УДК 517.95+511.2

ЗАДАЧА З БАГАТОТОЧКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ СИСТЕМИ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ВИСОКОГО ПОРЯДКУ ЗІ ЗМІННИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

М. М. Симотюк[1], І. Р. Тимків[2]

[1]Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України,78000, м. Львів, вул. Наукова, 3,Б; e-mail: quaternion@ukr.net

[2]Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76018, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 5; e-mail: tymkiv_if@ukr.net

У циліндричній області досліджено задачу з локальними багатоточковими умовами за часовою змінною та умовами типу Діріхле за просторовими координатами для лінійної параболічної системи рівнянь високого порядку зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами. Встановлено умови існування та єдиності розв'язку задачі. Доведено метричні теореми про оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі.

Ключові слова: *багатоточкові умови, параболічна система, малі знаменники, міра Лебега.*

1. Вступ. Багатоточкові задачі для рівнянь та систем рівнянь із частинними похідними вивчались у багатьох роботах (див., наприклад, [1-10] та бібліографію в них). Зокрема, у необмежених областях коректність багатоточкових задач для систем еволюційних рівнянь досліджено у роботах [1-4]. У працях [14, 15] встановлені необхідні та достатні умови розв'язності задачі з двоточковими та багатоточковими нелокальними крайовими умовами для системи гіперболічних рівнянь другого порядку.

В обмежених областях розв'язність багатоточкових задач для систем рівнянь із частинними похідними, взагалі, пов'язана з проблемою малих знаменників. Малі знаменники, що виникають у багатоточкових задачах для систем рівнянь із частинними похідними, мають складну нелінійну структуру і досліджені мало. У роботах [6-8] досліджено двоточкові задачі для деяких безтипних та гіперболічних систем рівнянь другого порядку зі сталими та змінними коефіцієнтами, а також багатоточкові задачі з рівновіддаленими вузлами для систем четвертого та шостого порядку. У згаданих роботах багатоточкові задачі для систем рівнянь високого порядку розглядались, однак питання про оцінки знизу малих знаменників, які виникають у цих задачах, не вивчалось. У роботі [9] досліджено коректність багатоточкової задачі для лінійної безтипної системи рівнянь високого порядку зі сталими коефіцієнтами і вперше для випадку систем загального вигляду встановлено оцінки знизу малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку задачі.

У даній статті встановлено коректну розв'язності задачі з багатоточковими умовами (які містять значення невідомої функції та її похідні за часовою змінною у вузлах інтерполяції) для системи лінійних параболічних рівнянь високого порядку і доведено, що такі умови виконуються для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів, складених із коефіцієнтів системи, коефіцієнтів умов та значень вузлів інтерполяції.

Надалі використовуватимемо такі позначення: Q – обмежена однозв'язна область в $\mathbb{R}^p$ з гладкою межею ∂Q; $x=(x_1,\ldots,x_p)\in Q$; $D=\{(t,x): t\in(0,T), x\in Q\}$; $\Gamma=[0,T]\times\partial Q$; $C^{j,\rho}$, $\rho\in(0,1)$, – клас функцій, визначених і неперервних разом із похідними j-го порядку в області $\overline{Q}$, j-ті похідні яких задовольняють в $\overline{Q}$ умову Гельдера з показником ρ; $A^{j,\rho}$ – клас замкнених областей з $\overline{Q}$, для яких функції, що задають у локальних координатах рівняння межевих поверхонь цих областей, належать до класу $C^{j,\rho}$. Нижче у роботі фігурує диференціальний вираз $L=-\sum_{i,j=1}^{p}\partial/\partial x_i(p_{ij}(x)\partial/\partial x_j)+q(x)$, де $p_{ij}(x)=p_{ji}(x)>0$, $i,j\in\{1,\ldots,p\}$, $q(x)\geq 0$. Якщо $\partial Q\in A^{2n,\rho}$, $p_{ij}\in C^{2n-1,\rho}$, $q\in C^{2n-2,\rho}$, то задача $LX(x)=\lambda X(x)$, $X(x)|_{\partial Q}=0$ має повну ортонормовану в $L_2(\overline{Q})$ систему власних функцій $\{X_k(x), k\in\mathrm{N}\}$ і нескінченну множину додатних власних значень $\{\lambda_k, k\in\mathrm{N}\}$, причому $X_k\in C^{2n}(\overline{Q})$, $k\in\mathrm{N}$, і справджуються оцінки [11]

$$C_1 k^{2/p}\leq\lambda_k\leq C_2 k^{2/p},\quad 0<C_1<C_2,\quad k\in\mathrm{N}. \tag{1}$$

Нехай $mes_{\mathbb{C}^n}A$, $(mes_{\mathbb{R}^n}B)$,– міра Лебега в $\mathbb{C}^n$ вимірної множини $A\subset\mathbb{C}^n$, $(B\subset\mathbb{R}^n)$; $C(mn;m)$– множина всіх цілочислових наборів $\omega=(i_1,\ldots,i_m)$, таких, що $1\leq i_1<i_2<\ldots<i_m\leq mn$; $\prec$ – бінарне відношення на множині $C(mn;m)$, яке визначається правилом $\omega=(i_1,\ldots,i_m)\prec(j_1,\ldots,j_m)=\sigma$, якщо перша відмінна від нуля серед різниць $j_1-i_1,\ldots,j_m-i_m$ є додатною; $\overline{E}^b_{\alpha,\beta}$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, – простір вектор-функцій, одержаний поповненням простору скінченних сум $\vec{\varphi}=\sum\vec{\varphi}_k X_k(x)$, $\vec{\varphi}_k=col(\varphi_k^1,\ldots,\varphi_k^m)\in\mathrm{X}^m$, $k\in\mathrm{N}$, за нормою

$$\left\|\vec{\varphi};\overline{E}^b_{\alpha,\beta}\right\|=\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}\|\vec{\varphi}_k\|^2 w_k^2(\alpha,\beta)},\quad \|\vec{\varphi}_k\|^2=\left|\varphi_k^1\right|^2+\ldots+\left|\varphi_k^m\right|^2,$$

$w_k(\alpha;\beta)=\lambda_k^{\alpha}\exp(\beta\lambda_k^b)$; $C^n\left([0,T];\overline{E}^b_{\alpha,\beta}\right)$ – простір вектор-функцій $\vec{u}(t,x)=\sum\vec{u}_k(t)X_k(x)$, $\vec{u}_k(t)=col(u_k^1(t),\ldots,u_k^m(t))\in C^n[0,T]$, $k\in\mathrm{N}$, таких, що для кожного фіксованого $t\in[0,T]$ похідні $\partial^j\vec{u}(t,\cdot)/\partial t^j$, $j\in\{0,1,\ldots,n\}$, належать до простору $\overline{E}^b_{\alpha,\beta}$, і є неперервними за $t\in[0,T]$ в нормі цього простору; норму в $C^n\left([0,T];\overline{E}^b_{\alpha,\beta}\right)$ задаємо рівністю

$$\left\|\vec{u};C^n\left([0,T];\overline{E}^b_{\alpha,\beta}\right)\right\|=\sum_{j=0}^{n}\max_{t\in[0,T]}\left\|\frac{\partial^j\vec{u}(t,\cdot)}{\partial t^j};\overline{E}^b_{\alpha,\beta}\right\|.$$

2. Формулювання задачі. В області D розглянемо задачу: знайти вектор-функцію $\vec{u}(t,x)$, яка є розв'язком системи

$$W\left(\frac{\partial}{\partial t},L\right)\vec{u}\equiv\frac{\partial^n\vec{u}(t,x)}{\partial t^n}+\sum_{r=0}^{n-1}A_r(L)\frac{\partial^r\vec{u}(t,x)}{\partial t^r}=\vec{0}, \tag{2}$$

і справджує умови

$$U_q[\vec{u}]\equiv\sum_{r=0}^{N_q}B_r^q(L)\frac{\partial^r\vec{u}(t,x)}{\partial t^r}\bigg|_{t=t_q}=\vec{\varphi}_q(x),\ 0\le N_q\le n-1,\ q\in\{1,\ldots,n\}, \tag{3}$$

$$L^r\vec{u}(t,x)|_{\Gamma}=\vec{0},\quad r\in\{0,1,\ldots,(\max\{nb,M\}-1)\}, \tag{4}$$

де $A_r(L)=\left\|a_{i,j}^r(L)\right\|_{i,j=1}^m$, $r\in\{0,1,\ldots,n-1\}$, $a_{i,j}^r(L)=\sum_{q=0}^{(n-r)b}a_{i,j}^{r,q}L^q$, $a_{i,j}^{r,q}\in\mathrm{C}$, $b\in\mathrm{N}$, $\vec{u}(t,x)=col(u^1(t,x),\ldots,u^m(t,x))$, $B_r^q(L)=\left\|b_{i,j}^{r,q}(L)\right\|_{i,j=1}^m$, $b_{i,j}^{r,q}(L)=\sum_{s=0}^{M}b_{i,j}^{r,q,s}L^s$, $b_{i,j}^{r,q,s}\in\mathrm{C}$, $M\in\mathrm{N}$, $0\le t_1<\ldots<t_n\le T$, $\vec{\varphi}_q(x)=col(\varphi_q^1(x),\ldots,\varphi_q^m(x))$, $q\in\{1,\ldots,n\}$.

Будемо вважати, що для системи (2) виконуються умови:

A_1) рівняння

$$\det\left\|W(\mu,\lambda_k)\right\|=0 \tag{5}$$

має попарно різні корені $\mu_1(k),\ldots,\mu_{mn}(k)$, які задовольняють нерівності

$$Re\mu_q(k)\le-\delta_1\lambda_k^b,\quad q\in\{1,\ldots,mn\},\quad \delta_1>0; \tag{6}$$

A_2) для кожного $q \in \{1,\dots,mn\}$ вектори $\vec{h}_{q,k} = col\left(h^1_{q,k},\dots,h^m_{q,k}\right)$, є ненульовими, де вектор $\vec{h}_{q,k}$ – перший стовпець матриці $W^*(\mu_q(k),\lambda_k)$, приєднаної до матриці $W(\mu_q(k),\lambda_k)$, $q \in \{1,\dots,mn\}$.

Якщо в умовах (3) $N_1 = \dots = N_n = 0$, а всі матриці $B_0^q(L)$ – одиничні, то задача з такими умовами для систем рівнянь з частинними похідними зі сталими коефіцієнтами досліджена у роботі [9].

3. Єдиність розв'язку задачі. Розв'язок задачі (2) – (4) з простору $C^n\left([0,T];\overline{E}^b_{\alpha,\beta}\right)$ шукаємо у вигляді ряду

$$\vec{u}(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty}\vec{u}_k(t)X_k(x). \tag{7}$$

Кожна вектор-функція $\vec{u}_k(t), k \in \mathrm{N}$, є розв'язком задачі

$$W\left(\frac{d}{dt},\lambda_k\right)\vec{u}_k(t) = \vec{0}, \tag{8}$$

$$U_q[\vec{u}_k(t)] = \vec{\varphi}_{q,k} \quad q \in \{1,\dots,n\}, \tag{9}$$

де $\vec{u}_k(t) = col(u^1_k(t),\dots,u^m_k(t))$, $\vec{\varphi}_{q,k} = col(\varphi^1_{q,k},\dots,\varphi^m_{q,k})$, $k \in \mathrm{N}$, – коефіцієнти Фур'є вектор-функції $\vec{\varphi}_q(x)$ за системою $\{X_k(x), k \in \mathrm{N}\}$, $q \in \{1,\dots,n\}$. Для кожного $k \in \mathrm{N}$ розв'язок задачі (8), (9) зображується формулою

$$\vec{u}_k(t) = \sum_{l=1}^{mn} C_l(k)\vec{h}_{l,k}\exp(\mu_l(k)t), \tag{10}$$

де сталі $C_l(k)$, $l \in \{1,\dots,mn\}$, знаходимо із системи алгебричних рівнянь

$$\sum_{l=1}^{mn} C_l(k)\sum_{r=0}^{N_q}\mu_l^r(k)\sum_{j=1}^{m} b^{r,q}_{i,j}(k)h^j_{l,k}\exp(\mu_l(k)t_q) = \vec{\varphi}_{q,k}, q \in \{1,\dots,n\}, i \in \{1,\dots,m\}$$

визначник якої позначимо через $\Delta(k)$, $k \in \mathrm{N}$:

$$\Delta(k) = \det\left\| \sum_{r=0}^{N_q}\mu_l^r(k)\sum_{j=1}^{m} b^{r,q}_{i,j}(k)h^j_{l,k}\exp(\mu_l(k)t_q)\right\|^{l\in\{1,\dots,mn\}}_{q\in\{1,\dots,n\}, i\in\{1,\dots,m\},}. \tag{11}$$

Теорема 1. *Нехай для системи (2) виконуються умови* A_1), A_2). *Для єдиності розв'язку задачі (2)-(4) у просторі* $C^n\left([0,T];\overline{E}^b_{\alpha,\beta}\right)$, $\alpha \in \mathrm{R}$, $\beta \in \mathrm{R}$, *необхідно і досить, щоб виконувалась умова*

$$\forall k \in \mathrm{N} \quad \Delta(k) \neq 0. \tag{12}$$

Доведення проводиться за схемою доведення теореми 1 із [8].

4. Існування розв'язку задачі. Надалі вважатимемо, що справджується умова (12). Тоді для кожного $k \in \mathrm{N}$ існує єдиний розв'язок $\vec{u}_k(t)$ задачі (8), (9), а формальний розв'язок задачі (2) – (4) зображується рядом

$$\vec{u}(t,x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i,l=1}^{mn} \frac{\Delta_{i,l}(k)}{\Delta(k)} \exp(\mu_l(k)t) \vec{h}_l(k) \psi_{i,k} X_k(x), \tag{13}$$

де $(\psi_{1,k},\ldots,\psi_{mn,k}) = (\varphi^1_{1,k},\ldots,\varphi^m_{1,k},\ldots,\varphi^1_{n,k},\ldots,\varphi^m_{n,k})$, $\Delta_{i,l}(k)$, $i,l \in \{1,\ldots,mn\}$, – алгебричне доповнення елемента, що стоїть на перетині i-го рядка та l-го стовпця визначника $\Delta(k)$. Збіжність ряду (13), взагалі, пов'язана з проблемою малих знаменників, оскільки $|\Delta(k)|$, будучи відмінним від нуля, може набувати як завгодно малих значень для нескінченної кількості $k \in \mathrm{N}$.

Позначимо: $\beta_1 = m\delta_1(t_1 + \ldots + t_n) - \delta_1 t_n$, $N_0 = \min\limits_{q \in \{1,\ldots,n\}} \{N_q\}$,
$G = bn(m-1)(nm-1) + bm(N_1 + \ldots + N_n) - bN_0 + M(nm-1)$.

Теорема 2. *Нехай виконується умова (12) і нехай для системи (2) справджуються умови* $A_1)$ *і* $A_2)$, *та існують сталі* $\gamma \in \mathrm{R}$ *і* $\nu \in \mathrm{R}$ *такі, що для всіх (крім скінченної кількості)* $k \in \mathrm{N}$ *виконується нерівність*

$$|\Delta(k)| \geq w_k(-\gamma; -\nu). \tag{14}$$

Якщо $\vec{\varphi}_q \in \overline{E}^b_{\alpha_0,\beta_0}$, $q \in \{1,\ldots,n\}$, *де* $\alpha_0 = \alpha + \gamma + bmn + G$, $\beta_0 = \beta + \nu - \beta_1$, *то в просторі* $C^n\left([0,T]; \overline{E}^b_{\alpha,\beta}\right)$ *існує єдиний розв'язок задачі (2)-(4), який зображується рядом (13) і неперервно залежить від вектор-функцій* $\vec{\varphi}_q$, $q \in \{1,\ldots,n\}$.

Доведення. Встановимо оцінки зверху для коренів рівняння (5). Для цього зауважимо, що рівняння (5) має вигляд

$$\mu^{mn} + R_{1,k}\mu^{mn-1} + R_{2,k}\mu^{mn-2} + \ldots + R_{mn,k} = 0, \tag{15}$$

в якому

$$R_{l,k} = \sum_{\substack{0 \le q_1 \le n,\ldots,0 \le q_m \le n, \\ q_1 + \ldots + q_m = mn-l}} \det \left\| a^{q_i}_{i,j}(\lambda_k) \right\|^m_{i,j=1} \quad l \in \{1,\ldots,mn\}.$$

Оскільки $\left| a^r_{i,j}(\lambda_k) \right| \le \sum\limits_{q=0}^{(n-r)b} \left| a^{r,q}_{i,j} \right| \lambda^q_k \le C_3 \lambda_k^{(n-r)b}$, $i,j \in \{1,\ldots,m\}$, $r \in \{0,1,\ldots,n\}$, то враховуючи явні формули для коефіцієнтів $R_{l,k}$, отримуємо, що $|R_{l,k}| \le C_4 \lambda_k^{lb}$, $l \in \{1,\dots,mn\}$. Тоді згідно з [12, с. 102], для коренів $\mu_q(k)$ рівняння (15) випливають оцінки

$$|\mu_q(k)| \le 2 \max_{l \in \{1,\dots,mn\}} \left|R_{l,k}\right|^{1/l} \le C_5 \lambda_k^b, \quad q \in \{1,\dots,mn\}. \tag{16}$$

На підставі оцінок (16) для компонент векторів $\vec{h}_{l,k}$ одержуємо

$$|h_{l,k}^r| \le C_6 \lambda_k^{bn(m-1)}, \ r \in \{1,\dots,m\}, \, l \in \{1,\dots,mn\}. \tag{17}$$

Із оцінок (6), (17) отримуємо, що для кожного $t > 0$ справджуються нерівності

$$\left|\sum_{q=0}^{r} \mu_l^q(k) \exp(\mu_l(k)t)\right| \le C_7 w_k(rb; -\delta_1 t), \ r \in \{0,1,\dots,n\}, \ l \in \{1,\dots,mn\}. \tag{18}$$

З огляду на (11), (16) – (18) отримуємо

$$|\Delta_{i,l}(k)| \le C_8 w_k(G; -\beta_1), \quad i,l \in \{1,\dots,mn\}. \tag{19}$$

Із формули (13) на підставі оцінок (14), (16), (17)-(19) встановлюємо

$$\max_{t\in[0,T]} \left|\frac{d^r \vec{u}_k(t)}{dt^r}\right| \le C_9 \left(\sum_{i,l=1}^{mn} \frac{|\Delta_{i,l}(k)|^2}{|\Delta(k)|^2} |\psi_{i,k}|^2 |\mu_l(k)|^{2r} \max_{t\in[0,T]} \{\exp(2Re\mu_l(k)t)\} \times \right.$$

$$\left. \times \left(\left|h_{l,k}^1\right|^2 + \ldots + \left|h_{l,k}^m\right|^2 \right) \right)^{\frac{1}{2}} \le C_{10} w_k(\gamma + rb + bn(m-1) + G; \nu - \beta_1)) \sum_{q=1}^{n} \left\|\vec{\varphi}_{q,k}\right\|,$$

де $r \in \{0,1,\dots,n\}$. Отже,

$$\left\|\vec{u}; C^n\left([0,T]; \overline{E}_{\alpha,\beta}^b\right)\right\| \le C_{10} \sum_{q=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left\|\varphi_{q,k}\right\|^2 w_k^2(\alpha + \gamma + bnm + G; \beta + \nu - \beta_1) \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= C_{10} \sum_{q=1}^{n} \left\|\vec{\varphi}_q; \overline{E}_{\alpha_0,\beta_0}^b\right\|. \tag{20}$$

Із (20) випливає твердження теореми.

5. Параболічні системи, які справджують певні діофантові властивості. Для системи (2) для кожного $k \in \mathrm{N}$ запровадимо такі позначення: $M_\omega(k) = \mu_{i_1}(k) + \ldots + \mu_{i_m}(k)$, $h_\omega(k) = \det\left\|h_{i_j,k}^q\right\|_{j,q=1}^m$,

$\Lambda_\omega(k) = \prod_{j \in set\,\omega} \mu_j(k)$, $set\omega = \{i_1,\dots,i_m\}$, $\omega = (i_1,\dots,i_m) \in C(mn;m)$;

$\vec{H}_q(k) = col(\vec{h}_{q,k}, \mu_q(k)\vec{h}_{q,k}, \dots, \mu_q^{n-1}(k)\vec{h}_{q,k}), \ q \in \{1,\dots,mn\}$;

$$H(k) = \det\left\|\vec{H}_1(k), \dots, \vec{H}_{mn}(k)\right\|; \tag{21}$$

$$S(k) = \prod_{\substack{\sigma \prec \omega \\ \sigma, \omega \in C(mn;m)}} \left(M_\sigma(k) - M_\omega(k)\right)^2. \tag{22}$$

Означення 1. *Будемо говорити, що система (2) справджує умову H_{γ_1}, $\gamma_1 \in \mathrm{R}$, якщо для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k \in \mathrm{N}$ виконується нерівність*

$$| H(k) | > \lambda_k^{-\gamma_1}. \tag{23}$$

Означення 2. *Будемо говорити, що система (2) справджує умову S_{γ_2}, $\gamma_2 \in \mathrm{R}$, якщо для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k \in \mathrm{N}$ виконується нерівність*

$$| S(k) | > \lambda_k^{-\gamma_2}. \tag{24}$$

Для попарно неперетинних наборів $\omega_1, \dots, \omega_r \in C(mn, m)$, $1 \le r \le n-1$, таких, що $set\omega_j \bigcap set\omega_q = \varnothing$, $1 \le j < q \le r$, розглянемо множини

$$W_1 = C(mn, m), \quad W_{j+1}(\omega_1, \dots, \omega_j) = \{\omega : set\omega \bigcap set\omega_q = \varnothing, 1 \le q \le j\}, \tag{25}$$

де $j \in \{1, \dots, n-1\}$, та многочлени

$$P_j(\mu, k; \omega_1 \dots, \omega_j) = \prod_{\omega \in W_j(\omega_1, \dots, \omega_{j-1}) \setminus \{\omega_j\}} \left(\mu - M_\omega(k)\right), \ j \in \{1, \dots, n-1\}. \tag{26}$$

Відзначимо, що степінь многочлена $P_j(\mu, k; \omega_1 \dots, \omega_j)$ за змінною μ дорівнює $d_j = C_{Q_j}^m - 1$, $Q_j = m(n - j + 1)$.

Для систем (2), які справджують умови H_{γ_1} та S_{γ_2} справедливі наступні твердження.

Лема 1. *Якщо система (2) справджує умову H_{γ_1}, то існують такі попарно непретинні набори $\omega_1, \dots, \omega_n \in C(mn, m)$, для яких нерівність*

$$\prod_{j=1}^{n} \left| h_{\omega_j}(k) \right| > C_{11} \lambda_k^{-\gamma_1 - bmn(n-1)/2}, \quad C_{11} > 0, \tag{27}$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k.

Доведення. Використовуючи теорему Лапласа про обчислення визначників, розкладемо визначник $H(k)$. Враховуючи нерівності (23), дістанемо

$$\lambda_k^{-\gamma_1} < | H(k) | \le \sum_{\substack{(\omega_1, \dots, \omega_{n-1}) \\ \omega_1 \in W_1, \omega_2 \in W_2(\omega_1), \dots, \\ \omega_{n-1} \in W_{n-1}(\omega_1, \dots, \omega_{n-2})}} \prod_{j=1}^{n} \left| h_{\omega_j}(k) \right| \left| \Lambda_{\omega_j}^{j-1} \right| (k), \tag{28}$$

де W_1, $W_j(\omega_1,\dots,\omega_{j-1})$, $j\in\{2,\dots,n-1\}$, – множини, визначені формулами (25), $\omega_n\in C(mn,m)$ – набір, що однозначно визначається за наборами $\omega_1,\dots,\omega_{n-1}$ умовою $set\,\omega_n\bigcap set\,\omega_j=\varnothing$, $j\in\{1,\dots,n-1\}$. Сума в лівій частині нерівності (28) містить $(mn)!/(m!)^n$ доданків, тому знайдуться такі неперетинні набори $\omega_1,\dots,\omega_n\in C(mn,m)$, що

$$\sum_{\substack{(\omega_1,\dots,\omega_{n-1})\\ \omega_1\in W_1,\omega_2\in W_2(\omega_1),\dots,\\ \omega_{n-1}\in W_{n-1}(\omega_1,\dots,\omega_{n-2})}}\prod_{j=1}^{n}\left|h_{\omega_j}(k)\right|\left|\Lambda_{\omega_j}^{j-1}(k)\right|\le\frac{(mn)!}{(m!)^n}\prod_{j=1}^{n}\left|h_{\omega_j}(k)\right|\prod_{j=1}^{n}\left|\Lambda_{\omega_j}^{j-1}(k)\right|. \quad (29)$$

Оскільки з нерівностей (16) випливає, що для довільного набору $\omega\in C(mn,m)$ $|\Lambda_\omega(k)|\le(C_5)^m\lambda_k^{mb}$, а $\prod_{j=1}^{n}\left|\Lambda_{\omega_j}^{j-1}(k)\right|\le C_{12}\lambda_k^{bmn(n-1)/2}$, то з оцінок (28), (29) отримуємо

$$\lambda_k^{-\gamma_1}\le\frac{(mn)!}{(m!)^n}\prod_{j=1}^{n}|h_{\omega_j}(k)|\prod_{j=1}^{n}|\Lambda_{\omega_j}^{j-1}(k)|\le C_{13}\lambda_k^{bmn(n-1)/2}\prod_{j=1}^{n}|h_{\omega_j}(k)|,$$

тобто $\prod_{j=1}^{n}|h_{\omega_j}(k)|\ge(C_{12})^{-1}\lambda_k^{-\gamma_1-bmn(n-1)/2}$.

Лема 2. *Якщо система* (2) *справджує умову* S_{γ_2}, *то для довільних попарно непретинних наборів* $\omega_1,\ \dots,\omega_{n-1}\in C(mn,m)$ *нерівність*

$$\prod_{j=1}^{n-1}\left|P_j(M_{\omega_j}(k);k,\omega_1,\dots,\omega_j)\right|\ge C_{13}\lambda_k^{-(n-1)(\gamma_2/2+b\phi)+bg} \quad (30)$$

виконуються для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k, *де* $\phi=C_{mn}^m(C_{mn}^m-1)$, $g=\sum_{j=1}^{n-1}d_j$.

Доведення. На підставі формули (22) функцію $S(k)$ можна зобразити у вигляді

$$S(k)=\left(P_j(M_{\omega_j}(k),k;\omega_1,\dots,\omega_j)\right)^2\prod_{(\sigma,\omega)\in I_3(j)}(M_\sigma(k)-M_\omega(k))^2, \quad (31)$$

де $I_1(j)=\{(\sigma,\omega_j):\sigma\in W_j(\omega_1,\dots,\omega_{j-1}),\sigma\prec\omega_j\}$, $I_2(j)=\{(\omega_j,\omega):\omega\in W_j(\omega_1,\dots,\omega_{j-1}),\omega_j\prec\omega\}$, $I_3(j)=\{(\sigma,\omega):\sigma\prec\omega,(\sigma,\omega)\notin I_1(j)\bigcup I_2(j)\}$, $j\in\{1,\dots,n-1\}$. Оскільки множина $I_3(j)$ складається із $\phi-d_j$ елементів, то враховуючи оцінки (16), одержуємо, що

$$\prod_{(\sigma,\omega)\in I_3(j)}|M_\sigma(k)-M_\omega(k)|\le C_{14}\lambda_k^{b(\phi-d_j)}. \quad (32)$$

Із формули (31) на підставі оцінок (24), (32) встановлюємо, що нерівності

$$\left| P_j(M_{\omega_j}(k),k;\omega_1,\ldots,\omega_j) \right| \geq C_{15}\lambda_k^{-\frac{\gamma_2}{2}-b(\phi-d_j)}, \ j\in\{1,\ldots,n-1\}, \qquad (33)$$

виконуються для всіх крім скінченної кількості натуральних k. Перемноживши нерівності (33), отримуємо твердження леми.

Нехай $\theta = m^2 n((n+1)b+2)/2$, $\vec{Y} = col(Y_1,\ldots,Y_\theta) = col\left(a_{i,j}^{q,r_q} : i,j\in\{1,\ldots,m\}, q\in\{0,\ldots,n-1\},\ r_q\in\{0,1,\ldots,(n-q)b\}\right)$ – вектор розміру θ, $\Pi_\theta(\rho) = \left\{\vec{Y} = (Y_1,\ldots,Y_\theta)\in \mathrm{C}^\theta : \max\limits_{j\in\{1,\ldots,\theta\}} |Y_j| \leq \rho\right\}$, $\rho>0$.

Зауваження. Можна довести, що для системи (2) умови H_{γ_1} та S_{γ_2} справджуються для майже всіх (стосовно міри Лебега в X^θ) векторів $\vec{Y}\in\Pi_\theta(\rho)$ для всіх (крім скінченної кількості) натуральних k, якщо $\gamma_1 > m^2np(2mn-n-1)/8$, а $\gamma_2 > mp\phi/4$. Для цього слід використати міркування, аналогічні тим, які були застосовані при доведенні леми 4 та леми 5 у [9].

Лема 3. *Нехай для системи (2) виконується умова* A_1)*. Для довільних попарно неперетинних наборів* $\omega_1,\ \ldots,\omega_n \in C(mn,m)$*, для всіх* $k\in\mathrm{N}$*, справджується нерівність*

$$\prod_{j=1}^{n} |\Lambda_{\omega_j}(k)|^{N_j} \geq C_{16}\lambda_k^{bm(N_1+\ldots+N_n)}. \qquad (34)$$

Доведення. Із умови параболічності системи (2) (див. умову A_1)), випливає, що $|Re\mu_l(k)| \geq \delta_1\lambda_k^b$, $l\in\{1,\ldots,mn\}$, $k\in\mathrm{N}$. Враховуючи елементарну нерівність $|z|\geq|Rez|$, отримуємо $|\mu_l(k)|\geq\delta_1\lambda_k^b$, $l\in\{1,\ldots,mn\}$. Зі встановлених оцінок одержуємо нерівність

$$\prod_{j=1}^{n} |\Lambda_{\omega_j}(k)|^{N_j} \geq (\delta_1)^{bm(N_1+\ldots+N_n)}\lambda_k^{bm(N_1+\ldots+N_n)},\ k\in\mathrm{N},$$

з якої випливає твердження леми.

6. Метричні оцінки малих знаменників. Дослідимо питання про можливість виконання оцінки (14), якщо система (2) справджує умови H_{γ_1} та S_{γ_2}. Позначимо: $\vec{Z} = \left(b_{i,i}^{N_q,q,M} : q\in\{1,\ldots,n\}, i\in\{1,\ldots,m\}\right)$; $\delta_2 = \sup\limits_{k\in\mathrm{N}} \max\limits_{q\in\{1,\ldots,nm\}} \{|Re\mu_q(k)|/\lambda_k^b\}$.

Теорема 3. *Нехай система (2) справджує умови* $A_1)$, $A_2)$ *та умови* H_{γ_1}, S_{γ_2}. *Тоді для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{C}^{mn}$ *) векторів* $\vec{Z} \in \Pi_{mn}(\rho)$ *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$ *) векторів* $(t_1,\ldots,t_n) \in [0;T]^n$ *нерівність (14) виконується для всіх (крім скінченної кількості) натуральних* k, *якщо*

$$\gamma > \gamma_1 + \frac{(n-1)}{2}\left(\gamma_2 + bmn + 2b\phi\right) + \frac{p}{2}\left(\frac{mn}{2} + g\right) - bm(N_1 + \ldots + N_n) - mnM,$$

$\nu \ge mn\delta_2 T$.

Доведення. Продиференціюємо визначник $\Delta(k)$ за змінними $z_1,\ldots,z_{mn}$. Отримуємо

$$\frac{\partial^{mn}\Delta(k)}{\partial z_1 \ldots \partial z_{mn}} = \lambda_k^{mnM}\Upsilon(k), \tag{35}$$

де $\Upsilon(k) = \det\left\|\mu_l^{N_q}(k)\vec{h}_{l,k}\exp(\mu_l(k)t_q)\right\|_{q\in\{1,\ldots,n\},}^{l\in\{1,\ldots,mn\}}$. Встановимо спочатку, що при виконанні умов H_{γ_1}, S_{γ_2} для всіх (крім скінченної кількості) $k \in \mathrm{N}$ виконується нерівність

$$|\Upsilon(k)| \ge \lambda_k^{-\gamma_0}\exp(-nm\delta_2 T\lambda_k^b),$$

де $\gamma_0 = \gamma_1 + \frac{(n-1)}{2}\left(\gamma_2 + bmn + 2b\phi\right) + \frac{pg}{2} - bm(N_1 + \ldots + N_n) + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$.

Для цього запровадимо позначення: $\Upsilon_\omega^j(k,t_{j+1},\ldots,t_n)$, $\omega \in W_j$, – визначник, який отримується з $\Upsilon(k)$ викреслюванням перших jm рядків та jm стовпців, номери яких складають множину $set\omega_1 \cup \ldots \cup set\omega_{j-1} \cup set\omega$;

$$F_0(k) = \{\vec{t} \in [0,T]^n : |\Upsilon^0(k,t_1\ldots,t_n)| < \nu_0(k)\},$$

$$F_j(k) = \left\{\vec{t} \in [0,T]^n : \left|\Upsilon_{\omega_{j-1}}^{j-1}(k,t_j,\ldots,t_n)\right| < \nu_{j-1}(k), \left|\Upsilon_{\omega_j}^j(k,t_{j+1},\ldots,t_n)\right| \ge \nu_j(k)\right\}$$

$$j \in \{1,\ldots,n-1\}, \quad k \in \mathrm{N},$$

де $\Upsilon^0(k,t_1\ldots,t_n) \equiv \Upsilon(k)$, а числа $\nu_0(k),\nu_1(k),\ldots,\nu_{n-1}(k)$, $k \in \mathrm{N}$, визначаються рекурентними формулами

$$\nu_{n-1}(k) = \left|\Lambda_{\omega_n}(k)\right|^{N_n}\left|h_{\omega_n}(k)\right|\exp(-m\delta_2 T\lambda_k^b),$$

$$\nu_{j-1}(k) = \nu_j(k)\left|\Lambda_{\omega_j}(k)\right|^{N_j}\left|h_{\omega_j}(k)\right||P_j(M_{\omega_j}(k),k;\omega_1,\ldots,\omega_j)| \times$$

$$\times \exp(-m\delta_2 T\lambda_k^b)\lambda_k^{-d_j\left(\frac{p}{2}+b\right)-\zeta_j},$$

в яких $0<\zeta_1<\ldots<\zeta_{n-1}$. Оцінимо зверху міри Лебега в P^n множин $F_j(k),\ \ j\in\{1,\ldots,n-1\}$. Для цього зауважимо, що з теореми Лапласа про обчислення визначників випливають рівності:

$$\Upsilon_{\omega_{j-1}}^{j-1}(k,t_j,\ldots,t_n)=$$

$$=\sum_{\omega\in W_j(\omega_1,\ldots,\omega_{j-1})} \pm h_\omega(k)\exp(M_\omega(k)t_j)\Upsilon_\omega^j(k,t_{j+1},\ldots,t_n), \tag{36}$$

де $j\in\{1,\ldots,n-1\}$. З формул (36) випливає, що для кожного $j\in\{1,\ldots,n-1\}$

$$\left|P_j\left(\frac{\partial}{\partial t_j},k;\omega_1,\ldots,\omega_j\right)\Upsilon_{\omega_{j-1}}^{j-1}(k,t_j\ldots,t_n)\right|=\left|\Lambda_{\omega_j}(k)\right|^{N_j}\left|h_{\omega_j}(k)\right|\times$$

$$\times\exp(\mathrm{Re}M_{\omega_j}(k)t_j)\,|\,P_j(M_{\omega_j}(k),k;\omega_1,\ldots,\omega_j)\left|\Upsilon_{\omega_j}^j(k,t_{j+1}\ldots,t_n)\right|,\ k\in\mathrm{N}. \tag{37}$$

Якщо $\vec{t}\in F_j(k)$, $j\in\{1,\ldots,n-1\}$, $k\in\mathrm{N}$, то з формул (37) ортримуємо

$$\left|P_j\left(\frac{\partial}{\partial t_j},k;\omega_1,\ldots,\omega_j\right)\Upsilon_{\omega_{j-1}}^{j-1}(k,t_j\ldots,t_n)\right|\ge\left|\Lambda_{\omega_j}(k)\right|^{N_j}\left|h_{\omega_j}(k)\right|\times$$

$$\times|\,P_j(M_{\omega_j}(k),k;\omega_1,\ldots,\omega_j)\,|\exp(-m\delta_2 T\lambda_k^b)\nu_j(k). \tag{38}$$

Із оцінок (38) на підставі леми 2 із [10] справджуються такі нерівності:

$$mes_{\mathrm{R}}F_j(k,t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n)\le C_{17}\lambda_k^b\times$$

$$\left(\frac{\nu_{j-1}(k)\,|\,\Lambda_{\omega_j}(k)\,|^{-N_j}\ \exp(m\delta_2 T\lambda_k^b)}{\nu_j(k)\,|\,h_{\omega_j}(\lambda_k)\,||\,P_j(M_{\omega_j}(k),k;\omega_1,\ldots,\omega_j)\,|}\right)^{\frac{1}{d_j}}\le C_{18}\left(\frac{\lambda_k^{bd_j}}{\lambda_k^{(p/2+b)d_j+\varsigma_j}}\right)^{\frac{1}{d_j}}\le$$

$$\le C_{18}\lambda_k^{-\frac{p}{2}-\frac{\varsigma_j}{d_j}},\ j\in\{1,\ldots,n-1\},\ k\in\mathrm{N}, \tag{39}$$

де $F_j(k,t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n)=\{t_j\in[0,T]:\vec{t}\in F_j(k)\}$, $j\in\{1,\ldots,n-1\}$.

Інтегруючи оцінки (39) за змінними $t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n$, отримуємо

$$mes_{\mathrm{R}^n}F_j(k)\le C_{19}\lambda_k^{-\frac{p}{2}-\varepsilon_1},\ j\in\{1,\ldots,n-1\},\ \varepsilon_1=\min_{j\in\{1,\ldots,n-1\}}\{\zeta_j/d_j\}>0. \tag{40}$$

Зауважимо, що $F_0(k) \subset \bigcup_{j=1}^{n-1} F_j(k)$. Це випливає з того, що внаслідок рівності $\Upsilon_{\omega_{n-1}}^{n-1}(k,t_n) = (\Lambda_{\omega_n}(k))^{N_n} h_{\omega_n}(k) \exp(M_{\omega_n}(k)t_n)$ виконується нерівність $\left|\Upsilon_{\omega_{n-1}}^{n-1}(k,t_n)\right| \ge \nu_{n-1}(k)$. Із нерівностей (40) встановлюємо, що для міри множини $F_0(k)$ справджується оцінка

$$mes_{\mathsf{R}^n} F_0(k) \le \sum_{j=1}^{n-1} mes_{\mathsf{R}^n} F_j(k) \le C_{20} \lambda_k^{-\frac{p}{2}-\varepsilon_1},$$

з якої на підставі оцінок (1) випливає, що ряд $\sum_{k=1}^{\infty} mes_{\mathsf{R}^n} F_0(k)$ є збіжним. Тоді згідно з лемою Бореля-Кантеллі [13, с. 13] для майже всіх (стосовно міри Лебега в R^n) векторів $\vec{t} \in [0,T]^n$ нерівність

$$|\Upsilon(k)| \ge \nu_0(k) \equiv \prod_{j=1}^{n} \left|\Lambda_{\omega_j}(k)\right|^{N_j} |h_{\omega_j}(k)| \prod_{j=1}^{n-1} |P_j(M_{\omega_j}(k), k, \omega_1, \ldots, \omega_j)| \times$$
$$\times w_k\big(-(p/2+b)g - \varepsilon_2; -mn\delta_2 T\big), \qquad (41)$$

де $\varepsilon_2 = \sum_{j=1}^{n-1} \varsigma_j > 0$, виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k \in \mathrm{N}$. Із (41) на підставі оцінок (27), (30), (34) тверджень лем 1, 2, 3 встановлюємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в R^n) векторів $\vec{t} \in [0,T]^n$ нерівність

$$|\Upsilon(k)| \ge C_{21} w_k\big(-\gamma_0; -mn\delta_2 T\big) \qquad (42)$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k \in \mathrm{N}$.

Із формули (35) та оціноки (42) отримуємо, що для майже всіх (стосовно міри Лебега в R^n) векторів $\vec{t} \in [0,T]^n$ нерівність

$$\left|\frac{\partial^{mn}\Delta(k)}{\partial z_1 \ldots \partial z_{mn}}\right| \ge C_{22} w_k(-\gamma_0 + mnM; -mn\delta_2 T) \qquad (43)$$

виконується для всіх (крім скінченної кількості) чисел $k \in \mathrm{N}$. Тоді із оцінок (43) та леми 1 із [9] при $\gamma = \gamma_0 - mnM + pmn/4 + \varepsilon_3$, $\nu = mn\delta_2 T$, де $\varepsilon_3 > 0$, отримуємо, що

$$mes_{\mathsf{C}^{mn}} \{\vec{Z} \in \Pi_{mn}(\rho) : |\Delta(k)| \le w_k(-\gamma; -\nu)\} \le$$
$$\le C_{23} \left(\frac{w_k(-\gamma; -\nu)}{w_k(-\gamma_0 + mnM; -mn\delta_2 T)}\right)^{\frac{2}{mn}} \le \lambda_k^{-\frac{p}{2}-\frac{2\varepsilon_3}{mn}}. \qquad (44)$$

Із оцінок (1), (44) та леми Бореля-Кантеллі випливає твердження теореми.

З теорем 2, 3 отримуємо твердження про однозначну розв'язність задачі (2)-(4) для майже всіх (стосовно міри Лебега) векторів складених з її параметрів.

Теорема 4. *Нехай система (2) справджує умови* $A_1)$, $A_2)$ та H_{γ_1}, S_{γ_2}. *Якщо* $\vec{\varphi}_q \in \overline{E}^b_{\alpha_0,\beta_0}$, $q \in \{1,\ldots,n\}$, *де*

$$\alpha_0 > \alpha + \gamma_1 + \frac{(n-1)}{2}(\gamma_2 + bmn + 2b\phi) + \frac{p}{2}\left(\frac{mn}{2} + g\right) +$$

$$+ bn(nm^2 - nm + 1) - bN_0 - M\,,\ \beta_0 = \beta + mn\delta_2 - m\delta_1(t_1 + \ldots + t_n) + \delta_1 t_n\,,$$

то для майже всіх (стосовно міри Лебега в $\mathbb{C}^{nm}$*) векторів* $\vec{Z} \in \Pi_{nm}(\rho)$ *і для майже всіх (стосовно міри Лебега в* $\mathbb{R}^n$*) векторів* $\vec{t} \in [0,T]^n$ *в просторі* $C^n\left([0,T];\overline{E}^b_{\alpha,\beta}\right)$ *існує єдиний розв'язок задачі (2)-(4), який зображується рядом (13) і неперервно залежить від вектор-функцій* $\vec{\varphi}_q$, $q \in \{1,\ldots,n\}$.

7. Висновки. У даній роботі розглянуто локальну багатоточкову задачу для системи параболічних рівнянь високого порядку зі змінними за просторовими координатами коефіцієнтами. Дана задача є некоректною за Адамаром, а її розв'язність залежить від малих знаменників, які виникли при побудові розв'язку. Встановлено умови єдиності та умови існування розв'язку задачі, доведено метричні оцінки знизу малих знаменників задачі.

Література

1. Борок В.М. О классах единственности решения многоточечной краевой задачи в бесконечном слое / В.М. Борок, М.А. Перельман // Изв. вузов. Математика. – 1973. – №8. – С. 29-34.
2. Матійчук М.І. Параболічні сингулярні крайові задачі / М.І. Матійчук. – К.: Ін-т математики НАН України, 1999. – 176 с.
3. Каленюк П.І. Багатоточкова задача для неоднорідної полілінійної системи рівнянь із частинними похідними / П.І. Каленюк, З.М. Нитребич, Я.М. Плешівський // Вісн. Львів. нац. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип.58. – С. 144-152.
4. Городецький В.В. Коректна розв'язність нелокальної багатоточкової за часом задачі для одного класу еволюційних рівнянь / В.В. Городецький, О.В. Мартинюк, Р.І. Петришин // Укр. мат. журн. – 2013. – Т.65, №3. – С. 339-353.

5. Пташник Б.И. Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными / Б.И. Пташник. – К.: Наук. думка, 1984. – 264 с.
6. Пташник Б.Й. Багатоточкова задача для безтипних систем диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами / Б.Й. Пташник, Л.П. Силюга / Укр. мат. журн. – 1997. – Т.49, №9. – С. 1236-1249.
7. Клюс І.С. Двоточкова задача для системи рівнянь із частинними похідними / І.С. Клюс // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 1998. – Т.41, №2. – С. 75-81.
8. Василишин П.Б. Багатоточкові задачі для безтипних систем диференціальних рівнянь із частинними похідними зі змінними коефіцієнтами / П.Б. Василишин, Б.Й. Пташник, Л.П. Силюга // Віс. Прикарпатського ун-ту. Математика. Фізика. – 2001. – Вип.2. – С. 151-166.
9. Симотюк М.М. Багатоточкова задача для лінійних систем рівнянь з частинними похідними / М.М. Симотюк // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т.45, №4. – С. 107-118.
10. Пташник Б.Й. Багатоточкова задача для неізотропних диференціальних рівнянь із частинними похідними зі сталими коефіцієнтами / Б.Й. Пташник, М.М. Симотюк // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, №2. – С. 241-254.
11. Ильин В.А. Равномерные в замкнутой области оценки для собственных функций эллиптического оператора и их производных / В.А. Ильин, И.А. Шишмарев // Изв. АН СССР. Сер. мат. – 1960. – 24, №6. – С. 883-896.
12. Михайлов В.П. Дифференциальные уравнения в частных производных / В.П. Михайлов. – М.: Наука, 1976. – 391 с.
13. Фаддєєв Д.К. Збірник задач з вищої алгебри / Д.К. Фаддєєв, І.С. Сомінський. – К.: Вища шк., 1971. – 316 с.
14. Спринжук В.Г. Метрическая теория диофантовых приближений / В.Г. Спринжук. – М.: Наука, 1977. – 143 с.
15. Asanova A.T. On a solvability of a family of multi-point boundary value problems for system of differential equations and their application to the nonlocal boundary value problems / A.T. Asanova // Mathematical journal, Almaty.– 2013.– V.13, No3.– P. 58-73.
16. Асанова А.Т. Об однозначной разрешимости семейства двухточечных краевых задач для систем обыкновенных дифференцыальных уравнений / А.Т. Асанова // Фундаментальная и прикладная математика. – 2006.– Т.**12**, №4.– С.21-39.

Стаття надійшла до редакційної колегії 14.05.2015 р.
Рекомендовано до друку член-кореспондентом НАН України,
д.ф.-м.н., професором ***Пташником Б.Й.*** *(м. Львів),*
д.ф.-м.н., професором ***Королем І.І.*** *(м. Ужгород)*

PROBLEM WITH MULTIPOINT CONDITIONS FOR SYSTEMS PARABOLIC EQUATIONS OF HIGT ORDER WITH VARIABLECOEFFICIENTS

M. M. Symotyuk[1], I. R. Tymkiv[2]

[11]Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematic; 79060, L'viv, Naukovas str. 3-b; ph. +380 (32) 263-83-77; e-mail: quaternion@ukr.net ,

[2]Ivano-Frankivs'k National Technical University of Oil and Gas; 76019, Ivano-Frankivs'k, Karpatska str. 15, ph: +380 (342) 72-71-31; e-mail: tymkiv_if@ukr.net .

The correctness of the problem with multipoint conditions on time variable and Dirichlet type conditions on spatial coordinate for the system parabolic equations of higt order is investigated. The conditions of existence and uniqueness solution of the problem are established. The metrical theorem on evalution from below of small denominators of the problem are proved.

***Key words**: system parabolic, multipoint conditions, small denominators, Lebesque measure.*