою чергу, як відомо, еквівалентно системі звичайних диференціальних рівнянь

$$dt = \frac{ds_1}{s_2} = \frac{ds_2}{s_3} = ... = \frac{ds_{n_0-1}}{s_{n_0}} = \frac{d\upsilon_1}{\sum_{n=1}^{n} -a_2^{1r} s_1^2 \upsilon_r} = ... = \frac{d\upsilon_n}{\sum_{r=1}^{n} -a_2^{nr} s_1^2 \upsilon_r}.$$

З цієї системи виділимо $n_0 + n - 1$ незалежних інтегралів. З рівняння $dt = \frac{ds_{n_0-1}}{s_{n_0}}$ знаходимо

$$s_{n_0-1} = ts_{n_0} + c_1, \qquad (9)$$

із $dt = \frac{ds_{n_0-2}}{s_{n_0-1}}$, враховуючи (9), маємо

$$s_{n_0-2} = t^2 s_{n_0}/2 + tc_1 + c_2, \qquad (10)$$

а із $dt = \frac{ds_{n_0-k}}{s_{n_0-(k-1)}}$, для $k = \overline{3, n_0 - 1}$, одержимо

$$s_{n_0-k} = \frac{t^k}{k!} s_{n_0} + \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} c_1 + \frac{t^{k-2}}{(k-2)!} c_2 + ... + c_k. \qquad (11)$$

Враховуючи (9)-(11), запишемо

$$s=(s_1,s_2,...,s_{n_0-(k-1)},...,s_{n_0})=(\frac{t^{n_0-1}}{(n_0-1)!}s_{n_0}+\frac{t^{n_0-2}}{(n_0-2)!}c_1+...+c_{n_0-1},...,$$

$$\frac{t^{k-1}}{(k-1)!}s_{n_0}+\frac{t^{k-2}}{(k-2)!}c_1+...+c_{k-1},ts_{n_0}+c_1,s_{n_0}). \qquad (12)$$

Підставимо (12) в систему рівнянь

$$d\upsilon_r=-\sum_{l=1}^{n}a_2^{rl}s_1^2\upsilon_l dt, r=\overline{1,n}. \qquad (13)$$

одержимо систему рівнянь (13) на характеристиках (9)-(11):

$$d\upsilon_r(t,P(t,s_{n_0},c))=-\sum_{l=1}^{n}a_2^{rl}\,(\frac{t^{n_0-1}}{(n_0-1)!}s_{n_0}+\sum_{k=2}^{n_0}\frac{t^{n_0-k}}{(n_0-k)!}c_{k-1})^2\upsilon_l dt, \qquad (14)$$

де $P(t,s_{n_0},c):=(\frac{t^{n_0-1}}{(n_0-1)!}s_{n_0}+\sum_{k=2}^{n_0}\frac{t^{n_0-k}}{(n_0-k)!}c_{k-1},...,ts_{n_0}+c_1,s_{n_0})$, з початковою умовою

$$\upsilon_r(t,P(t,s_{n_0},c)|_{t=\tau}=\upsilon_{0r}\;(P(\tau,s_{n_0},c)), r=\overline{1,n}. \qquad (15)$$

Задача (14), (15) має єдиний розв'язок для $0\le\tau<t\le T<+\infty$. Розв'язок задачі Коші (19), (20) запишемо у вигляді

$$\upsilon(t,P(t,s_{n_0},c))=Q(t,\tau,P(\tau,s_{n_0},c))\upsilon_0(P(\tau,s_{n_0},c)), \qquad (16)$$

де $Q(t,\tau,P(\tau,s_{n_0},c))$ – нормальна матриця розв'язків системи (14), $Q(t,\tau,P(\tau,s_{n_0},c))|_{t=\tau}=I$. Оскільки матриця

$A(t)=(-a_2^{rl}(\frac{t^{n_0-1}}{(n_0-1)!}s_{n_0}+\sum_{k=2}^{n_0}\frac{t^{n_0-k}}{(n_0-k)!}c_{k-1})^2)_{r,l=1}^{n}$ комутує з $\int_\tau^t A(\tau)d\tau$, то

$$Q(t,\tau,P(\tau,s_{n_0},c))=exp\{-\int_\tau^t A(\beta)d\beta\}=exp\{-A_1\int_\tau^t(\frac{\beta^{n_0-1}s_{n_0}}{(n_0-1)!}+\sum_{k=2}^{n_0}\frac{\beta^{n_{0-k}}}{(n_{0-k})!}c_{k-1})^2d\beta\}$$

де $A_1=(a_2^{r\ell})_{r,l=1}^{n}$. Методом математичної індукції з (9)-(10) знайдемо $c_k, k=\overline{1,n_0-1}$, для c_k справджується формула:

$$c_k=\sum_{j=0}^{k}(-t)^j s_{n_0-k+j}/j!, k=\overline{1,n_0}.$$

Дійсно з (9)-(11) маємо: $c_1=s_{n_0-1}-ts_{no}$,

$c_2=s_{n_0}-tc_1-\frac{t^2}{2!}s_{n_0}=s_{n_0-2}-ts_{n_0-1}+\frac{t^2}{2!}s_{n_0}$, аналогічно

$c_3=s_{n_0-3}-\frac{t^3}{3!}s_{n_0}-\frac{t^2}{2!}c_1-tc_2=s_{n_0-3}-ts_{n_0-2}+\frac{t^2}{2!}s_{n_0-1}-\frac{t^3}{3!}s_{n_0}$,...

Нехай $c_{k-1} = s_{n_0-k-1} - ts_{n_o-k+2} + \ldots + \dfrac{(-t)^j}{j!} s_{n_0-k+j+1} + \ldots + \dfrac{(-t)^{k-1}}{(k-1)!} s_{n_0}$, тоді для c_k одержимо

$$c_k = s_{n_0-k} - \frac{t^k}{k!} s_{n_0} - \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} c_1 - \ldots - tc_{k-1} = s_{n_0-k} - \frac{t^k}{(k)!} s_{n_0} - \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \times$$

$$\times (s_{n_0-1} - ts_{n_0}) - t^{k-2}(s_{n_0-2} - ts_{n_0-1} + \frac{t^2}{2!} s_{n_0}) - \ldots - t(s_{n_0-k+1} - ts_{n_0-k+2} + \ldots +$$

$$+ \frac{(-t)^j}{j!} s_{n_0-k+j+1} + \ldots + \frac{(-t)^{k-1}}{(k-1)!} s_{n_0}) = s_{n_0-k} + s_{n_0} \frac{(-t)^k}{k!} +$$

$$+ s_{n_0-1} \frac{(-t)^{k-1}}{(k-1)!} + \ldots + (-t) s_{n_0-k+1},$$

тому маємо

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} (-t)^j s_{n_0-k+j}/j!, \; k = \overline{1,n}. \tag{17}$$

Підставивши (17) в (16) одержимо

$$\upsilon(t,s) = \exp\{-A_1 \int_{\tau}^{t} (\beta^{n_0-1} s_{n_0}/(n_0-1)! + \sum_{j=0}^{k} \beta^{n_0-k} (\sum_{j=0}^{k-1} s_{n_0-j} (-t)^{k-j-1}/(k-1-j)! \times$$

$$\times ((n_0-1)!))^2 d\beta\} \, \upsilon_0(s_1 + (\tau-t)s_2 +$$

$$+ (\tau-t)^2 s_3/2! + \ldots + (\tau-t)^{n_0-1} s_{n_0}/(n_0-1)!, s_2 + (\tau-t)s_3 + \ldots +$$

$$+ (\tau-t)^{n_0-2} s_{n_0}/(n_0-2)!, \ldots, s_{n_0-1} + (\tau-t)s_{n_0}, s_{n_0}).$$

Після зведення подібних членів в показнику $\exp$, матимемо

$$\upsilon(t,s) = \exp\{-A_1 \int_{\tau}^{t} (s_1 + (\beta-t)s_2 + \ldots + (\beta-t)^{n_0-1} s_{n_0}/(n_0-1)!)^2 d\beta\} \upsilon_0(s_1 +$$

$$+ (\tau-t)s_2 + \ldots + (\tau-t)^{n_0-1}! s_{n_0}/(n_0-1)!, s_2 + (\tau-t)s_3 + \ldots +$$

$$+ (\tau-t)^{n_0-2} s_{n_0}/(n_0-2)!, \ldots, s_{n_0-1} + (\tau-t)s_{n_0}, s_{n_0}).$$

Знайдемо $u(t,x)$:

$$u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{n_0/2}} \int_{R^{n_0}} \exp\{i(x,s) - A_1 \int_{\tau}^{t} (s_1 + (\beta-t)s_2 + \ldots +$$

$$+ (\beta-t)^{n_0-1} s_{n_0}/(n_0-1)!)^2 d\beta v_0(s_1 + (\tau-t)s_2 + \ldots + \tag{18}$$

$$+ (\tau-t)^{n_0-1} s_{n_0}/(n_0-1)!, \ldots, s_{n_0-1} + (\tau-t)s_{n_0}, s_{n_0}) ds.$$

Зробивши заміну змінних у інтегралі (18)

$$s_1+(\tau-t)s_2+...+(\tau-t)^{n_0-1}s_{n_0}/(n_0-1)!=\alpha_1, s_2+(\tau-t)s_2+...+(\tau-t)^{n_0-2}\times$$
$$\times s_{n_0}/(n_0-2)!=\alpha_2, s_{n_0-1}+(\tau-t)s_{n_0}=\alpha_{n_0-1}; s_{n_0}=\alpha_{n_0},$$

одержимо

$$u(t,x)=\int\limits_{R^{n_0}} G(t-\tau,x-\xi;x)u_0(\xi)d\xi, \tag{19}$$

де $G(t-\tau,x-\xi;x)$ – фундаментальний розв'язок задачі Коші, який має вигляд:

$$G(t-\tau,x-\xi;x)=(2\pi)^{-\frac{n_0}{2}}\int\limits_{R^{n_0}} exp\{i\alpha_1(x_1-\xi_1)+i\alpha_2(x_2-\xi_2-(\tau-t)x_1)+$$
$$+i\alpha_3(x_3-\xi_3-(\tau-t)x_2+(\tau-t)^2x_1/2!)+...+i\alpha_k(\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j\ x_{k-j}(\tau-t)^j/j!-\xi_k)+ \tag{20}$$
$$+...+i\alpha_{n_0}(\sum_{j=0}^{n_0-1}(-1)^j\ x_{n_0-j}(\tau-t)^j/j!-\xi_{n_0})-\int\limits_{\tau}^{t}(\alpha_1+(\beta-\tau)\alpha_2+...+$$
$$+(\beta-\tau)^{n_0-1}\alpha_{n_0}/(n_0-1)!)^2d\beta\}d\alpha.$$

III. Дослідження поведінки фундаментального розв'язку задачі Коші.

Для того щоб дослідити поведінку $G(t-\tau,x-\xi;x)$ обчислимо інтеграл

$$I=\int\limits_{\tau}^{t}(\alpha_1+(\beta-\tau)\alpha_2+...+(\beta-\tau)^{n_0-1}\alpha_{n_0}/(n_0-1)!)^2d\beta. \tag{21}$$

Зробивши заміну $(\beta-\tau)(\tau-t)^{-1}=\theta,$ одержимо

$$I=\int\limits_{0}^{1}(\alpha_1+\theta(t-\tau)\alpha_2+...+\theta^{n_0-1}(t-\tau)^{n_0-1}\alpha_{n_0}/(n_0-1)!)^2d\theta(t-\tau).$$

Перепозначивши

$$\alpha_1(t-\tau)^{\frac{1}{2}}=s_1, \alpha_2(t-\tau)^{\frac{3}{2}}=s_2,..., \alpha_k(t-\tau)^{\frac{2k-1}{2}}/(k-1)!=s_k,...,\alpha_n\times$$
$$\times(t-\tau)^{\frac{2n_0-1}{2}}/(n_0-1)!=s_{n_0},$$

будемо мати

$$I=\int_0^1 (s_1+\theta s_2+...+\theta^{n_0-1}s_{n_0})^2\,d\theta = s_1^2+s_2^2/3+s_3^2/5+...+$$
$$+s_{n_0}^2/(2n_0-1)+2\sum_{j=2}^{n_0}s_1s_j/j+2\sum_{j=3}^{n_0}s_2s_j/(j+1)+...+ \qquad (22)$$
$$++2\sum_{j=k+1}^{n_0}s_ks_j/(k+j-1)+...+2s_{n_0-1}s_{n_0}/(2n_0-2).$$

У (22) виділимо повні квадрати по $s_1, s_2, ..., s_{n_0}$, матимемо:

$$I=(\sum_{j=1}^{n_0}s_j/j)^2+3(\sum_{j=2}^{n_0}\frac{(j-1)s_j}{j(j+1)})^2+\frac{1}{180}(\sum_{k=3}^{n_0}\frac{s_k 30(k-1)(k-2)}{k(k+1)(k+2)})^2+7\times$$
$$\times(\sum_{k=4}^{n_0}\frac{s_k(k-1)(k-2)(k-3)}{k(k+1)(k+2)(k+3)})^2+...+(2j-1)(\sum_{k=j}^{n_0}\frac{s_k(k-1)...(k-(j-1))}{k(k+1)...(k+j-1)})^2+ \qquad (23)$$
$$+...+(2n_0-3)(\sum_{k=-1}^{n_0}\frac{s_k(k-1)...(k-(n_0-2))}{k(k+1)...(k+n_0-1)})^2+(2n_0-1)s_0^2\frac{(n_0-1)^2(n_0-2)^2...2^2}{n_0^2(n_0+1)^2...(2n_0-1)^2}.$$

В силу (23) $G(t-\tau, x-\xi; x)$ запишемо у вигляді:

$$G(t-\tau,x-\xi;x)=(2\pi)^{-n_0}\int_{R^{n_0}} exp\{is_1(x_1-\xi_1)(t-\tau)^{-1/2}+is_2(x_2-\xi_2-(\tau-t)x_1)+$$
$$+(t-\tau)^{-3/2}+2!is_3(x_3-\xi_3-(\tau-t)x_2+(t-\tau)^2x_1/2!)(t-\tau)^{-5/2}+...+$$
$$+(k-1)!is_k(\sum_{j=0}^{k-1}(-1)^j x_{k-j}(\tau-t)^j/j!-\xi_k)(t-\tau)^{-(2k-1)/2}+$$
$$+is_{n_0}(\sum_{j=0}^{n_0-1}(-1)^j x_{n_0-1}(\tau-t)^j/j!-\xi_{n_0})(t-\tau)^{-(2n_0-1)/2}(n_0-1)!- \qquad (24)$$
$$-A_1[(\sum_{j=1}^{n_0}s_j/j)^2+3(\sum_{j=2}^{n_0}\frac{(j-1)s_j}{j(j+1)})^2+5(\sum_{j=3}^{n_0}\frac{s_j(j-1)(j-2)}{j(j+1)(j+2)})^2+...+$$
$$+(2k-1)(\sum_{j=k}^{n_0}\frac{s_j(j-1)...(j-k+1)}{j(j+1)...(j+k-1)})^2+...+(2n_0-3)\times$$
$$\times(\sum_{j=n_0-1}^{n_0}\frac{s_j(j-1)...(j-(n_0+2))}{j(j+1)...(j+n_0-2)})^2+(2n_0-1)(\frac{s_{n_0}(n_0-1)!}{n_0...(2n_0-1)})^2\}]ds\times$$
$$\times(t-\tau)^{-n_0^2/2}2!...(n_0-1)!.$$

Розглянемо систему

$$\left.\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n_0}\frac{s_j}{j}=\alpha_1,\\
&\sum_{j=2}^{n_0}\frac{(j-1)s_j}{j(j+1)}=\alpha_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\sum_{j=k}^{n_0}\frac{s_j(j-1)\ldots(j-k+1)}{j(j+1)\ldots(j+k-1)}=\alpha_k,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\frac{s_{n_0-1}(n_0-2)!}{(n_0-1)\ldots(2n_0-3)}+\frac{s_{n_0}(n_0-1)!}{n_0\ldots(2n_0-2)}=\alpha_{n_0-1}\\
&\frac{s_{n_0}(n_0-1)!}{n_0\ldots(2n_0-1)}=\alpha_{n_0}.
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Розв’язавши (25) знайдемо $s_k(k-1)!, k=\overline{1,n_0}$ і підставимо в (24). В результаті одержимо:

$$\begin{aligned}
&G(t-\tau,x-\xi;x)=(2\pi)^{-n_0}\int_{R^{n_0}} exp\{-A_1\sum_{k=1}^{n_0}(2k-1)\alpha_k^2+i[\alpha_1-3\alpha_2+5\alpha_3+\ldots+\\
&+(-1)^{n_0-1}(2n_0-1)\alpha_{n_0}](x_1-\xi_1)(t-\tau)^{-1/2}+2\cdot 3(t-\tau)^{-3/2}(x_2-\xi_2-(\tau-t)x_1)\times\\
&\times i[\alpha_2-5\alpha_3+\frac{4\cdot 7}{2!}\alpha_4-\frac{4\cdot 5\cdot 9}{3!}\alpha_5+\ldots+\frac{(-1)^{n_0-2}}{(n_0-2)!}4\cdot 5\ldots n_0(2n_0-1)\alpha_{n_0}]+k\ldots(2k-1)\times\\
&\times(t-\tau)^{-(2k-1)/2}i[\alpha_k-(2k+1)\alpha_{k+1}+\frac{2k(2k+3)}{2!}\alpha_{k+2}-\frac{2k(2k+1)(2k+5)}{3!}\alpha_{k+3}+\\
&+\frac{2k(2k+1)(2k+2)(2k+7)}{4!}\alpha_{k+4}+\ldots+\frac{(-1)^{j-k}2k(2k+1)\ldots(j+k-2)(2j-1)}{(j-k)!}\alpha_j+\\
&+\ldots+\frac{(-1)^{n_0-k}2k(2k+1)\ldots(n_0+k-2)(2n_0-1)}{(n_0-k)!}\alpha_{n_0}](\sum_{j=0}^{k_0-1}(-1)^j x_{k_0-j}(\tau-t)^j/j!-\xi_k)+\\
&+\ldots+n_0(n_0+1)\ldots(2n_0-1)(t-\tau)^{-(2n_0-1)/2}i\alpha_{n_0}(\sum_{j=0}^{n_0-1}(-1)^j x_{n_0-j}(\tau-t)^j/j!--\xi_{n_0})\}\times\\
&\times d\alpha(t-\tau)^{-n_0^2/2}\prod_{k=1}^{n_0}k(k+1)\ldots(2k-1).
\end{aligned} \tag{26}$$

Згрупувавши в (26) подібні члени відносно α_j, будемо мати:

$$G(t-\tau,x-\xi;x)=(2\pi)^{-n_0}\int\limits_{R^{n_0}} exp\{-A_1\sum_{k=1}^{n_0}(2k-1)\alpha_k^2+i\alpha_1(t-\tau)^{-1/2}(x_1-\xi_1)+$$
$$+i\alpha_2(t-\tau)^{-3/2}6[x_2-\xi_2+(x_1+\xi_1)(t-\tau)/2]+i\alpha_3(t-\tau)^{-5/2}60[x_3-\xi_3+(t-\tau)\times$$
$$\times(x_2+\xi_2)/2+(t-\tau)^2(x_1-\xi_1)/12]+1540i\alpha_4(t-\tau)^{-7/2}[x_4-\xi_4+(x_3+\xi_3)\times$$
$$\times(t-\tau)/2+(x_2-\xi_2)(t-\tau)^2/10+(t-\tau)^3(x_1+\xi_1)/120]+...+n_0(n_0+1)\times...\times$$
$$(2n_0-1)i\alpha_{n_0}[\sum_{j=0}^{n_0-1}x_{n_0-j}(t-\tau)^j/j-\xi_{n_0}-(t-\tau)(\sum_{j=0}^{n_0-2}x_{n_0-j-1}(t-\tau)^j/j-\xi_{n_0-1})+(t-\tau)^2\times$$
$$\times(\sum_{j=0}^{n_0-3}x_{n_0-j-2}(t-\tau)^j/j-\xi_{n_0-2})(n-2)/4(2n_0-3)+...+(-1)^{(n_0-k)}\frac{(t-\tau)^{(n_0-k)}}{(n_0-k)!}\times \qquad (27)$$
$$\times\frac{2k...(2k+1)...(2k+(n_0-k)-2)(2k+2(n_0-k)-1)}{n_0...(2n_0-1)}\times$$
$$\times(\sum_{j=0}^{k-1}x_{k-j}(t-\tau)^j/j!-\xi_k)+...+(-1)^{(n_0-2)}\frac{(t-\tau)^{(n_0-2)}(x_2-\xi_2+(t-\tau)x_1)}{2(n+1)...(2n-3)}+$$
$$+(-1)^{(n_0-1)}\frac{(t-\tau)^{(n_0-1)}(x_1-\xi_1)}{n_0...(2n_0-2)}]\}d\alpha(t-\tau)^{-n_0^2/2}\prod_{k=1}^{n_0}k(k+1)...(2k-1).$$

З формули (27) випливає, що $G(t-\tau,x-\xi;x)$ є перетворенням Фур'є функції $I_1(\sigma)=\exp\{-A_1\sum_{k=1}^{n_0}(2k-1)\alpha_k^2\},\sigma\in R^{n_0}$. У відповідно підібраних точках, використовуючи параболічність [9], одержимо оцінки для $I_1(\alpha+i\beta),\alpha\in R^{n_0},\beta\in R^{n_0}$:

$$|I_1(\alpha+i\beta)|\le C\exp\{-c_0\sum_{k=0}^{n_0}\alpha_k^2+c\sum_{k=0}^{n_0}\beta_k^2\},$$

де додатні сталі C,c_0,c залежать від $n_0,n,$ сталої параболічності δ_0, $\max\limits_{1\le r,\,s\le n}|a_2^{r\upsilon}|$.

Перетворення Фур'є I_1 є цілою функцією, для похідних якої при $t>\tau,x\in R^{n_0},\xi\in R^{n_0}$ справджуються оцінки:

$$|\partial_{x_j}^m G(t-\tau,x-\xi;x)|\le C_m(t-\tau)^{-\frac{n_0^2}{2}-\frac{(2j-1)m}{2}}\exp\{-c_0^*[|x_1-\xi_1|^2 4^{-1}(t-\tau)^{-1}+$$
$$+3|x_2-\xi_2+(t-\tau)(x_1+\xi_1)/2|^2(t-\tau)^{-3}+$$
$$+180|x_3-\xi_3+(x_2+\xi_2)(t-\tau)/2+(t-\tau)^2(x_1-\xi_1)/12|^2(t-\tau)^{-5}+$$
$$+25200|x_4-\xi_4+(x_3+\xi_3)(t-\tau)/2+(t-\tau)^2(x_2-\xi_2)/10+(x_1+\xi_1)(t-\tau)^3/120|^2\times$$

$$\times(t-\tau)^{-7}+...+(k-1)^2k^2...(2k-3)^2(2k-1)(t-\tau)^{-(2k-1)}\,|\sum_{j=0}^{k-1}x_{k-j}(t-\tau)^j/j!-$$

$$-\xi_k-(t-\tau)(\sum_{j=0}^{k-2}x_{k-1-j}(t-\tau)^j/j!-\xi_{k-1})/2+...+(-1)^{k-l}\frac{(t-\tau)^{k-l}}{(k-l)!}\times$$

$$\times\frac{2l(2l+1)...(2l+(k-l)-2)(2l+2(k-l)-1)}{k...(2k-1)}(\sum_{j=0}^{l-1}x_{l-j}(t-\tau)^j/j!-\xi_l)+ \qquad (28)$$

$$+...+\frac{(-1)^{k-2}(t-\tau)^{k-2}(x_2-\xi_2+(t-\tau)x_1)}{2(k+1)...(2k-3)}+\frac{(-1)^{k-1}(t-\tau)^{k-1}(x_1-\xi_1)}{k...(2k-2)}|^2+...+$$

$$++(n_0-1)^2n_0^2(n_0+1)^2...(2n_0-3)^2(2n_0-1)(t-\tau)^{-\frac{2n_0-1}{2}}\,|\sum_{j=0}^{n_0-1}x_{n_0-j}(t-\tau)^j/j!-$$

$$-\xi_{n_0}-(t-\tau)(\sum_{j=0}^{n_0-2}x_{n_0-1-j}(t-\tau)^j/j!-\xi_{n_0-1})/2+(t-\tau)^2(\sum_{j=0}^{n_0-3}x_{n_0-2-j}(t-\tau)^j/j!-\xi_{n_0-2})\times$$

$$\times\frac{(n_0-2)}{4(2n_0-3)}+..+(-1)^{n_0-k}(\sum_{j=0}^{k-1}x_{k-j}(t-\tau)^j/j!-\xi_k)\frac{(t-\tau)^{n_0-k}}{(n_0-k)!}\frac{2k...(n_0+k-2)}{n_0...(2n_0-2)}\times$$

$$\times(\sum_{j=0}^{k-1}x_{k-j}(t-\tau)^j/j!-\xi_k)+...+(-1)^{n_0-2}\frac{(t-\tau)^{n_0-2}(x_2-\xi_2+(t-\tau)x_1)}{2(n_0+1)...(2n_0-3)}+$$

$$+\frac{(-1)^{n_0-1}(t-\tau)^{n_0-1}(x_1-\xi_1)}{n_0...(2n_0-3)}]^2\},$$

де додатні сталі C_m, c_0^* залежать від $n_0, j, m, \delta, \sup_{r,\nu}|a_2^{r\nu}|, T, j=\overline{1,n_0}$.

Зауваження. Оцінки (28) точні, оскільки розглянувши систему з одного рівняння $n=1$

$$\partial_t u(t,x)-\sum_{j=1}^{n_0-1}x_j\partial_{x_{j+1}}u(t,x)=\partial^2_{x_1^2}u(t,x)$$

одержимо $G(t-\tau,x-\xi;x)$ при $t>\tau$, вигляду

$$G(t-\tau,x-\xi;x)=2^{n_0}\pi^{-\frac{n_0}{2}}\prod_{k=1}^{n_0}k(k+1)...(2k-1)^{-\frac{1}{2}}(t-\tau)^{-\frac{2n_0-1}{2}}\exp\{-|x_1-\xi_1|^2\,4^{-1}\times$$

$$\times(t-\tau)^{-1}-3\,|x_2-\xi_2+(x_1+\xi_1)2^{-1}(t-\tau)|^2\,(t-\tau)^{-3}-180\,|x_3-\xi_3+(x_2+\xi_2)\times$$

$$\times(t-\tau)2^{-1}+(t-\tau)^2(x_1-\xi_1)12^{-1}|^2\,(t-\tau)^{-5}-2520\,|x_4-\xi_4+(x_3+\xi_3)(t-\tau)2^{-1}+$$

$$+(t-\tau)^2(x_2-\xi_2)10^{-1}+(x_1+\xi_1)(t-\tau)^3120^{-1}|^2\,(t-\tau)^{-7}-...-k^2...(2k-3)^2\times \qquad (29)$$

$$\times(2k-1)(t-\tau)^{-(2k-1)}\,|x_k-\xi_k+(t-\tau)(x_{k-1}+\xi_{k-1})2^{-1}+...+(x_{k-j}-(-1)^j\xi_{k-j})\times$$

$$\times(t-\tau)^j(j+1)...(k+j-2)/(j-1)!(k-1)k...(2k-3)+...+(x_1-(-1)^{k-1}\xi_1)\times$$

$$\times(t-\tau)^{k-1}(2(k-1)k...(2k-3))^{-1}|^2-...-n_0^2...(2n_0-2)^2(2n_0-1)(t-\tau)^{-(2n_0-1)}\times$$

$$\times|x_{n_0}-\xi_{n_0}-(x_{n_0-1}+\xi_{n_0-1})(t-\tau)2^{-1}+...+(t-\tau)^{n_0-1}(x_1-(-1)^{n_0-1}\xi_1)\times$$
$$\times(2(n_0-1)...(2n_0-3))^{-1}|^2\}.$$

Зокрема з (29) при $x=x_1, x_2=y, (n_0=2)$ маємо ФРЗК для рівняння дифузії з інерцією, якщо $n_0=\overline{2,5}$ одержуємо результати робіт [10-12]. Повторюючи міркування цієї роботи для рівняння

$$\partial_t u(t,x)-\sum_{\nu=1}^{p}\sum_{j=1}^{n_\nu-1}x_{\nu j}\partial_{x_{\nu(j+1)}}u(t,x)=\sum_{\nu=1}^{p}\partial^2_{x^2_{\nu 1}}u(t,x)+\sum_{\nu=p+1}^{m}\partial^2_{x^2_{\nu 1}}u(t,x), t>\tau,$$

де $x=(x_{11},...,x_{1n_1};x_{21},...,x_{2n_2};x_{p1},...,x_{pn_p};x_{(p+1)1},...,x_{m1})$, $n_1\ge n_2\ge...\ge n_p>1$, $p>1,\ m\ge p,$ одержимо аналог формули (29):

$$G(t-\tau,x-\xi;x)=\prod_{\nu=1}^{p}(2\sqrt{\pi})^{n_\nu+m-p}(t-\tau)^{-\frac{2n_\nu-1+m-p}{2}}\prod_{k=1}^{n_\nu}k(k+1)...(2k-1)^{-\frac{1}{2}}\times$$
$$\times\exp\{-\sum_{j=1}^{p}[|x_{\nu 1}-\xi_{\nu 1}|^2 4^{-1}(t-\tau)^{-1}+3|x_{\nu 2}-\xi_{\nu 2}+(x_{\nu 1}+\xi_{\nu 1})2^{-1}(t-\tau)|^2(t-\tau)^{-3}+$$
$$+180|x_{\nu 3}-\xi_{\nu 3}+(x_{\nu 2}+\xi_{\nu 2})(t-\tau)2^{-1}+(t-\tau)^2(x_{\nu 1}-\xi_{\nu 1})12^{-1}|^2(t-\tau)^{-5}+$$
$$+2520|x_{\nu 4}-\xi_{\nu 4}+(x_{\nu 3}+\xi_{\nu 3})(t-\tau)2^{-1}+(t-\tau)^2(x_{\nu 2}-\xi_{\nu 2})10^{-1}+(x_{\nu 1}+\xi_{\nu 1})(t-\tau)^3\times$$
$$\times 120^{-1}|^2(t-\tau)^{-7}+...+k^2...(2k-3)^2(2k-1)(t-\tau)^{-(2k-1)}|x_{\nu k}-\xi_{\nu k}+(t-\tau)(x_{\nu(k-1)}+$$
$$+\xi_{\nu(k-1)})2^{-1}+...+(x_{\nu(k-j)}-(-1)^j\xi_{\nu(k-j)})(t-\tau)^j(j+1)...(k+j-2)/(j-1)!(k-1)k\times$$
$$\times...\times(2k-3)+...+(x_{\nu 1}-(-1)^{k-1}\xi_{\nu 1})(t-\tau)^{k-1}(2(k-1)k...(2k-3))^{-1}|^2+...+$$
$$+n_\nu^2...(2n_\nu-2)^2(2n_\nu-1)(t-\tau)^{-(2n_\nu-1)}|x_{\nu n_\nu}-\xi_{\nu n_\nu}-(x_{\nu(n_\nu-1)}+\xi_{\nu(n_\nu-1)})(t-\tau)2^{-1}+...+$$
$$+(t-\tau)^{n_\nu-1}(x_{\nu 1}-(-1)^{n_\nu-1}\xi_{\nu 1})(2(n_\nu-1)...(2n_\nu-3))^{-1}|^2]-\sum_{\nu=p-1}^{n}|x_{\nu 1}-\xi_{\nu 1}|^2 4^{-1}\times$$
$$\times(t-\tau)^{-1}\},\quad x\in R^n, \xi\in R^n, n=\sum_{\nu=1}^{p}n_\nu+m-p.$$

Література

1. Малицька Г.П. Системи рівнянь типу Колмогорова / Г.П. Малицька // Укр. мат. журн. – 2008. – 60. №12. – С. 1650-1663.
2. Malyts'ka H.P. Fundamental solution matrix of the Cauchy problem for a class of systems of Kolmogorov type equations / H.P. Malyts'ka // Differential Equations. – 2010. – 46 (5). – P. 753-757.
3. Eidelman S.D. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, A.N. Kochubei. – Basel; Boston: Berlin: Birkhauser Verlag, 2004. – IX. – 387 pp.

4. Polidoro S. On a class of ultraparabolic operators of Kolmogorov–Fokker–Planck type / S. Polidoro // Le Mathematiche. – 1994. – 49. – P. 53-105.
5. Pointwise estimates for solutions to a class of non-homogeneous Kolmogorov equations, to appear / C. Cinti, A. Pascucci, and S. Polidoro // Math. Ann. – 2008. – 340, №2. – P. 237-264.
6. Малицька Г.П. Модель шляхозалежної волатильності для індексу ПФТС / Г.П. Малицька, І.В. Буртняк // Бизнес Информ. – 2012. – №3. – С. 48-50.
7. Малицька Г.П. Обчислення цін опціонів методами спектрального аналізу/ Г.П. Малицька, І.В. Буртняк // Бизнес Информ. – 2013. – №4 – С. 152-158
8. Курант Р. Уравнения с частными производными / Р. Курант. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
9. Эйдельман С.Д. Параболические системы / С.Д. Эйдельман. – М.: Наука, 1964. – 443с.
10. Eidelman S.D. A modified Levi method: development and application / S.D. Eidelman, S.D. Ivasyshen, H.P. Malytska // Dopov.Nats. Akad. Nauk Ukr. Mat. Priridozn. Tekh. Nauki. – 1998. – 5. – P. 14-19.
11. Малицька Г.П. Фундаментальні матриці розв’язків одного класу вироджених параболічних систем / Г.П. Малицька, І.В. Буртняк // Карпатські математичні публікації. – 2012. – №1, т.4. – С. 12-22.
12. Малицька Г.П. Про структуру фундаментального розв’язку задачі Коші для еліптико-параболічних рівнянь, що узагальнюють рівняння дифузії з інерцією / Г.П. Малицька // Вісн. нац. ун-ту “Львів. Політехніка” Сер. Прикл. математика. – 2000. – №411. – С. 221-228.

Стаття надійшла до редакційної колегії 14.05.2015 р.
Рекомендовано до друку к.ф.-м.н., доцентом ***Гургулою С.І.,***
к.ф.-м.н., доцентом ***Казмерчуком А.І.***

STRUCTURE OF THE FUNDAMENTAL SOLUTION OF CAUCHY PROBLEM FOR KOLMOGOROV SYSTEMS OF SECOND-ORDER

H. P. Malytska, I. V. Burtnyak
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
ph. +38 (097) 9862632; e-mail: bvaya@meta. ua

We study the structure of the fundamental solution of the Cauchy problem for a class of ultra parabolic equations with a finite number of groups of variables which degenerates parabolic.

Key words: *Kolmogorov systems, the fundamental solution, degenerate parabolic equations.*