УДК 517.98

ПРО ПРОСТОРИ (p,q)-ЛІНІЙНИХ І (p,q)-ОДНОРІДНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ МІЖ КОМПЛЕКСНИМИ ЛІНІЙНИМИ ПРОСТОРАМИ

Т. В. Василишин

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; 76018, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
e-mail: taras_vasylyshyn@mail.ru

Показано, що простір (p,q)-лінійних відображень між комплексними лінійними просторами є власним підпростором простору (p,q)-однорідних відносно сукупності аргументів $(p+q)$-лінійних в дійсному сенсі відображень . Побудовано проектор з простору (p,q)-однорідних відносно сукупності аргументів $(p+q)$-лінійних в дійсному сенсі відображень на простір (p,q)-лінійних відображень.

Ключові слова: *(p,q)-лінійне відображення, (p,q)-однорідне відображення, проектор.*

1. Попередні відомості

Для лінійних просторів E і F над тим самим полем позначимо $L({}^n E,F)$ простір всіх відображень з E^n в F, які є лінійними відносно кожного зі своїх n аргументів (так званих n-лінійних відображень). Для зручності також будемо вважати, що $L({}^0 E,F)=F$.

Для комплексного лінійного простору X будемо позначати X_R простір із дійсною структурою. Простір X_R відрізняється від простору X тим, що в X_R не дозволено множення на скаляри з ненульовою уявною частиною.

Нехай X і Y – комплексні лінійні простори, p і q – цілі невід'ємні числа. Будемо позначати $L({}^{p,q} X,Y)$ простір всіх відображень $f\in L({}^{p+q} X_R,Y_R)$ таких, що $f(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_{p+q})=\lambda^p\overline{\lambda}^q f(x_1,\ldots,x_{p+q})$ для всіх комплексних λ і для всіх $x_1,\ldots,x_{p+q}\in X.$ Назвемо елементи простору $L({}^{p,q} X,Y)$ (p,q)-однорідними відносно сукупності аргументів $(p+q)$-лінійними в дійсному сенсі відображеннями.

В [1, теорема 1.15] доведено, що простір $L({}^n X_R,Y_R)$ є прямою сумою підпросторів $L({}^{k,n-k} X,Y)$, де k змінюється від 0 до n. З іншого боку, дослідженими є деякі властивості так званих (p,q)-лінійних відображень [2, 3], які є елементами вищезгаданих підпросторів.

Відображення $f: X^{p+q} \to Y$ називають (p,q)-лінійним відображенням, якщо f є лінійним відносно перших p аргументів і антилінійним відносно решти q аргументів. Простір всіх (p,q)-лінійних відображень з X^{p+q} в Y позначимо $\widetilde{L}({}^{p,q}X,Y)$. Як не складно переконатись, простір $\widetilde{L}({}^{p,q}X,Y)$ є підпростором $L({}^{p,q}X,Y)$. У розділі 2 даної роботи показано, що $\widetilde{L}({}^{p,q}X,Y)$ є власним підпростором в $L({}^{p,q}X,Y)$.і побудовано проектор з $L({}^{p,q}X,Y)$ на $\widetilde{L}({}^{p,q}X,Y)$.

2. Основні результати

Нехай p і q – натуральні числа. Побудуємо відображення f, яке належить простору $L({}^{p,q}X,Y)$, але не належить $\widetilde{L}({}^{p,q}X,Y)$. Нехай e – деякий ненульовий елемент простору X. Доповнимо його до базису Гамеля простору X елементами $\{e_\alpha\}_{\alpha\in\mathrm{A}}$, де A – деяка індексна множина. Відомо, що кожен елемент $x \in X$ можна єдиним чином подати у вигляді $ce + \sum\limits_{\alpha\in\mathrm{A}} c_\alpha e_\alpha$, де c, c_α – комплексні числа, і при цьому тільки скінченна кількість чисел c_α не дорівнює нулю. Визначимо оператор $\kappa : X \to C$, який кожному елементу x ставить у відповідність число c. Нехай y – деякий ненульовий елемент простору Y.

Визначимо $f : X^{p+q} \to Y$,

$$f(x_1,\ldots,x_{p+q}) = \mathrm{Re}(\kappa(x_1)\overline{\kappa(x_{p+1})})\kappa(x_2)\ldots\kappa(x_p)\overline{\kappa(x_{p+2})}\ldots\overline{\kappa(x_{p+q})}y.$$

Можна перевірити, що $f \in L({}^{p,q}X,Y)$. Але $f(ie,e,\ldots,e) = 0$, а $f(e,e,\ldots,e) = y$, тому f не є ні лінійним, ні антилінійним відносно першого аргументу. Отже, $f \notin \widetilde{L}({}^{p,q}X,Y)$.

Побудуємо проектор $P : L({}^{p,q}X,Y) \to \widetilde{L}({}^{p,q}X,Y)$. Нехай $S = \{1,i\}$. Для $g \in L({}^{p,q}X,Y)$ покладемо

$$P(g)(x_1,\ldots,x_{p+q}) = \frac{1}{2^{p+q}} \sum_{(r_1,\ldots,r_{p+q})\in S^{p+q}} \overline{r_1\ldots r_p} r_{p+1}\ldots r_{p+q} g(r_1x_1,\ldots,r_{p+q}x_{p+q}).$$

Теорема 1. *Для кожного* $g \in L({}^{p,q}X,Y)$ *відображення* $P(g)$ *є* (p,q)*-лінійним.*

Доведення. Адитивність $P(g)$ відносно кожного аргументу випливає із адитивності відносно кожного аргументу відображення g. Покажемо однорідність $P(g)$ відносно перших p аргументів і антиоднорідність відносно решти q аргументів. Нехай $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$, де λ_1, λ_2 – дійсні числа. Нехай $j \in \{1,\ldots,p\}$. Тоді

$$P(g)(x_1,\ldots,\lambda x_j,\ldots,x_{p+q})=\frac{1}{2^{p+q}}\sum_{(r_1,\ldots,r_{j-1},r_{j+1},\ldots,r_{p+q})\in S^{p+q-1}}\overline{r_1\ldots r_{j-1}r_{j+1}\ldots r_p}r_{p+1}\ldots r_{p+q}\times$$

$$\times[g(r_1x_1,\ldots,\lambda x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})-ig(r_1x_1,\ldots,i\lambda x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})].$$

Спростимо вираз у квадратних дужках:

$$g(r_1x_1,\ldots,\lambda x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})-ig(r_1x_1,\ldots,i\lambda x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})=$$
$$=g(r_1x_1,\ldots,\lambda_1x_j+i\lambda_2x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})-ig(r_1x_1,\ldots,i\lambda_1x_j-\lambda_2x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})=$$
$$=\lambda_1g(r_1x_1,\ldots,x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})+\lambda_2g(r_1x_1,\ldots,ix_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})-$$
$$-i\lambda_1g(r_1x_1,\ldots,ix_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})+i\lambda_2g(r_1x_1,\ldots,x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})=$$
$$=(\lambda_1+i\lambda_2)g(r_1x_1,\ldots,x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})-i(\lambda_1+i\lambda_2)g(r_1x_1,\ldots,ix_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})=$$
$$=\lambda(g(r_1x_1,\ldots,x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})-ig(r_1x_1,\ldots,ix_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q}))=$$
$$=\lambda\sum_{r_j\in S}\overline{r_j}g(r_1x_1,\ldots,r_jx_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q}).$$

Тому

$$P(g)(x_1,\ldots,\lambda x_j,\ldots,x_{p+q})=\lambda\frac{1}{2^{p+q}}\sum_{(r_1,\ldots,r_{j-1},r_j,r_{j+1},\ldots,r_{p+q})\in S^{p+q}}\overline{r_1\ldots r_{j-1}r_jr_{j+1}\ldots r_p}r_{p+1}\ldots r_{p+q}\times$$

$$\times g(r_1x_1,\ldots,r_jx_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})=\lambda P(g)(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_{p+q}).$$

Отже, відображення $P(g)$ є однорідним відносно перших p аргументів.

Нехай тепер $j\in\{p+1,\ldots,p+q\}$. Тоді

$$P(g)(x_1,\ldots,\lambda x_j,\ldots,x_{p+q})=\frac{1}{2^{p+q}}\sum_{(r_1,\ldots,r_{j-1},r_{j+1},\ldots,r_{p+q})\in S^{p+q-1}}\overline{r_1\ldots r_p}r_{p+1}\ldots r_{j-1}r_{j+1}\ldots r_{p+q}\times$$

$$\times[g(r_1x_1,\ldots,\lambda x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})+ig(r_1x_1,\ldots,i\lambda x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})].$$

Спростимо вираз у квадратних дужках:

$$g(r_1x_1,\ldots,\lambda x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})+ig(r_1x_1,\ldots,i\lambda x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})=$$
$$=g(r_1x_1,\ldots,\lambda_1x_j+i\lambda_2x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})+ig(r_1x_1,\ldots,i\lambda_1x_j-\lambda_2x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})=$$
$$=\lambda_1g(r_1x_1,\ldots,x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})+\lambda_2g(r_1x_1,\ldots,ix_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})+$$
$$+i\lambda_1g(r_1x_1,\ldots,ix_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})-i\lambda_2g(r_1x_1,\ldots,x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})=$$
$$=(\lambda_1-i\lambda_2)g(r_1x_1,\ldots,x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})+i(\lambda_1-i\lambda_2)g(r_1x_1,\ldots,ix_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})=$$
$$=\overline{\lambda}(g(r_1x_1,\ldots,x_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})+ig(r_1x_1,\ldots,ix_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q}))=$$
$$=\overline{\lambda}\sum_{r_j\in S}r_jg(r_1x_1,\ldots,r_jx_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q}).$$

Тому

$$P(g)(x_1,\ldots,\lambda x_j,\ldots,x_{p+q})=\overline{\lambda}\frac{1}{2^{p+q}}\sum_{(r_1,\ldots,r_{j-1},r_j,r_{j+1},\ldots,r_{p+q})\in S^{p+q}}\overline{r_1\ldots r_p}r_{p+1}\ldots r_{j-1}r_jr_{j+1}\ldots r_{p+q}\times$$

$$\times g(r_1x_1,\ldots,r_jx_j,\ldots,r_{p+q}x_{p+q})=\overline{\lambda}P(g)(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_{p+q}).$$

Отже, відображення $P(g)$ є антиоднорідним відносно останніх q аргументів. Теорему доведено.

Як не складно перевірити, звуження P на простір $\widetilde{L}(^{p,q}X, Y)$ є тотожним відображенням. Тому P є проектором.

Література

1. Mujica J. Complex Analysis in Banach Spaces / J. Mujica // North-Holland, Amsterdam, New York, Oxford. – 1986. – 447 p.
2. Vasylyshyn T.V. Polarization formula for (p,q)-polynomials on a complex normed space / T.V. Vasylyshyn, A.V. Zagorodnyuk // Methods of Functional Analysis and Topology. – 2011. – V.17, №1. – P. 75-83.
3. Василишин Т.В. Поляризаційна формула та поляризаційна нерівність для (p,q)-лінійних відображень / Т.В. Василишин, А.В. Загороднюк // Карпат. мат. публ. – 2009. – Т.1, №2. – С. 128-144.

Стаття надійшла до редакційної колегії 8.04.2015 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,***
к.ф.-м.н., доцентом ***Бандурою А.І.***

ON THE SPACES OF (p,q)-LINEAR AND OF (p,q)-HOMOGENEOUS MAPPINGS BETWEEN COMPLEX LINEAR SPACES

T. V. Vasylyshyn
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
e-mail: taras_vasylyshyn@mail.ru

We show that the space of (p,q)-linear mappings between complex linear spaces is a proper subspace of the space of (p,q)-homogeneous with respect to the collection of arguments and $(p+q)$-linear in the real sense mappings. Also we construct a projector from the space of (p,q)-homogeneous with respect to the collection of arguments and $(p+q)$-linear in the real sense mappings onto the space of (p,q)-linear mappings.

Key words: *(p,q)-linear mapping, (p,q)-homogeneous mapping, projector.*