МАТЕМАТИКА ТА МЕХАНІКА

Математичний аналіз

УДК 517.51

ПРО ЛІНІЙНУ ІНТЕРПОЛЯЦЮ ВЕКТОРНОЗНАЧНИХ ФУНКЦІЙ, ЯКА ЗБЕРІГАЄ ЗВУЖЕННЯ

Г. А. Волошин[1,2], В. К. Маслюченко[1]
[1]Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича;
58012, м. Чернівці, вул. Коцюбинського, 2;
e-mail: vmaslyuchenko@gmail.com
[2]Буковинський державний фінансово-економічний університет;
58012, м. Чернівці, вул. Штерна, 1; e-mail: galja.vlshin@gmail.com

Доведено загальну теорему про апроксимацію векторнозначних функцій з допомогою їх лінійної інтерполяції, яка зберігає звуження. Спираючись на неї, встановлено, що кожна нарізно неперервна функція $f : X \times Y \to \mathbf{R}$, яка задана на добутку відрізка $X = [a,b]$ і компактного простору Y, належить до секвенціального замикання простору $C(X \times Y)$ сукупно неперервних функцій у просторі $S(X \times Y)$ нарізно неперервних функцій з топологією пошарово рівномірної збіжності, якщо звуження $f|_{E\times Y}$ неперервне, де E − це проекція $pr_X(D(f))$ множини точок розриву функції f на вісь X.

Ключові слова: *нарізно і сукупно неперервні функції, секвенціальне замикання, лінійна інтерполяція, яка зберігає звуження, топологія пошарово рівномірної збіжності.*

1. Вступ.

В останні роки у серії праць [1-4] для компактних просторів X і Y вивчався локально опуклий простір $S = S(X \times Y) = CC(X \times Y)$ всіх нарізно неперервних функцій $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ з топологією T пошарово рівномірної збіжності, що породжується сукупністю $\mathsf{N}(X,Y)$ передінорм

$$\|f\|^x = \|f^x\|_\infty,\quad x \in X,\quad \|f\|_y = \|f_y\|_\infty,\quad y \in Y,$$

де $f^x = f(x,\cdot)$, $f_y = f(\cdot,y)$ і $\|g\|_\infty = \max_{t\in T} |g(t)|$ − рівномірна норма на просторі $C(T)$ всіх неперервних функцій $g: T \to \mathbf{R}$, заданих на компактному просторі T. Основна проблема, що тут досліджується, полягає в тому, щоб знайти опис секвенціального замикання $\overline{C}^s$ простору $C = C(X \times Y)$ усіх сукупно неперервних функцій $f: X \times Y \to \mathbf{R}$ у просторі S. Зокрема, навіть у випадку $X = Y = [0,1]$ невідомо, чи $\overline{C}^s = S$. Ця проблема виникла в процесі розвитку досліджень пошарово рівномірної апроксимації нарізно неперервних функцій, які були проведені в працях [5-9].

У праці [2] у випадку $X = Y = [0,1]$ вивчалися класи нарізно неперервних функцій $f: [0,1]^2 \to \mathbf{R}$, які входять у $\overline{C}^s$. Там було показано [2, с. 151, теорема 8.4], що кожна функція $f \in S$, у якої проекція $pr_X(D(f))$ на вісь абсцис множини $D(f)$ точок її розриву не більш, ніж злічення, належить до $\overline{C}^s$. Крім того, було з’ясовано [2, с. 155, теорема 9.4], що коли у функції $f \in S$ звуження $f|_{E\times Y}$, де $E = pr_X(D(f))$ і $X = Y = [0,1]$, неперервне, то $f \in \overline{C}^s$. Ці два результати були отримані методом лінійної інтерполяції, який застосував ще А. Лебеґ у своїй піонерній праці [10] при дослідженні берівської класифікації нарізно неперервних функцій.

У праці [3] застосований у [2] метод лінійної інтерполяції був перенесений на векторнозначні функції і з допомогою нього теорема 8.4 з [2] була узагальнена на випадок нарізно неперервних відображень $f: X \times Y \to \mathbf{R}$, де $X = [a,b]$ і Y − довільний компактний простір.

Теорема 9.4 з [2] була доведена з допомогою лінійної інтерполяції, яка зберігає звуження. Постало природне питання: чи переноситься і цей метод на векторнозначні функції? Тут ми здійснюємо таке перенесення, отримуємо загальну теорему про апроксимацію векторнозначних функцій з допомогою їх лінійної інтерполяції, яка зберігає звуження, і застосовуємо її для узагальнення теореми 9.4 з [2] на випадок, коли $X = [a,b]$, а Y − довільний компактний простір.

2. Лінійна інтерполяція зі збереженням звуження.

Нехай F − замкнена підмножина відрізка $X = [a,b]$, для якої $\{a,b\} \subseteq F \neq X$, і $G = X \setminus F$. Ясно, що $G \neq \varnothing$, причому $G = (a,b) \setminus F$, тому G − це відкрита множина в $\mathbf{R}$. Як добре відомо [11, с.135], існує диз’юнктна сім’я інтервалів $I_m = (\alpha_m, \beta_m)$, де m пробігає множину M, для якої $M = \overline{\{1,l\}} = \{1,\ldots,l\}$ для деякого $l \in \mathbb{N}$ або $M = \mathbb{N}$, така, що

$G=\coprod_{m\in M} I_m$. При цьому кінці α_m і β_m інтервалів суміжності множини F входять у цю множину.

Нехай Z − дійсний векторний простір. Кожній функції $g:X\to Z$ поставимо у відповідність функцію $h=L_F g:X\to Z$, яка визначається так: $h(x)=g(x)$, якщо $x\in F$, і

$$h(x)=g(\alpha_m)+\frac{g(\beta_m)-g(\alpha_m)}{\beta_m-\alpha_m}(x-\alpha_m),$$

якщо $x\in I_m$, а $m\in M$. Таким чином, $h|_F=g|_F$ і $h|_{\overline{I}_m}$ − це лінійна функція на $\overline{I}_m=[\alpha_m,\beta_m]$, для якої $h(\alpha_m)=g(\alpha_m)$ і $h(\beta_m)=g(\beta_m)$ для кожного $m\in M$. Кажуть, що функція $h=L_F g$ отримується з функції g *методом лінійної інтерполяції* L_F*, яка зберігає звуження на множину* F.

Позначимо символом $C(X,Z)$ простір всіх неперервних відображень $g:X\to Z$ з топологічного простору X у топологічний простір Z.

Теорема 1. Нехай $X=[a,b]$, Z − топологічний векторний простір (коротко: ТВП) і $g\in C(X,Z)$. Тоді і $h=L_F g\in C(X,Z)$, причому $h|_F=g|_F$.

Доведення. Нехай $M=\overline{1,l}$. Всі множини F, $\overline{I}_1,\ldots,\overline{I}_l$ замкнені, $X=F\cup\overline{I}_1\cup\ldots\cup\overline{I}_l$, причому всі звуження $h|_F=g|_F$ і $h|_{\overline{I}_m}$, де $m\in M$ неперервні, адже для $x\in\overline{I}_m$

$$h(x)=\lambda_m(x)g(\alpha_m)+\mu_m(x)g(\beta_m),$$

де $\lambda_m(x)=\dfrac{\beta_m-x}{\beta_m-\alpha_m}$ і $\mu_m(x)=\dfrac{x-\alpha_m}{\beta_m-\alpha_m}$ − неперервні функції, і операції в ТВП Z неперервні. Звідси негайно випливає, що і саме відображення $h:X\to Z$ неперервне.

Припустимо, що $M=\mathbb{N}$. Оскільки всі звуження $h|_{I_m}$ на відкриті інтервали I_m неперервні, то функція h неперервна в кожній точці відкритої множини $G=\coprod_{m=1}^{\infty} I_m$.

Нехай $x_0\in F=X\setminus G$. Доведемо, що функція h неперервна в точці x_0. Розглянемо довільний окіл нуля W в ТВП Z. Існує такий заокруглений окіл нуля W_0 в Z, що $W_0+W_0\subseteq W$ [12, с.15]. З рівномірної неперервності функції g отримуємо, що існує таке $\delta>0$, що для будь-яких x' і x'' з X з нерівності $|x'-x''|<\delta$ випливає, що $g(x')-g(x'')\in W_0$. Зрозуміло, що $|I_m|=\beta_m-\alpha_m\to 0$ при $m\to\infty$, отже, існує такий номер

m_0, що $|I_m|<\frac{\delta}{2}$, як тільки $m>m_0$. Для замкненої множини $F_0=F\bigcup\bigcup_{m=1}^{m_0}\bar{I}_m$ звуження $h|_{F_0}$ неперервне, бо всі звуження $h|_F$, $h|_{\bar{I}_m}$ неперервні. Тому існує таке $\delta_0\in(0,\frac{\delta}{2})$, що

$$h(x)-h(x_0)\in W, \text{ як тільки } |x-x_0|<\delta_0 \ i\ x\in F_0.$$

Припустимо, що $x\in X\setminus F_0$ і $|x-x_0|<\delta_0$. Тоді існує таке $m>m_0$, що $\alpha_m<x<\beta_m$. В такому разі

$$\beta_m=x+\beta_m-x<x+\beta_m-\alpha_m<x_0+\delta_0+\frac{\delta}{2}<x_0+\delta,$$

і
$$\alpha_m=x-(x-\alpha_m)>x-(\beta_m-\alpha_m)>x_0-\delta_0-\frac{\delta}{2}>x_0-\delta.$$

Отже, $|\beta_m-x_0|<\delta$ і $|\alpha_m-x_0|<\delta$. Тому $g(\beta_m)-g(x_0)\in W_0$ і $g(\alpha_m)-g(x_0)\in W_0$. Оскільки $h(x_0)=g(x_0)$, адже $x_0\in F$ і $\lambda_m(x)+\mu_m(x)=1$, то

$$\begin{aligned}h(x)-h(x_0)&=\lambda_m(x)g(\alpha_m)+\mu_m(x)g(\beta_m)-\lambda_m(x)g(x_0)+\mu_m(x)g(x_0)=\\&=\lambda_m(x)(g(\alpha_m)-g(x_0))+\mu_m(x)(g(\beta_m)-g(x_0))\in\lambda_m(x)W_0+\mu_m(x)W_0\subseteq\\&\subseteq W_0+W_0\subseteq W.\end{aligned}$$

Тут ми скористалися тим, що множина W_0 заокруглена і $0\le\lambda_m(x),\mu_m(x)\le 1$. Таким чином, і тут $h(x)-h(x_0)\in W$, що і доводить неперервність функції h у точці x_0.

3. Лема про максимальну довжину інтервалів суміжності.

Зауважимо, що серед довжин $|I_m|=\beta_m-\alpha_m$ інтервалів суміжності $I_m=(\alpha_m,\beta_m)$ множини F завжди знайдеться найбільша. Це ясно, коли множина M скінченна. Якщо ж $M=\mathrm{N}$, то $|I_m|\to 0$, адже $\sum_{m=1}^{\infty}|I_m|\le b-a$, а нескінченно мала послідовність додатних чисел завжди має найбільший елемент. Позначимо максимальну довжину інтервалів суміжності замкненої множини F символом λ_F. Нам буде потрібна одна лема [2, лема 9.2, с. 153], яку ми тут сформулюємо.

Лема 1. Нехай F − замкнена підмножина відрізка $X=[a,b]$, для якої $\{a,b\}\subseteq F\neq X$, $A=\{a_n:n\in\mathrm{N}\}$ − щільна в доповненні $G=X\setminus F$ підмножина G, для якої $a_k\neq a_j$ при $k\neq j$, $A_n=\{a_1,\ldots,a_n\}$ і $F_n=F\cup A_n$. Тоді $\lambda_{F_n}\to 0$ при $n\to\infty$.

4. Апроксимаційна теорема для векторнозначних функцій.

Тут ми подамо апроксимаційну теорему для векторнозначних функцій, що отримується методом лінійної інтерполяції, яка зберігає звуження. Вона є розвитком теореми 9.3 з праці [2].

Теорема 2. Нехай $X=[a,b]$, F − замкнена підмножина X, така, що $\{a,b\}\subseteq F\neq X$, $A=\{a_n : n\in \mathbb{N}\}$ − щільна в доповненні $G=X\setminus F$ підмножина G, для якої $a_k\neq a_j$ при $k\neq j$, $A_n=\{a_1,\dots,a_n\}$ і $F_n=F\cup A_n$, Z − ТВП над полем $\mathbf{R}$, $g:X\to Z$ − відображення і $h_n=L_{F_n}g$. Тоді $h_n|_F=g|_F$ для кожного n і

а) якщо функція g неперервна, то і всі функції h_n неперервні і h_n рівномірно прямує до g на X;

б) якщо функція g неперервна в точці x_0 з X, то $h_n(x_0)\to g(x_0)$ в Z.

Доведення. а) Нехай $g:X\to Z$ неперервна функція. Тоді функції $h_n=L_{F_n}g$ будуть неперервними за теоремою 1, причому $h_n|_{F_n}=g|_{F_n}$ за побудовою, отже, і $h_n|_F=g|_F$, адже $F\subseteq F_n$.

Нехай W − окіл нуля в Z і W_0 − такий заокруглений окіл нуля в Z, $W_0+W_0\subseteq W$. З рівномірної неперервності функції g випливає, що існує таке $\delta>0$, що $g(x')-g(x'')\in W_0$ як тільки $|x'-x''|<\delta$ і x', $x''\in X$. З леми 1 випливає, що існує такий номер N, що $\lambda_{F_n}<\delta$, як тільки $n\geq N$.

Нехай $x\in X$ і $n\geq N$. Якщо $x\in F_n$, то $h_n(x)=g(x)$ і $h_n(x)-g(x)=0\in W$. Нехай $x\in G_n=X\setminus F_n$, а I_n − система всіх складових інтервалів відкритої множини G_n. Тоді існує такий $I=(\alpha,\beta)\in \mathsf{I}_n$, що $\alpha<x<\beta$. При цьому $\{\alpha,\beta\}\subseteq F_n$ і $|I|=\beta-\alpha\leq\lambda_{F_n}<\delta$. В такому разі $|\alpha-x|\leq|I|<\delta$ і $|\beta-x|\leq|I|<\delta$. Тому $g(\alpha)-g(x)\in W_0$ і $g(\beta)-g(x)\in W_0$. Нехай $\lambda(x)=\dfrac{\beta-x}{\beta-\alpha}$ і $\mu(x)=\dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$. Тоді $0\leq\lambda(x)$, $\mu(x)\leq 1$, $\lambda(x)+\mu(x)=1$ і $h_n(x)=\lambda(x)g(\alpha)+\mu(x)g(\beta)$. Отже,

$$h_n(x)-g(x)=\lambda(x)(g(\alpha)-g(x))+\mu(x)(g(\beta)-g(x))\in\lambda(x)W_0+\mu(x)W_0\subseteq$$
$$\subseteq W_0+W_0\subseteq W,$$

оскільки $\lambda(x)W_0\subseteq W_0$ і $\mu(x)W_0\subseteq W_0$, адже W_0 − заокруглена множина.

Таким чином, $h_n(x)-g(x)\in W$ при $n\geq N$ для довільних $x\in X$, причому номер N не залежить від x. Це і означає, що послідовність функцій h_n рівномірно збігається до g на X.

б) Нехай функція g неперервна в точці x_0 з X, а W і W_0 − такі ж як і в доведенні твердження а). З неперервності функції g в точці x_0 випливає, що існує таке $\delta > 0$, що $g(x) - g(x_0) \in W_0$, як тільки $|x - x_0| < \delta$ і $x \in X$. На основі леми 1 виберемо такий номер N, що $\lambda_{F_n} < \delta$, як тільки $n \geq N$.

Нехай $n \geq N$. Якщо $x_0 \in F_n$, то $h_n(x_0) = g(x_0)$, отже, $h_n(x_0) - g(x_0) = 0 \in W$. Якщо ж $x_0 \in G_n = X \setminus F_n$, то існує такий складовий інтервал $I = (\alpha, \beta)$ відкритої множини G_n, що $\alpha < x_0 < \beta$. Як і раніше $\{\alpha, \beta\} \subseteq F_n$ і $|I| = \beta - \alpha \leq \lambda_{F_n} < \delta$, а тому $|\alpha - x_0| < \delta$, $|\beta - x_0| < \delta$, а значить $g(\alpha) - g(x_0) \in W_0$ і $g(\beta) - g(x_0) \in W_0$. Використовуючи позначення доведення твердження а), будемо мати

$$h_n(x_0) - g(x_0) = \lambda(x_0)(g(\alpha) - g(x_0)) + \mu(x_0)(g(\beta) - g(x_0)) \in \lambda(x_0)W_0 + \\ + \mu(x_0)W_0 \subseteq W_0 + W_0 \subseteq W.$$

Таким чином, $h_n(x_0) - g(x_0) \in W$ при $n \geq N$, отже, $h_n(x_0) \to g(x_0)$ у просторі Z.

5. Апроксимація нарізно неперервних функцій.

Тепер ми дамо застосування теореми 2 до наближення нарізно неперервних функцій. Наступний результат узагальнює теорему 9.4 з [2].

Теорема 3. Нехай $X = [a,b]$, Y − компактний простір, $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ − нарізно неперервна функція, $E = pr_X(D(f))$, звуження $f|_{E \times Y} : E \times Y \to \overline{\mathbf{R}}$ неперервне, $F = \overline{E} \cup \{a,b\}$, $G = X \setminus F$, $A = \{a_n : n \in \mathsf{N}\}$ − зліченна підмножина G, яка щільна в G, $a_k \neq a_j$ при $k \neq j$, $A_n = \{a_1, \ldots, a_n\}$, $F_n = F \cup A_n$, $\varphi(x) = f^x$, $\varphi_n = L_{F_n}\varphi$ і

$$f_n(x,y) = \varphi_n(x)(y),$$

якщо $(x,y) \in X \times Y$. Тоді $f_n \in C = C(X \times Y)$ для кожного n, $f_n|_{F \times Y} = f|_{F \times Y}$ і $f_n \to f$ у просторі $S = S(X \times Y)$, зокрема, $f \in \overline{C}^s$.

Доведення. Як і в [2, с. 155] легко перевірити, що звуження $f|_{\overline{E} \times Y}$ і $f|_{F \times Y}$ неперервні.

Доведемо неперервність відображень f_n.

Нехай $G = \coprod_{m \in M} I_m$, $I_m = (\alpha_m, \beta_m)$ і $M = \overline{1,l}$ або $M = \mathsf{N}$. Розглянемо множини $A_{m,n} = I_m \cap A_n$. Ясно, що

$$f_n(x,y) = (L_{A_{m,n}} f_y)(x),$$

якщо $(x,y)\in \overline{I}_m\times Y$. (Тут оператор $L_{A_{m,n}}$ застосовується до звуження $f_y|_{\overline{I}_m}$ функції f_y на відрізок $\overline{I}_m=[\alpha_m,\beta_m]$.) Тому неперервність звужень $f_n|_{\overline{I}_m\times Y}$ випливає з леми 1 в [3]. Звідси негайно виводиться неперервність f_n у кожній точці відкритої множини $G\times Y$. Для скінченної множини M неперервність f_n отримується з неперервності звужень $f|_{F\times Y}$, $f|_{\overline{I}_m\times Y}$, зображення $X\times Y=(F\times Y)\coprod\bigcup\limits_{m\in M}(\overline{I}_m\times Y)$ і того, що всі доданки у цьому зображенні замкнені.

Припустимо, що $M=\mathbb{N}$, візьмемо точку $p_0=(x_0,y_0)\in F\times Y$ і доведемо, що функція f_n неперервна в точці p_0. Нехай $\varepsilon>0$. З неперервності звуження $f|_{F\times Y}$ випливає, що існують число $\delta>0$ і окіл V точки y_0 в просторі Y, такі, що

$$|f_n(x,y)-f_n(x_0,y_0)|<\varepsilon,$$

як тільки $|x-x_0|<\delta$ і $y\in V$. Оскільки $\beta_m-\alpha_m\to 0$ при $m\to\infty$ і множина A_n скінченна, то існує такий номер m_0, що $\beta_m-\alpha_m<\frac{\delta}{2}$ і $A_{m,n}=\varnothing$ при $m>m_0$. Як і в доведенні теореми 1, розглянемо замкнену множину $F_0=F\cup\bigcup\limits_{m=1}^{m_0}\overline{I}_m$. Зрозуміло, що звуження $f_n|_{F_0\times Y}$ неперервні, адже всі звуження $f|_{F\times Y}$ і $f|_{\overline{I}_m\times Y}$ на замкнені множини $F\times Y$ і $\overline{I}_m\times Y$ неперервні. Тому існують число $\delta_0\in(0,\frac{\delta}{2})$ і окіл V_0 точки y_0 в Y, такі, що $V_0\subseteq V$ і

$$|f_n(x,y)-f_n(x_0,y_0)|<\varepsilon,$$

як тільки $(x,y)\in F_0\times Y$, $|x-x_0|<\delta_0$ і $y\in V_0$.

Нехай $x\in X\setminus F_0$, $|x-x_0|<\delta_0$ і $y\in V_0$. Оскільки $x\in X$ і $x\notin F_0$, то існує таке $m>m_0$, що $\alpha_m<x<\beta_m$. Як і в доведенні теореми 1, легко перевірити, що $x_0-\delta<\alpha_m<\beta_m<x_0+\delta$. Звідси випливає, що $|\alpha_m-x_0|<\delta$ і $|\beta_m-x_0|<\delta$. За побудовою $f_n(\alpha_m,y)=f(\alpha_m,y)$, $f_n(\beta_m,y)=f(\beta_m,y)$ і $f_n(x_0,y_0)=f(x_0,y_0)$ для довільного $y\in Y$, адже $\alpha_m,\beta_m,x_0\in F\subseteq F_n$. Оскільки при цьому $y\in V_0\subseteq V$, то

$$|f_n(\alpha_m,y)-f_n(x_0,y_0)|=|f(\alpha_m,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon$$

і

$$|f_n(\beta_m,y)-f_n(x_0,y_0)|=|f(\beta_m,y)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

Функція $(f_n)_y$ лінійна на відрізку $\overline{I}_m$, адже $A_{m,n} = \varnothing$. Тому число $f_n(x, y)$ лежить між числами $f_n(\alpha_m, y)$ і $f_n(\beta_m, y)$ і отже, $| f_n(x, y) - f_n(x_0, y_0)| < \varepsilon$. Таким чином, сукупна неперервність функції f_n доведена.

Відображення $\varphi : X \to C_p(Y)$ зі значеннями в топологічному векторному просторі $Z = C_p(Y)$ всіх неперервних функцій $g : Y \to \mathbf{R}$ з топологією поточкової збіжності неперервне, бо $f : X \times Y \to \mathbf{R}$ − нарізно неперервна функція. За твердженням а) теореми 2 ми будемо мати, що $\varphi_n = L_{F_n}\varphi \to \varphi$ на X у просторі Z. Оскільки функціонали $\delta_y(g) = g(y)$ лінійні і неперервні на Z для кожного $y \in Y$, то і $\delta_y \circ \varphi_n \to \delta_y \circ \varphi$ на X для кожного $y \in Y$, але

$$(\delta_y \circ \varphi_n)(x) = f_n(x, y) \quad i \quad (\delta_y \circ \varphi)(x) = f(x, y),$$

отже, $(f_n)_y$ рівномірно збігається до f_y на X для кожного $y \in Y$.

Далі розглянемо точку $x_0 \in G$. Оскільки $x_0 \notin E$, то $\{x_0\} \times Y \subseteq C(f)$. З компактності Y легко вивести, що тоді відображення $\varphi : X \to C_u(Y)$, де $C_u(Y)$ − банаховий простір неперервних функцій $g : Y \to \overline{\mathbf{R}}$ з рівномірною нормою $\|g\| = \max\limits_{y \in Y} | g(y)|$ буде неперервним у точці x_0. Тоді, використавши твердження б) теореми 2, ми отримаємо, що $\varphi_n(x_0) \to \varphi(x_0)$ у просторі $C_u(Y)$, а це означає, що $f_n^{x_0}$ рівномірно збігається до f^{x_0} на Y.

Нарешті, коли $x_0 \in F$, до $f_n^{x_0} = f^{x_0}$ для кожного n, отже, і тут $f_n^{x_0} \to f^{x_0}$ на X.

Таким чином, $f_n \to f$ в $S(X \times Y)$, $f \in \overline{C}^s$ і теорему доведено.

Література

1. Волошин Г.А. Топологізація простору нарізно неперервних функцій / Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко // Карп. мат. публ. − 2013. − **5**, №2. − С. 199-207.
2. Волошин Г.А. Про пошарово рівномірне наближення нарізно неперервних функцій многочленами / Г.А. Волошин, В.К. Маслючен-ко, О.В. Маслюченко // Мат. вісник НТШ. − 2013. − **10**. − С. 135-158.
3. Волошин Г.А. Про лінійну інтерполяцю векторнозначних функцій та її застосування / Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко // Математичні студії. − 2014. − **42**, №2. − С. 129-133.

4. Волошин Г.А. Вкладення простору нарізно неперервних функцій у добуток банахових просторів та його бочковість / Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, О.В. Маслюченко // Мат. вісник НТШ. 2014. − **11**. − С. 36-50.
5. Власюк Г.А. Многочлени Бернштейна і нарізно неперервні функції Г.А. Власюк, В.К. Маслюченко // Наук. вісник Чернівецького ун-ту. Математика. − Чернівці: Рута, 2007. − Вип. 336-337. – С. 52-59.
6. Волошин Г.А. Про наближення нарізно неперервних функцій, 2π -періодичних відносно другої змінної / Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко // Карп. мат. публ. − 2010. − **2**, №1. − С. 4-14.
7. Волошин Г.А. Про наближення нарізно і сукупно неперервних функцій / Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, О.В. Маслюченко // Карп. мат. публ. − 2010. − **2**, №2. − С. 11-21.
8. Волошин Г.А. Про апроксимацію відображень зі значеннями у просторі неперервних функцій / Г.А. Волошин, В.К. Маслюченко, О.Н. Нестеренко // Карп. мат. публ. − 2012. − **4**, №1. − С. 23-27.
9. Волошин Г.А. Нарізно неперервні відображення і теорія наближень / Г.А. Волошин // Дис. ... канд. фіз.-мат. наук: 01.01.01. − Чернівці, 2012. − 138 с.
10. Lebesgue H. Sur l'approximation des fonctions / H. Lebesgue // Bull. Sci. Math. − 1898. − 22 . − P. 278-287.
11. Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию / П.С. Александров. − М.: Наука, 1977. − 368 с.
12. Маслюченко В.К. Перші типи топологічних векторних просторів / В.К. Маслюченко. − Чернівці: Рута, 2002. − 72 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 21.04.2015 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Загороднюком А.В.,***
д.ф.-м.н., професором ***Никифорчиним О.Р.***

ON THE LINEAR INTERPOLATION OF VEKTORVALUED FUNCTIONS THAT KEEPS THE NARROWING

H. A. Voloshyn[1,2], V. K. Maslyuchenko[1]

[1] *Yuriy Fed'kovych Chernivtsi National University; 58012, Chernivtsi, Kotsjubynskyi Str., 2; e-mail: vmaslyuchenko@gmail.com*

[2] *Bukovinian State Financial and Economics University; 58012, Chernivtsi, Shterna Str., 1; e-mail: galja.vlshin@gmail.com*

We proved the general theorem on the approximation of vectorvalued functions, using the linear interpolation, which keeps the narrowing. Based on this theorem, we found that every separately continuous function $f : X\times Y \to \mathbf{R}$*, defined on the product of the segment* $X=[a,b]$ *and the* *compact space Y, belongs to the sequential closure of the space $C(X \times Y)$ of jointly continuous functions in the space $S(X\ timesY)$ of separately continuous functions with the topology of layers uniform convergence, in the case if the narrowing $F|_{E\times Y}$ is continuous where E is the projection $pr_X(D(f))$ of set of discontinuous points of f on the axis X.*

Key words: *ceparatly and in common continuous functions, secventsialne shorting, linear interpolation which keeps narrowing, topology of layer uniform convergence.*