УДК 517.53

РОЗПОДІЛ ЗНАЧЕНЬ АЛГЕБРОЇДНИХ ФУНКЦІЙ

Я. І. Савчук

Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу; 76019, м. Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15; тел. +380 (342) 72-71-31; e-mail: math@nung. edu. ua

Описується зв'язок розподілу дефектних значень алгеброїдної функції з асоційованою з нею цілою кривою.

Ключові слова: *алгеброїдна функція, ціла крива, дефектне значення, мероморфна функція, величина дефекта.*

Розглянемо цілі функції $g_0(z), g_1(z), \dots, g_n(z)$, причому $g_0(z)\not\equiv 0$, $g_n(z)\not\equiv 0$. Вважатимемо, що цілі функції $g_k(z)$ не мають спільних нулів і хоча б дві функції $g_k(z), g_m(z)$ лінійно незалежні. Нагадаємо (див. [1], [2]), що n-значна алгеброїдна функція $w = f(z)$ визначається рівнянням

$$g_n(z)w^n + g_{n-1}(z)w^{n-1} + \dots + g_0(z) = 0, \tag{1}$$

де многочлен

$$F(z,w) = g_n(z)w^n + g_{n-1}(z)w^{n-1} + \dots + g_0(z) \tag{2}$$

є незвідним, тобто не існує його розкладу на співмножники виду (2) степеня меншого ніж n.

Обмежимось розглядом трансцендентних мероморфних функцій, тобто таких, для яких хоча б одне із співвідношень $g_k(z)/g_m(z)$ є трансцендентною мероморфною при $z \neq \infty$ функцією.

Нехай $f_\nu(z)$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, для кожного z означає значення алгеброїдної функції $f(z)$. Для кожного комплексного числа a покладемо

$$m(r,a,f) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \ln^+ \frac{1}{\left|f_\nu\left(re^{i\varphi}\right) - a\right|} \right\} d\varphi, \text{ якщо } a \neq \infty, \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{\nu=1}^{n} \ln^+ \left|f_\nu\left(re^{i\varphi}\right)\right| \right\} d\varphi, \text{ якщо } a = \infty. \end{cases}$$

Характеристична функція $T(r,f)$ визначається [1]

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \max_k \left\{ \ln \left\| g_k\left(re^{i\varphi}\right) \right\| \right\} d\varphi.$$

Величини дефектів в розумінні Р. Неванлінни $\delta(a,f)$ і в розумінні Ж. Валірона $\Delta(a,f)$ відносно числа a визначаються відповідно

$$\delta(a,f)=\varliminf_{r\to\infty}\frac{m(r,a,f)}{T(r,f)} \text{ та } \Delta(a,f)=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{m(r,a,f)}{T(r,f)}.$$

$D(f)=\{a:\delta(a,f)>0\}$ називається множиною дефектних значень $f(z)$ в розумінні Р. Неванлінни, а $V(f)=\{a:\Delta(a,f)>0\}$ називається множиною дефектних значень $f(z)$ в розумінні Ж. Валірона.

Разом з n-значною алгеброїдною функцією $f(z)$, яка визначається рівнянням (1), розглянемо $(n+1)$-вимірну цілу криву $\vec{G}_f(z)=(g_0(z),g_1(z),\ \dots,g_n(z))$, яку назвемо кривою, асоційованою з алгеброїдною функцією $f(z)$.

Розглянемо $\vec{a}(w)=(1,w,w^2,\dots,w^n)$, якщо $w\neq\infty$ – довільне комплексне число; $\vec{a}(w)=(0,0,\dots,0,1)$, якщо $w=\infty$.

Основний результат про зв`язок між ростом n-значної алгеброїдної функції $f(z)$ і $(n+1)$-вимірної цілої кривої $\vec{G}_f(z)$ дає наступна [3]

Теорема A. *Для довільних фіксованих значень* z та w *мають місце такі співвідношення:*

а) якщо w *– довільне скінченне комплексне число, то*

$$\sum_{\nu=1}^{n}\ln^+\frac{1}{|f_\nu(z)-w|}=\ln\frac{\|\vec{G}_f(z)\|\cdot\|\vec{a}(w)\|}{|\vec{G}_f(z)\cdot\vec{a}(w)|}+Q(z,w), \text{ де}$$

$$|Q(z,w)|\le 2n\ln(1+|w|)+2(n+1)^2;$$

б) якщо $w=\infty$, *то* $\sum_{\nu=1}^{n}\ln^+|f_\nu(z)|=\ln\|\vec{G}_f(z)\|-\ln|g_n(z)|+Q(z)$, де $|Q(z)|\le n^3$.

З цієї теореми та [4] отримуємо таке твердження.

Теорема. *Для кожної* n*-значної алгеброїдної функції* $f(z)$ *множина дефектних значень* $D(f)$ *не більше ніж зліченна і величини дефектів* $f(z)$ *задовольняють співвідношенню*

$$\sum_{a\in\mathbf{C}}\delta(a,f)\le(n+1-\omega)(\omega+1),$$

якщо коефіцієнти $\{g_k(z)\}_{k=0}^{n}$ *рівняння (1), що визначає* $f(z)$, ω*-лінійно залежні (див.* [4]*).*

Зокрема, якщо всі коефіцієнти рівняння (1) лінійно незалежні, то $\sum_{a\in \boldsymbol{C}}\delta\left(a,f\right)\leq n+1$.

Точність цієї теореми характеризує такий приклад. Нехай $f\left(z\right)$ – алгеброїдна функція, яка визначається рівнянням $w^n\left(e^z-1\right)+2-e^z=0$. Асоційована з нею ціла крива має вигляд $\vec{G}_f\left(z\right)=\left(2-e^z,0,\ldots,e^z-1\right)$. Як бачимо, в даному випадку $\omega=n-1$. Множина дефектних значень $f\left(z\right)$ складається із $2n$ точок виду $\xi_k=exp\dfrac{2k\pi i}{n}$ та $z_k=2^{n-1}exp\dfrac{2k\pi i}{n}$, де $k=0,1,\ldots,n-1$. При цьому для всіх цих k виконується $\delta\left(\xi_k,f\right)=\delta\left(z_k,f\right)=1$, отже, $\sum_{a\in \boldsymbol{C}}\delta\left(a,f\right)=2n=\left(n+1-\omega\right)\left(\omega+1\right)$.

Література

1. Cartan H. Sur les zeros des combinaisons line`aires de p fonctions holomorphes donnees / H. Cartan. – Mathematika, 1933. – 7. – P. 5-33.
2. Петренко В.П. Целые кривые / В.П. Петренко. – Ч.: Вища школа, 1984. – 136 с.
3. Фаворов С.Ю. Об одном свойсте целых кривих / С.Ю. Фаворов // Функц. анализ и их прил. – 1975. – **9**, вып. 1. – С. 87-88.
4. Савчук Я.І. Структура множини неванліннівських дефектних векторів для цілих кривих з лінійно залежними компонентами / Я.І. Савчук // Прик. Вісник НТШ, Число. – 2013. – 1(21). – С. 26-32.

Стаття надійшла до редакційної колегії 22.05.2015 р.
*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором **Загороднюком А.В.**, д.ф.-м.н., професором **Скасківим О.Б.** (м. Львів)*

DISTRIBUTING OF VALUES OF ALGEBROID FUNCTIONS

Y. I. Savchuk
Ivano-Frankivs'k national technical university of oil and gas;
76019, Ivano-Frankivs'k, Karpats'ka str., 15;
ph. +380 (3422) 72-71-31; e-mail: math@nung. edu. ua

Communication of distributing of imperfect values of algebroid function with the whole curve associated with her is described.

Key words: *algebroid function, whole curve, imperfect value, meromorf function, size of defect.*