Диференціальні рівняння і математична фізика

УДК 517.98

ОПЕРАТОРНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ФУР'Є-ЛАПЛАСА ЗГОРТКОВОЇ АЛГЕБРИ УЛЬТРАРОЗПОДІЛІВ КЛАСУ ЖЕВРЕ

О. В. Лопушанський[1], А. В. Соломко[2]
[1]Жешувський університет, Польща;
35-959, Жешув, ал. Рейтана 16с; e-mail: ovlopushansky@yahoo.com
[2]Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника;
76025, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: ansolvas@gmail.com

В роботі побудовано векторний аналог операторного числення для генераторів сильно неперервних n-параметричних напівгруп операторів в згортковій алгебрі ультрарозподілів класу Жевре з носіями в додатному n-вимірному конусі. Доведена теорема про зображення згорткової алгебри ультрарозподілів Жевре у вигляді комутанта (C_0)-напівгрупи операторів зсуву.

Ключові слова: *ультрадиференційовні функції, ультрарозподіли Жевре, сильно неперервна напівгрупа операторів, комутант напівгрупи, операторне числення.*

Вступ. Основу техніки роботи складають n-параметричні операторні сильно неперервні напівгрупи, простір векторнозначних ультрадиференційовних функцій класу Жевре з носіями в додатному n-вимірному конусі, а також топологічно спряжений йому простір ультрарозподілів Жевре.

Побудоване операторне числення Фур'є-Лапласа спирається на важливі теореми про зображення згорткових алгебр у вигляді комутанта n-параметричної сильно неперервної напівгрупи операторів зсуву, узагальнює відоме перетворення Фур'є Е. Хілле, Р. Філіпса [1] для згорткових алгебр мір і є продовженням низки досліджень авторів (див. [2]-[4]), присвячених цій тематиці.

1. Основні позначення і термінологія. На сукупності векторів $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \operatorname{int} R_+^n$, $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n) \in \operatorname{int} R_+^n$ задаємо порядок $\{\nu \prec \mu :$

$\nu_1 < \mu_1, \ldots, \nu_n < \mu_n\}$ і фіксуємо дійсне число $\aleph > 1$. Для довільних векторів $a = (a_1, \ldots, a_n), b = (b_1, \ldots, b_n) \in R^n$ визначаємо простір нескінченно диференційовних функцій з носіями в n-вимірному паралелепіпеді $[a,b] := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_n, b_n]$ виду

$$G_\nu[a,b] := \left\{ \psi : \quad \operatorname{supp}\psi \in [a,b], \quad \|\psi\|_{G_\nu[a,b]} = \sup_{k \in Z_+^n} \sup_{t \in [a,b]} \frac{\left|\partial^k \psi(t)\right|}{\nu^k k^{k\aleph}} < +\infty \right\}.$$

Вище $k = (k_1, \ldots, k_n)$, $k^{k\aleph} := k_1^{k_1\aleph} \cdot \ldots \cdot k_n^{k_n\aleph}$, $\nu^k := \nu_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot \nu_n^{k_n}$,

$$\partial^k := \partial_1^{k_1} \ldots \partial_n^{k_n}, \ \partial_j^{k_j} := (-i)^{k_j} \frac{\partial^{k_j}}{\partial t_j^{k_j}}, \ (j = 1, \ldots, n).$$

Розглядаємо локально опуклу індуктивну границю вигляду

$$G(R^n) := \bigcup_{\nu \geq 1} \bigcup_{b \succ a} G_\nu[a,b] = \operatorname*{lim\,ind}_{b \succ a, \, |\nu| \to +\infty} G_\nu[a,b]$$

відносно неперервних вкладень $G_\nu[a,b] \subset G_\mu[a',b']$ таких, що $1 \leq \nu \prec \mu$ і $[a,b] \subset [a',b']$. Неважко перевірити [5], що простір $G(R^n)$ є алгеброю відносно операції поточкового множення функцій. Функції з $G(R^n)$ називаються ультрадиференційовними в сенсі М. Жевре.

Для простору $G(R)$ функцій однієї змінної відображення

$$\Theta : \quad G(R) \ni \psi \to \varphi := \theta \cdot \psi, \quad \theta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0, \end{cases}$$

визначає фактор-простір $G(R_+) := G(R) / \operatorname{Ker}\Theta$ ультрадиференційовних функцій класу Жевре на додатній півосі.

Простір $G(R_+^n) := G(R_+) \widetilde{\otimes} \ldots \widetilde{\otimes} G(R_+)$, де через $\widetilde{\otimes}$ позначаємо поповнення тензорного добутку в проективній топології, називаємо простором ультрадиференційовних функцій класу Жевре з носіями в додатному n-вимірному конусі R_+^n. Якщо позначити

$$G_\nu[0,b] := G_\nu[a,b] / \operatorname{Ker}\Theta \bigcap G_\nu[0,b],$$

то справджуються наступні топологічні ізоморфізми:

$$G[0,b] \cong \operatorname*{lim\,ind}_{|\nu| \to +\infty} G_\nu[0,b], \quad G_\nu(R_+^n) \cong \operatorname*{lim\,ind}_{|b| \to +\infty} G_\nu[0,b],$$

$$G(R_+^n) \cong \operatorname*{lim\,ind}_{|\nu|, |b| \to +\infty} G_\nu[0,b].$$

Зауважимо, що простір $G(R_+^n)$ − ядерний, рефлексивний і бочковий. Нижче досліджуємо двоїстість $\left\langle G'(R_+^n), G(R_+^n) \right\rangle$, де $G'(R_+^n)$ − згорткова алгебра ультрарозподілів класу Жевре з носіями в додатному n-

вимірному конусі. На алгебрі $G'(R_+^n)$ задаємо сильну топологію відносно визначеної двоїстості.

2. Векторнозначні ультрадиференційовні функції класу Жевре в R_+^n. Нехай $(X, \|\cdot\|)$ − банахів простір. Для фіксованого числа $\aleph > 1$ розглядаємо підпростори

$$G_\nu(R_+^n, X) := \left\{ x: \quad supp\, x \in R_+^n, \quad \|x\|_{G_\nu(R_+^n, X)} = \sup_{k \in Z_+^n} \sup_{\tau \in R_+^n} \frac{\|\partial^k x(\tau)\|}{\nu^k k^{k\aleph}} < +\infty \right\}$$

простору всіх X-значних ультрадиференційовних функцій $x(\tau)$ з компактними носіями в R_+^n. Для кожного набору векторів $1 \le \nu \prec \mu$ маємо

$$G_\nu(R_+^n, X) \subset G_\mu(R_+^n, X), \quad \|x\|_{G_\mu(R_+^n, X)} \le \|x\|_{G_\nu(R_+^n, X)}.$$

Отже, на $G(R_+^n, X)$ можемо ввести топологію індуктивної границі

$$G(R_+^n, X) := \bigcup_{\nu \ge 1} G_\nu(R_+^n, X) = \lim_{|\nu| \to +\infty} ind\; G_\nu(R_+^n, X).$$

Зауважимо, що з ядерності простору $G(R_+^n)$ і теореми Гротендіка [6, п. 3.3, теор. 13] про зображення тензорного добутку двох повних просторів, один з яких є ядерним, випливає справедливість наступних топологічних ізоморфізмів

$$X \tilde{\otimes} \underbrace{G(R_+) \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} G(R_+)}_{n} \cong X \tilde{\otimes} G(R_+^n) \cong G(R_+^n, X).$$

Теорема 1. *Для довільної ультрадиференційовної функції за Жевре функції $x(\tau) \in G(R_+^n, X)$ існує n-вимірний вектор $\nu \ge 1$ такий, що $x(\tau) \in G_\nu(R_+^n, X)$, при цьому функцію $x(\tau)$ можна подати у вигляді абсолютно збіжного ряду в просторі $G_\nu(R_+^n, X)$, а саме*

$$x(\tau) = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m x_m \otimes \varphi_{1m}(\tau_1) \otimes \ldots \otimes \varphi_{nm}(\tau_n), \tag{1}$$

де $\sum_{m=1}^{+\infty} |\lambda_m| < +\infty$, і послідовності функцій $\{\varphi_{j_m}(\tau_j)\}$, $(j = 1, \ldots, n)$, та елементів $\{x_m\}$ прямують до нуля відповідно у просторах $G(R_+)$ та X.

Доведення. Оскільки поповнення проективного тензорного добутку є неперервне відносно переходу до індуктивних границь у випадку, коли кожен з елементів системи є типу (DF), зокрема, сильноспряженим до деякого простору Фреше (див. [7, теор. 2.3]), то

$$\lim_{|\nu| \to +\infty} \operatorname{ind} X \tilde{\otimes} G_{\nu_1}(R_+) \tilde{\otimes} \ldots \tilde{\otimes} G_{\nu_n}(R_+) \cong X \tilde{\otimes} \lim_{|\nu| \to +\infty} \operatorname{ind} G_\nu(R_+^n).$$

Звідси безпосередньо випливає наступний ізоморфізм

$$G(R_+^n, X) \cong \lim_{|\nu|\to+\infty}\operatorname{ind} X \widetilde{\otimes} G_\nu(R_+^n).$$

Далі, простори X та $G_{\nu_j}(R_+)$, $(j=1,\ldots,n)$, є метризовними. Тоді для кожного елемента $x \in X \widetilde{\otimes} G(R_+^n)$ можна застосувати теорему Гротендіка про зображення елементів поповнення проективного тензорного добутку метризовних просторів [8, гл. III, теор. 6.4], з якої негайно випливає рівність (1).

Нехай, $L[G(R_+^n, X)]$ − алгебра лінійних неперервних операторів з топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах. Нижче розглядаємо I_X − одиничний оператор, що діє на банаховому просторі X та $T_f \in L[G(R_+^n)]$ − оператор, визначений співвідношенням

$$(T_f\varphi)(\tau) = \langle f(\sigma), U_\sigma\varphi(\tau)\rangle, \quad \varphi(\tau) \in G(R_+^n),$$

де $\{U_\sigma : \sigma \in G(R_+^n)\}$ − n-параметрична (C_0)-напівгрупа операторів зсуву вздовж конуса R_+^n. Застосовуючи зображення (1), робимо висновок, що оператор $I_X \otimes T_f \in L[G(R_+^n, X)]$ і діє таким чином:

$$(I_X \otimes T_f)x(\tau) = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m x_m (T_f(\varphi_m))(\tau), \quad \tau \in R_+^n.$$

Аналогічно визначаємо векторнозначний оператор зсуву за формулою

$$I_X \otimes U_\sigma : \quad G(R_+^n, X) \ni x(\tau) \to U_\sigma x(\tau) := \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m x_m (U_\sigma(\varphi_m))(\tau) \in G(R_+^n, X).$$

Теорема 2. *Для кожного ультрарозподілу $f \in G'(R_+^n)$ оператор $I_X \otimes T_f$ є ядерним і комутує з векторнозначним оператором зсуву $I_X \otimes U_\sigma$.*

Навпаки, для кожного оператора $T \in L[G(R_+^n)]$, який комутує з оператором $I_X \otimes U_\sigma$, існує єдиний ультрарозподіл $f \in G'(R_+^n)$ такий, що $T = T_f$ і $(I_X \otimes T)x(\tau) = (I_X \otimes T_f)x(\tau)$ для всіх ультрадиференційовних функцій $x(\tau) \in G(R_+^n, X)$.

Доведення. Оскільки оператор $I_X \otimes T_f$ належить простору $L[G(R_+^n, X)]$ і для кожної функції $x(\tau) \in G(R_+^n, X)$ справедливе зображення (1), то в силу відомого критерію ядерності [9, гл. X] отримуємо, що $I_X \otimes T_f$ є ядерним оператором.

Далі, для векторнозначного оператора зсуву $I_X \otimes U_\sigma \in L[G(R_+^n, X)]$ та функції $x(\tau) \in G(R_+^n, X)$ маємо

$$(I_X \otimes U_\sigma \circ T_f)x(\tau) = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m x_m (U_\sigma \circ T_f(\varphi_m))(\tau) =$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m x_m (T_f \circ U_\sigma(\varphi_m))(\tau) = (I_X \otimes T_f \circ U_\sigma)x(\tau).$$

Отже, оператор $I_X \otimes T_f$ комутує з оператором $I_X \otimes U_\sigma$.

Навпаки, для довільної функції $\varphi(\tau) \in G(R_+^n)$ лінійний неперервний функціонал $f : \varphi \to (T\varphi)(0)$ визначає ультрарозподіл $f \in G'(R_+^n)$. Тоді для функції $x(\tau) \in G(R_+^n, X)$ справедлива рівність $\langle f, x \rangle = (I_X \otimes T)x(0)$. З іншого боку

$$(I_X \otimes T_f)x(0) = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m x_m (T_f(\varphi_m))(0) =$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m x_m \langle f(\sigma), \varphi_m(\sigma) \rangle = \left\langle f(\sigma), \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m x_m \otimes \varphi_m(\sigma) \right\rangle = \langle f, x \rangle.$$

Звідси

$$(I_X \otimes T)x(0) = (I_X \otimes T_f)x(0).$$

Підставивши в останню рівність замість $x(0)$ функцію $(I_X \otimes U_0)x(\tau)$, де $\tau \in R_+^n$, отримаємо потрібне співвідношення.

3. Операторне числення для згорткової алгебри ультрарозподілів класу Жевре. В цій частині роботи для довільного набору операторів A_j, $(j = 1, \ldots, n)$, які генерують в деякому банаховому просторі n-параметричну (C_0)-напівгрупу, побудуємо неперервний гомоморфізм із алгебри ультрарозподілів $G'(R_+^n)$ в локально опуклу алгебру операторів $L[G(R_+^n)]$, наділену топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах.

Нехай $U_s : R_+^n \ni s \to U_s \in L(X)$ − n-параметрична напівгрупа операторів класу (C_0) над комплексним банаховим простором $(X, \|\cdot\|)$. Генератори n-параметричної (C_0)-напівгрупи визначаємо співвідношенням

$$\left. \frac{\partial U_s x}{\partial x_j} \right|_{s=0} = -iA_j x, \quad x \in D(A_j), \quad (j = 1, \ldots, n).$$

Зауважимо, що кожен оператор A_j є замкненим і щільно визначеним з областю визначення $D(A_j) \subset X$. Далі позначаємо $A := (A_1, \ldots, A_n)$.

Розглядаємо підпростір $\hat{G}(R_+^n, X)$ в банаховому просторі X вигляду

$$\hat{G}(R_+^n, X) := \left\{ \hat{x} = \int_{R_+^n} (U_s \otimes I_X) x(s) ds : \quad x(s) \in G(R_+^n, X) \right\}. \qquad (2)$$

Зауважимо, що інтеграл, який використовується у співвідношенні (2), є інтегралом Бохнера від векторнозначної функції.

Теорема 3. *Якщо* $\{U_s : s \in R_+^n\}$ − n*-параметрична* (C_0)*-напівгрупа, то підпростір* $\hat{G}(R_+^n, X)$ *щільний в банаховому просторі* X.

Доведення. Безпосередньо з властивостей інтеграла Бохнера випливає, що

$$\langle x', \hat{x} \rangle = \int_{R_+^n} \langle x', (U_s \otimes I_X) x(s) \rangle ds,$$

де $x' \in X'$ − довільний лінійний і неперервний функціонал із спряженого до X простору X'.

Припустимо, що існує такий функціонал $x' \in X'$, для якого $\langle x', \hat{x} \rangle = 0$ для всіх $\hat{x} \in \hat{G}(R_+^n, X)$. Очевидно, що ця умова залишається справедливою і для довільної функції $x \in G(R_+^n, X)$. Покажемо, що в такому випадку $x' = 0$. Не зменшуючи загальності, нам достатньо це показати для всіх елементів з простору $G(R_+^n, X)$ виду $x(s) = x \otimes \varphi(s)$, де $x \in X$, $\varphi(s) \in G(R_+^n)$.

Тоді

$$\langle x', (U_s \otimes I_X) x(s) \rangle = \langle x', U_s x \rangle \varphi(s).$$

Оскільки U_s є (C_0)-напівгрупою, а x та $\varphi(s)$ пробігають всі елементи просторів X та $G(R_+^n)$ відповідно, то поляра $(\hat{G}(R_+^n, X))^o = \{x' : \langle x', \hat{x} \rangle = 0\}$ містить єдиний елемент $x' = 0$. Отже, з теореми про біполяру (див. [8, гл. IV, теор. 1.5]) випливає, що простір виду (2) є щільним в X.

Визначимо перетворення вигляду

$$F_A : \quad G(R_+^n, X) \ni x(s) \to \hat{x} \in \hat{G}(R_+^n, X).$$

Задамо на $\hat{G}(R_+^n, X)$ таку топологію, щоб F_A було неперервним відображенням. Позначимо через $\hat{G}([0,b], X)$ образ простору $G([0,b], X)$, визначеного за формулою (2) при відображенні F_A.

Очевидно, що відображення, яке ставить у відповідність кожному елементу $x(s) \in G(R_+^n, X)$ образ $\hat{x} \in \hat{G}(R_+^n, X)$ є лінійним і неперервним. При $1 \le \nu \prec \mu$ вкладення $G_\nu(R_+^n, X) \subset G_\mu(R_+^n, X)$ є неперервними. Тому неперервними будуть вкладення $\hat{G}_\nu(R_+^n, X) \subset \hat{G}_\mu(R_+^n, X)$. Отже, на просторі $\hat{G}(R_+^n, X)$ можна ввести топологію індуктивної границі

$$\hat{G}(R_+^n, X) = \bigcup_{\nu \geq 1} \hat{G}_\nu(R_+^n, X) = \lim_{|\nu| \to +\infty} \operatorname{ind} \hat{G}_\nu(R_+^n, X).$$

Зауважимо, що при такій топологізації простору $\hat{G}(R_+^n, X)$ перетворення F_A здійснює топологічний ізоморфізм відповідних просторів.

Нехай $L[\hat{G}(R_+^n, X)]$ − простір лінійних неперервних відображень із $\hat{G}(R_+^n, X)$ в $\hat{G}(R_+^n, X)$ з топологією рівномірної збіжності на обмежених множинах. n-параметричній напівгрупі зсувів $\{I_X \otimes U_\sigma : \sigma \in R_+^n\} \subset L[\hat{G}(R_+^n, X)]$ поставимо у відповідність n-параметричну напівгрупу вигляду

$$\{\hat{U}_\sigma : \sigma \in R_+^n\} \subset L[\hat{G}(R_+^n, X)], \quad \hat{U}_\sigma := F_A \circ (I_X \otimes U_\sigma) \circ F_A^{-1}.$$

Зауважимо, що ця сукупність утворює (C_0)-напівгрупу, оскільки при $\sigma, \tau \in R_+^n$ маємо

$$\hat{U}_{\sigma+\tau} = F_A \circ (I_X \otimes U_{\sigma+\tau}) \circ F_A^{-1} =$$
$$= F_A \circ (I_X \otimes U_\sigma) \circ F_A^{-1} \circ F_A \circ (I_X \otimes U_\tau) \circ F_A^{-1} = \hat{U}_\sigma \circ \hat{U}_\tau,$$

і оператор $\hat{U}_0 = F_A \circ (I_X \otimes U_0) \circ F_A^{-1} = F_A \circ F_A^{-1}$ є одиничним над простором $\hat{G}(R_+^n, X)$.

Алгебраїчний ізоморфізм комутанта $[U_\sigma]^c$ на відповідну комутативну підалгебру цієї напівгрупи позначимо через

$$\hat{F}_A : \quad [U_\sigma]^c \ni U \to \hat{U} \in F_A \circ (I_X \otimes [U_\sigma]^c) \circ F_A^{-1}.$$

Теорема 4. *Відображення виду:*

$$\Phi : \quad G'(R_+^n) \ni f \to \hat{f}(A) \in L[\hat{G}(R_+^n, X)],$$

де лінійний оператор $\hat{f}(A)$ *визначається формулою*

$$\hat{f}(A) : \quad \hat{G}(R_+^n, X) \ni \hat{x} \to \hat{f}(A)\hat{x} := \int_{R_+^n} (U_s \otimes T_f) x(s) ds, \tag{3}$$

є неперервним ізоморфізмом згорткової алгебри ультрарозподілів Жевре на замкнену підалгебру алгебри $L[\hat{G}(R_+^n, X)]$ *вигляду*

$$\{[\hat{U}_\sigma]^c : \sigma \in R_+^n\}, \quad [\hat{U}_\sigma]^c := F_A \circ (I_X \otimes [U_\sigma]^c) \circ F_A^{-1}.$$

Зокрема,

$$\Phi(f * g) = \hat{f}(A) \circ \hat{g}(A), \quad f, g \in G'(R_+^n),$$

і оператор $\hat{\delta}(A)$ *розширюється до одиничного оператора* I_X *простору* X.

Доведення. Сконструйоване вище бієктивне відображення комутанта $[U_\sigma]^c$ на комутативну підалгебру $[\hat{U}_\sigma]^c$ вигляду

$$\hat{F}_A: \quad U \to \hat{U}, \quad \hat{U} = F_A \circ (I_X \otimes U) \circ F_A^{-1}$$

здійснює також алгебраїчний ізоморфізм. Відображення $M: G'(R_+^n) \to [U_\sigma]^c$ є алгебраїчним ізоморфізмом [3]. Отже, можна однозначно визначити алгебраїчний ізоморфізм $\Phi: G'(R_+^n) \to [\hat{U}_\sigma]^c$.

Оскільки $\Phi := \hat{F} \circ M: G'(R_+^n) \to [\hat{U}_\sigma]^c$ є композицією неперервних відображень, то воно є неперервним.

З формули (3) безпосередньо маємо, що $\Phi(f) = \hat{f}(A)$ для довільного ультрарозподілу $f \in G'(R_+^n)$. Далі, для $x(s) = x \otimes \varphi(s)$ за властивістю n-параметричних (C_0)-напівгруп операторів (див. [1, теор. 15.2.1]) отримуємо

$$[\Phi(f) \circ \Phi(g)]\hat{x} = \int_{R_+^n}\int_{R_+^n} U_{s+t}(T_f \circ T_g)\varphi(s+t)\,ds\,dt =$$

$$= \int_{R_+^n} U_p x T_{f*g}\varphi(p)\,dp = \Phi(f*g)\hat{x}.$$

Зокрема,

$$\Phi(\delta)\hat{x} = \int_{R_+^n} (U_s \otimes T_\delta) x(s)\,ds = \int_{R_+^n} U_s x \langle \delta(\sigma), \varphi(s+\sigma)\rangle ds =$$

$$= \int_{R_+^n} U_s x\varphi(s)\,ds = \int_{R_+^n} (U_s \otimes I_X) x(s)\,ds = \hat{x}.$$

Оскільки простір $G(R_+^n)$ ядерний, то за теоремою 1 довільний елемент $x \in G(R_+^n, X)$ можна розкласти в абсолютно збіжний ряд $x = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m x_m \otimes \varphi_m(s)$. Із абсолютної збіжності ряду випливатиме, що

$$[\Phi(f) \circ \Phi(g)]\hat{x} = \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m \int_{R_+^n} U_p x_m T_{f*g}\varphi_m(p)\,dp =$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \lambda_m \Phi(f*g) x_m \hat{\otimes} \varphi_m = \Phi(f*g)\hat{x}$$

для довільного елемента $x \in G(R_+^n, X)$, в силу неперервності оператора $\Phi(f*g)$ над простором $\hat{G}(R_+^n, X)$. Теорему доведено.

На просторі $G(R_+^n, X)$ ультрадиференційовних X-значних функцій $x(s) = x(s_1, \dots, s_n)$ на додатному n-вимірному конусі R_+^n визначаємо оператори частинного диференціювання $\partial_j^l x$, $(j = 1, \dots, n)$, $l \in \mathrm{N}$. У внутрішніх точках конуса це звичайне диференціювання, проте на межі конуса R_+^n − це односторонні внутрішні частинні похідні.

Теорема 5. *Для довільних* $f \in G'(R_+^n)$, $x \in G(R_+^n, X)$ *та* $l \in \mathrm{N}$ *виконується співвідношення*

$$\hat{f}(A)\hat{\partial}_j^l x = (iA_j)^l \hat{f}(A)\hat{x} - \sum_{k_j=0}^{l-1} (iA_j)^{l-k_j-1} \left\langle f, \partial_j^{k_j} x \right\rangle, \quad (j = 1, \ldots, n). \qquad (4)$$

Доведення. Для функції $x(s) = x \otimes \varphi(s)$ маємо

$$\hat{f}(A)\hat{\partial}_j^l x = \int_{R_+^n} (U_s \otimes T_f)\partial_j^l x(s)ds = \int_{R_+^n} U_s x \partial_j^l (T_f \varphi)(s)ds.$$

Використовуючи для останнього інтеграла формулу інтегрування частинами l разів, а також властивість

$$\partial_j^l (T_f \varphi)(0) = \partial_j^l \left\langle f(\sigma), \varphi(\sigma) \right\rangle = (-1)^l \left\langle \partial_j^l f(\sigma), \varphi(\sigma) \right\rangle = \left\langle f, \partial_j^l \varphi \right\rangle$$

і означення генератора n-параметричної (C_0)-напівгрупи, отримуємо формулу (4).

Щоб довести рівність (4) для довільних функцій x, знову скористаємось ядерністю простору $G(R_+^n)$ та теоремою 1. Тоді формула випливатиме з неперервності $\hat{f}(A)$ над простором $\hat{G}(R_+^n, X)$ і неперервності відображення F_A.

Література

1. Хилле Э. Функциональный анализ и полугруппы / Э. Хилле, Р. Филлипс. − М: Изд-во иностр. л-ры, 1962. − 830 с.
2. Лопушанський О.В. Про топологічний ізоморфізм алгебри розподілів з носіями в конусі комутанту напівгрупи зсувів / О.В. Лопушанський, А.В. Соломко, С.В. Шарин // Мат. методи та фіз.-мех. поля. − 2004. − Т.47. − №2. − С. 95-99.
3. Соломко А.В. Операторне зображення алгебри ультрарозподілів класу Жевре з носіями в додатному n-вимірному куті / А.В. Соломко // Карпатські математичні публікації. − 2009. − Т.1. − №2. − С. 197-207.
4. Lopushansky O.V. Vector-valued functional calculus for a convolution algebra of distributions on cone / O.V. Lopushansky, S.V. Sharyn, A.V. Solomko // Matematychni Studii. − 2011. − Vol.35. − №1. − P. 78-90.
5. Komatsu H. Ultradistributions I. Structure theorems and a characterization / H. Komatsu // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math. − 1973. − Vol.20. − P. 25-105.
6. Grothendieck A. Produits tensoriels topologiques et espaces nucleaires / A. Grothendieck // Mem. Amer. Math. Soc. − 1955. − Vol. 16. − №11. − P. 1-140.

7. Komatsu H. Ultradistributions III. Vector valued ultradistributions and the theory of kernels / H. Komatsu // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA Math. − 1981. − Vol.29. − P. 653-717.
8. Шефер Х. Топологические векторные пространства / Х.Шефер. − М: Мир, 1971. − 360 с.
9. Иосида К. Функциональный анализ / К. Иосида. − М: Мир, 1967. − 624 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 22.05.2015 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Заторським Р.А.,***
к.т.н., доцентом ***Малько О.Г.***

FOURIER-LAPLACE OPERATOR TRANSFORMATION FOR A CONVOLUTION ALGEBRA OF GEVREY ULTRADISTRIBUTIONS

O. V. Lopushansky[1], A. V. Solomko[2]
[1]Rzeszow University, Poland;35-959, Rzeszow, al. Rejtana, 16c;
e-mail: ovlopushansky@yahoo.com
[2]Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76025, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
e-mail: ansolvas@gmail.com

A vector analogue of operator calculus for generators of strongly continuous n-parametric semigroups of operators in the convolution algebra of Gevrey ultradistributions with supports in the positive n-dimensional cone is constructed. The theorem about representation of convolution Gevrey algebra of ultradistributions as commutant of the n-parametric (C_0)-semigroup of shifts is proved.

Key words: *ultradifferentiable function, Gevrey ultradistribution, strongly continuous semigroup of operators, commutant of semigroups, operator calculus.*