Теорія ймовірностей та математична статистка

УДК 519.21

ГРАНИЧНІ ТЕОРЕМИ ДЛЯ КІЛЬКОСТІ ЧАСТИНОК, ЯКІ ЕМІГРУВАЛИ ІЗ СИСТЕМИ

І. Б. Базилевич, Х. М. Якимишин, Х. В. Пилипчук
Львівський національний університет імені Івана Франка;
79000, м. Львів, вул. Університетська 1;
e-mail: i_bazylevych@yahoo.com, yakymyshyn_hrystyna@ukr.net

У даній роботі доведено граничні теореми для кількості частинок, що емігрували, для однорідного гіллястого процесу з неперервним часом, еміграцією та міграцією.

Ключові слова: *гіллястий процес, еміграція, міграція, центральна гранична теореми, неперервний час.*

1. Гранична теорема для гіллястого процесу з еміграцією та неперервним часом.

Розглядаємо однорідний гіллястий процес з неперервним часом, одним типом частинок та еміграцією $\mu(t)$, де $\mu(t)$ позначає кількість частинок в системі в момент часу t. По аналогії з [3] (стор. 217) цей процес ми можемо подати як однорідний гіллястий процес з двома типами частинок T_1, T_2 Тут тип T_1 частинки в системі, T_2 частинки, які емігрували.

Багатотипний гіллястий процес задається перехідними ймовірностями при умові, що в початковий момент часу в системі є одна частинка j-го типу. У нашому випадку $j = 1,2$.

Якщо у системі є одна частинка, тобто одна частинка типу T_1, то вона за час t з ймовірністю $P_1(t)$ не здійснить жодного перетворення, з ймовірністю $P_k(t)$ перетвориться у k $(k = 0,2,3,4,...)$ частинок, з ймовірністю $R(t)$ емігрує, тобто перетвориться у одну частинку типу T_2. Причому

$$\sum_{k=0}^{\infty} P_k(t) + R(t) = 1. \quad (1)$$

Якщо у системі є одна частинка типу T_2, то вона може перетворитись лише у одну частинку свого типу. Тобто цей стан є поглинаючим.

У початковий момент часу кількість частинок типу T_1 дорівнює l, а кількість частинок типу T_2 дорівнює нулю. Після першого перетворення кількість частинок типу T_2, тобто кількість частинок, які емігрували, вже випадковий процес $\nu(t)$ і до моменту другого перетворення цей випадковий процес може набувати значення нуль або одиниця. Одиниця у випадку, якщо частинка емігрувала із системи, і нуль, якщо відбулась еволюція.

Введемо дві послідовності випадкових величин

$$\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots \tag{2}$$

$$\theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3, \ldots \tag{3}$$

Тут $\tau_1 = \theta_1$, τ_2 – час між першим і другим перетворенням, τ_3 – час між другим і третім перетворенням у системі і т.д., θ_1 – момент першого перетворення у системі, θ_2 – момент другого перетворення у системі, θ_3 – момент третього перетворення у системі і т.д.

Випадкові величини $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \ldots$ незалежні між собою.

θ_j, τ_k зв'язані між собою співвідношеннями:

$$\theta_1 = \tau_1, \theta_2 = \tau_1 + \tau_2, \theta_3 = \tau_1 + \tau_2 + \tau_3, \ldots \tag{4}$$

Також природно розглядати випадкову величину $N(t)$ – кількість перетворень у системі до моменту часу t. Відомо [2] (стор. 209), що $\{N(t) \ge n\} = \{\theta_n \le t\}$.

Введемо асимптотику перехідних ймовірностей при $\Delta t \downarrow 0$.

$$\begin{aligned} &P_1(\Delta t) = 1 + p_1 \Delta t + o(\Delta t); \\ &P_k(\Delta t) = p_k \Delta t + o(\Delta t), k = 0,2,3,\ldots; \\ &R(\Delta t) = r\Delta t + o(\Delta t); \end{aligned} \tag{5}$$

Причому, $\sum_{k=0}^{\infty} p_k + r = 0,\ p_1 \le 0,\ p_k \ge 0,\ k = 0,2,3,\ldots,\ r \ge 0.$ (6)

Теорема 1. Нехай $\nu(t)$ – кількість частинок, що емігрували для процесу $\mu(t)$ за період часу $[0, t)$, тоді при $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{ \frac{\nu(t) - M\nu(t)}{\sqrt{D\nu(t)}} < x \mid \mu(t) > 0 \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Доведення. У початковий момент часу жодна частинка ще не емігрувала, тому для випадкового процесу $\nu(t)$ отримуємо початкову умову

$$\nu(0)=0.$$

$\theta_1=\tau_1$ – момент першого перетворення процесу $\mu(t)$ у системі, $\theta_2=\tau_1+\tau_2$ –момент другого перетворення процесу $\mu(t)$, $\theta_n=\tau_1+\tau_2+...+\tau_n$ – момент n-го перетворення процесу $\mu(t)$.

Зазначимо, що моменти $\theta_1,\theta_2,\theta_3,...$ визначають також моменти, у які може відбуватись перетворення процес $\nu(t)$.

Ймовірність того, що довільна частинка емігрує при $t\to\infty$ задається асимптотикою $r\Delta t+o(\Delta t)$, тобто

$$P\{\nu(\Delta t)=1\,|\,\mu(0)=1\}=r\Delta t+o(\Delta t),$$

і відповідно,

$$P\{\nu(\Delta t)=0\,|\,\mu(0)=1\}=1-r\Delta t+o(\Delta t).$$

Як ми вже вказали, у початковий момент часу в системі є l частинок. Тому

$$P\{\nu(\Delta t)=1\,|\,\mu(0)=l\}=C_l^1(1+p_1\Delta t+o(\Delta t))^{l-1}(r\Delta t+o(\Delta t))=$$

$$=l(1+p_1\Delta t+o(\Delta t))^{l-1}(r\Delta t+o(\Delta t))=l(r\Delta t+o(\Delta t)),$$

$$P\{\nu(\Delta t)=0\,|\,\mu(0)=l\}=1-l(r\Delta t+o(\Delta t)).$$

Обчислимо ймовірність того, що частинка емігрує у момент часу $t=\tau_1$

$$P\{\nu(t+\Delta t)=1\,|\,\tau_1=t,\tau_2>\Delta t\}=$$

$$=\frac{l(r\Delta t+o(\Delta t))}{lr\Delta t+lp_0\Delta t+l\sum\limits_{k=0}^{\infty}p_k\Delta t+o(\Delta t)}=\frac{lr\Delta t+o(\Delta t)}{-lp_1\Delta t+o(\Delta t)}.$$

Спрямувавши $t\to\infty$, отримаємо

$$P\{\nu(t)=1\,|\,t\ge\tau_1,t<\tau_1+\tau_2\}=\frac{r}{-p_1}.$$

Очевидно, що

$$P\{\nu(t)=0\,|\,t\ge\tau_1,t<\tau_1+\tau_2\}=1-\frac{r}{-p_1}=1+\frac{r}{p_1}.$$

Зауважимо, що ймовірність того, що у системі в довільний момент часу $t\in(\theta_1,\theta_2]$ буде $l+k-1$ частинка, при умові, що в початковий момент часу було l частинок дорівнює

$$P\{\mu(t)=l+k-1\,|\,\mu(0)=l\}=\frac{p_l}{-p_1}.$$

Це пов’язано з тим, що згідно з означенням гіллястого процесу за час t [4] (стор. 117):

- не відбувається жодного перетворення з ймовірністю $1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$,

- відбудеться одне перетворення з ймовірністю $\lambda\Delta t + o(\Delta t)$,
- відбудеться більше одного перетворення з ймовірністю $o(\Delta t)$.

Перехідні ймовірності мають наступну асимптотику при $\Delta t \to 0$

$$P\{\mu(t+\Delta t) = m+k-1 \mid \mu(t) = m\} =$$
$$= mp_k \Delta t + o(\Delta t), k \geq 2,$$
$$P\{\mu(t+\Delta t) = m \mid \mu(t) = m\} = 1 + mp_1 \Delta t + o(\Delta t), \quad (7)$$
$$P\{\mu(t+\Delta t) = m-1 \mid \mu(t) = m\} = mp_0 \Delta t + o(\Delta t),$$
$$P\{\nu(t+\Delta t) = m+k-1 \mid \nu(t) = m\} = mr\Delta t + o(\Delta t),$$

де

$$\sum_{k=0}^{\infty} p_k + r = 0,\ p_1 \leq 0, p_k \geq 0, k = 0,2,3,\ldots, r \geq 0. \quad (8)$$

Тут $\lambda = -mp_1$.

Надалі позначатимемо $R = \dfrac{r}{-p_1}$.

Повертаємось до кількості частинок, що емігрували з системи. Як уже ми вказали, протягом часу $t \in [\theta_1, \theta_2)$ кількість частинок, що емігрували може дорівнювати 0 або 1 з ймовірностями $1 - R = 1 - \dfrac{r}{-p_1} = 1 + \dfrac{r}{p_1}$ та $R = \dfrac{r}{-p_1}$ відповідно.

У момент другого перетворення в системі емігрувати може лише одна частинка з ймовірністю

$$R = \frac{r}{-p_1}$$

та кількість емігрантів не зміниться з ймовірністю

$$1 - R = 1 + \frac{r}{p_1}.$$

Розглянемо випадкові величини X_1, X_2, що позначають кількості частинок, що емігрували у випадкові моменти часу τ_1, $\tau_1 + \tau_2$. Вони незалежні та мають однаковий біноміальний розподіл $Bi(1, R)$. Відомо, що випадкова величина $X_1 + X_2$ також має біноміальний розподіл, але вже з параметрами 2 та R.

Тому на проміжку часу $[\tau_1 + \tau_2, \tau_1 + \tau_2 + \tau_3]$ розподіл кількості частинок, які емігрували є наступний

$$P\{\nu(t) = k\} = C_2^k R^k (1-R)^{2-k}, k = 0,1,2.$$

Аналогічно ми можемо показати, що розподіл кількості частинок, які емігрували, на проміжку часу $[\tau_1 + \ldots + \tau_n, \tau_1 + \ldots + \tau_{n+1}]$ є біноміальним з параметрами n та R.

При $n \to \infty$ можна застосувати центральну граничну теорему для однаково розподілених незалежних випадкових величин [1] (стор. 175), згідно якої отримаємо

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\nu(t) - M\nu(t)}{\sqrt{D\nu(t)}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Залишилось показати, що при наших припущеннях кількість перетворень у системі прямує до нескінченності при $t \to \infty$ при умові, що процес не виродився.

Якщо у початковий момент часу у системі є l частинок, то ймовірність того, що кожна з них еволюціонує до часу t дорівнює $1 - e^{p_1 t}$ і відповідно ймовірність того, що перетворення кожної з частинок не відбудеться дорівнює $e^{p_1 t}$. Таким чином, ймовірність того, що до моменту часу t у системі не відбудеться перетворення дорівнює $e^{lp_1 t}$ і ймовірність того, що перетворення відбудеться відповідно дорівнює $1 - e^{lp_1 t}$.

Надалі вважатимемо, що у системі є випадкова кількість частинок.

Зауважимо, що для $m_1 > m_2 > 0$

$$1 - e^{m_1 p_1 t} > 1 - e^{m_2 p_1 t}.$$

Для того, щоб процес не виродився при умові, що в довільний момент часу може емігрувати одна частинка, у системі має бути принаймні дві частинки.

Тоді ймовірність того, що за час $[0, t)$ відбудеться перетворення, не менша від

$$P^* = 1 - e^{2p_1 t}.$$

Звідси випливає, що

$$P\{\tau_j > t\} \le e^{2p_1 t}, j = 1,2,...,$$

якщо $t \to \infty$.

Розглядаємо протилежну подію − кількість перетворень є скінченна при $t \to \infty$. Це означає, що принаймні одне з τ_j повинно прямувати до нескінченності. Але ця ймовірність не більша ніж $e^{2p_1 t}$, тобто,

$$P\{\tau_j > t\} \le e^{2p_1 t},$$

а величина $e^{2p_1 t}$ прямує до нуля при $t \to \infty$. Таким чином, ми отримали суперечність і з ймовірністю 1 кількість перетворень у системі при $t \to \infty$ прямує до нескінченності.

Теорему доведено.

2. Гранична теорема для гіллястого процесу з міграцією та неперервним часом

Далі ми досліджуємо процес з міграцією. Тобто у порівнянні з попереднім випадком, у довільний момент часу в систему можуть іммігрувати частинки. Тепер ми вже розглядаємо гіллястий процес з трьома типами частинок T_0, T_1, T_2. Типи T_1, T_2 вже описані при вивченні процесу з еміграцією. Переходимо до T_0. Вважаємо, що є одна частинка фіктивного типу T_0 і вона може перетворюватись в частинки типу T_1. Позначимо $G_k(t)$ ймовірність того, що за час t в систему іммігрує k частинок і задамо асимптотику при $t \to \infty$

$$G_0(t) = 1 + g_0\Delta t + o(\Delta t),$$

$$G_k(t) = g_k\Delta t + o(\Delta t), \quad k = 1,2,...,$$

$$g_0 \le 0, g_k \ge 0, k = 1,2,..., \sum_{n=0}^{\infty} g_n = 0. \tag{9}$$

Кількість частинок, які емігрували з системи за час t, ми позначатимемо $\nu(t)$.

Теорема 2. Розглядаємо гіллястий процес $\mu(t)$ з міграцією та неперервним часом. Припускаємо, що в початковий момент часу в системі було l частинок. Нехай виконуються умови (7), (8), (9). Тоді при $t \to \infty$

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{\frac{\nu(t) - M\nu(t)}{\sqrt{D\nu(t)}} < x \mid \mu(t) > 0\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}dt.$$

Доведення. При доведенні ми будемо використовувати всі позначення з попередньої теореми. Введемо новий випадковий процес $\eta(t)$. Тут $\eta(t)$ позначає кількість частинок, які іммігрували в систему в момент часу t, а $\eta[t;t+u)$ кількість частинок, які іммігрували в систему протягом часу $[t;t+u)$ $(t \ge 0, u > 0)$.

Нехай у системі в деякий момент часу t є m частинок.

За час Δt може відбутись одна з чотирьох несумісних подій:

- в системі не відбудеться перетворень;
- одна з частинок перетвориться в k частинок $(k = 0,2,3,...)$.
- одна частинка емігрує, тобто кількість емігрантів збільшиться на 1;
- в систему іммігрує n частинок.

Тоді ймовірність того, що протягом часу Δt не відбудеться перетворення, тобто жодна частинка в системі не еволюціонує і жодна з системи не емігрує, а також не відбудеться імміграція дорівнює

$$(1 + p_1\Delta t + o(\Delta t))^m (1 + g_0\Delta t + o(\Delta t)) = 1 + mp_1\Delta t + g_0\Delta t + o(\Delta t).$$

Ймовірність того, що одна частинка перетвориться в k частинок $(k = 0,2,3,...)$ дорівнює

$$P\{\mu(t+\Delta t) = m-1+k \mid \mu(t) = m\} =$$

$$= C_m^1(1+p_1\Delta t + o(\Delta t))^{m-1}(p_k\Delta t + o(\Delta t))(1+g_0\Delta t + o(\Delta t)).$$

Враховуючи, що

$$(1+p_1\Delta t + o(\Delta t))^{m-1} = 1+(m-1)p_1\Delta t + o(\Delta t),$$

отримаємо

$$P\{\mu(t+\Delta t) = m-1+k \mid \mu(t) = m\} = mp_k\Delta t + o(\Delta t).$$

Це означає, що довільна з m частинок перетворилась в k частинок $(k = 0,2,3,...)$, решта $m-1$ частинок в системі не мали перетворень, не було іммиграції і не відбулась еміграція.

Аналогічно, ймовірність того, що якась частинка емігрувала, тобто кількість емігрантів збільшилась на одиницю, визначається співвідношенням

$$P\{\nu(t+\Delta t) = a+1 \mid \nu(t) = a\} =$$

$$= m(1+(m-1)p_1\Delta t + o(\Delta t))(r\Delta t + o(\Delta t))(1+g_0\Delta t + o(\Delta t)) =$$

$$= mr\Delta t + o(\Delta t).$$

Ймовірність того, що в систему іммігрувало u частинок дорівнює

$$P\{\mu(t+\Delta t) = m+u \mid \nu(t) = m\} =$$

$$= (1+mp_1\Delta t + o(\Delta t))(g_u\Delta t + o(\Delta t)) = g_u\Delta t + o(\Delta t).$$

Знайдемо розподіл ймовірностей в момент перетворення в системі:

$$P\{\mu(t+\Delta t) = m-1+k \mid \mu(t) = m, \theta_j = t\} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{mp_k\Delta t + o(\Delta t)}{\sum_{u=1}^{\infty} g_u\Delta t + m\sum_{u=2}^{\infty} p_u\Delta t + (r+p_0)\Delta t + o(\Delta t)} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{mp_k\Delta t + o(\Delta t)}{-mp_1\Delta t - g_0\Delta t + o(\Delta t)} = \frac{mp_k}{-mp_1 - g_0}.$$

Ймовірність того, що під час перетворення системи частинка емігрує дорівнює

$$P\{\nu(t+\Delta t) = a+1 \mid \nu(t) = a, \theta_j = t\} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{mr\Delta t + o(\Delta t)}{\sum_{u=1}^{\infty} g_u\Delta t + m\sum_{u=2}^{\infty} p_u\Delta t + (r+p_0)\Delta t + o(\Delta t)} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{mr\Delta t + o(\Delta t)}{-mp_1\Delta t - g_0\Delta t + o(\Delta t)} = \frac{mr}{-mp_1 - g_0}.$$

А ймовірність того, що в систему іммігрувало n частинок дорівнює

$$P\{\mu(t+\Delta t)=m+n\,|\,\mu(t)=m,\theta_j=t\}=$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g_n\Delta t+o(\Delta t)}{\sum\limits_{u=1}^{\infty}g_u\Delta t+m\sum\limits_{u=2}^{\infty}p_u\Delta t+(r+p_0)\Delta t+o(\Delta t)}=$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g_n\Delta t+o(\Delta t)}{-mp_1\Delta t-g_0\Delta t+o(\Delta t)}=\frac{g_n}{-mp_1-g_0}.$$

Покажемо, що кількість перетворень в системі прямує до нескінченності при $t\to\infty$. Відомо [3] (стор. 28), що функція розподілу випадкової величини τ – момент першого перетворення, при умові, що в системі є одна частинка, має показниковий розподіл з параметром – p_1, тобто

$$P\{\tau>t\}=e^{p_1 t},\ \ t>0.$$

Аналогічно, ймовірність того, що протягом часу t в систему не іммігрує жодна частинка дорівнює

$$P\{\tau^*>t\}=e^{g_0 t},\quad t>0,$$

де τ^* – момент імміграції частинок в систему.

Нехай в момент часу t_0 у системі є n частинок. За формулою повної ймовірності ймовірність події A, яка полягає в тому, що за час t не відбудеться жодного перетворення у системі, тобто до моменту t_0+t, дорівнює

$$P(A)=\sum_{n=0}^{\infty}(P\{\tau>t\})^n P\{\tau^*>t\}P\{\mu(t_0)=n\}=$$
$$=e^{g_0 t}F_\mu(t,e^{p_1 t})\to 0,\quad t\to\infty,$$

де $F_\mu(t,s)$ – твірна функція процесу $\mu(t)$.

Покажемо, що кількість перетворень в системі прямує до нескінченості при $t\to\infty$. Припустимо протилежне, що кількість перетворень є скінченною і позначимо її N_0. Використаємо рівність $\{N(t)\ge n\}=\{\theta_n\le t\}$. Розглядаємо подію $\{\theta_{N_0}>t\}$, яка еквівалентна $\{\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_{N_0}>t\}$. Звідси легко бачити, що існує j $(1\le j\le N_0)$, таке що $\left\{\tau_j>\frac{t}{N_0}\right\}$.

Так як τ_j має показниковий розподіл з параметром λ_j, то $P\left\{\tau_j>\frac{t}{N_0}\right\}=e^{-\frac{\lambda_j t}{N_0}}$.

При $t \to \infty$ ця ймовірність прямує до нуля. Отже, кількість перетворень збігається за ймовірністю до нескінченості при $t \to \infty$.

Для випадку, коли ми розглядали процес тільки з еміграцією, ймовірність еміграції у момент перетворення в системі була сталою. При наявності імміграції вона вже залежить від кількості частинок у системі в момент перетворення.

Знайдемо граничну поведінку кількості частинок, які емігрували з системи. Насамперед зауважимо, що

$$\nu(t) = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_{N(t)},$$

де ξ_j – кількість частинок, які емігрували з системи в момент j-го перетворення. Очевидно, що випадкові величини ξ_j незалежні і можуть набувати одне з двох значень 0 або 1 з випадковою ймовірністю, яка залежить від кількості частинок, які перебули в системі в момент перетворення. Кількість перетворень у системі до моменту часу t – випадковий процес. Ми вже показали, що з ймовірністю 1 кількість перетворень у системі прямує до нескінченності при $t \to \infty$.

Застосовуємо центральну граничну теорему (теорема Ляпунова) [1] (ст. 177). Для кожного ξ_j математичне сподівання, дисперсія на треті моменти є скінченними, випадкові величини ξ_j незалежні між собою. Випадкові величини ξ_j мають біноміальний розподіл з параметрами 1 та $\dfrac{mr}{-mp_1 - g_0}$ при умові, що в момент перетворення в системі було m частинок. Покажемо, що виконується умова Ляпунова для цієї теореми

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} | M(\xi_k - M\xi_k)|^3}{B_n^3} = 0,$$

де

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} D\xi_k\ ,\ M\xi_k = 1 \cdot \frac{mr}{-mp_1 - g_0},\ D\xi_k = 1 \cdot \frac{mr}{-mp_1 - g_0}\left(1 - \frac{mr}{-mp_1 - g_0}\right)$$

при умові, що в момент перетворення в системі було m частинок.

Зауважимо, що $M(\xi_k - M\xi_k)^3 \le 1$, оскільки ξ_k може набувати значення 0 або 1. А з цього випливає, що $\sum_{k=1}^{n} M\,|\,\xi_k - M\xi_k\,|^3$ не перевищує n.

Розглянемо тепер дисперсію ξ_k. Зазначимо, що $D\xi_k = R_k(1 - R_k)$, де $R_k = \dfrac{m_k r}{-m_k p_1 - g_0}$, m_k $-$кількість частинок в системі перед k-тим перетворенням.

Дисперсія $D\xi_k$ набуває максимальне значення при $R_k = \dfrac{1}{2}$. Таким чином, отримаємо, що

$$R_k(1 - R_k) \le 0{,}25.$$

Оцінимо значення $D\xi_k$ знизу.

Нехай m_k $-$кількість частинок в системі в момент k-го перетворення, тоді

$$R_k = \frac{m_k r}{-m_k p_1 - g_0} = \frac{r}{-p_1 - \dfrac{g_0}{m_k}},$$

$$D\xi_k = R_k(1 - R_k) = \frac{m_k r}{-m_k p_1 - g_0}\left(1 - \frac{m_k r}{-m_k p_1 - g_0}\right) =$$

$$= \frac{r}{-p_1 - \dfrac{g_0}{m_k}}\left(1 - \frac{r}{-p_1 - \dfrac{g_0}{m_k}}\right).$$

Враховуючи, що найменше значення серед R_k отримаємо при $m_k = 1$, а найбільше при m_k прямуючому до нескінченності, ми отримаємо

$$\frac{r}{-p_1 - g_0} \le R_k < \frac{r}{-p_1}.$$

$D\xi_k$ буде найменшим, коли $|R_k - 1/2|$ прийме максимальне значення. Нехай

$$R_0 : |R_0 - 1/2| = \sup_k |R_k - 1/2|,\ D_{min} = R_0(1 - R_0).$$

Тоді

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} | M(\xi_k - M\xi_k)|^3}{B_n^3} \le \frac{\sum_{k=1}^{n} 1}{\left(\sum_{k=1}^{n} D\xi_k\right)^{3/2}} \le$$

$$\le \frac{n}{\left(\sum_{k=1}^{n} D_{min}\right)^{3/2}} = \frac{n}{n^{3/2} D_{min}^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{n} D_{min}^{3/2}}.$$

При $n \to \infty$ права частина прямує до нуля. Умова теореми Ляпунова виконується. Звідси випливає, що має місце центральна гранична теорема.

Теорему доведено.

Література

1. Гихман И.И. Теория вероятностей и математическая статистика. 2-е изд., перераб. и доп. / И.И. Гихман, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. – К.: Выща шк. Главное изд-во, 1988. – 439 с.
2. Теория вероятностей. Сборник задач / А.Я. Дороговцев, Д.С. Сильвестров, А.В. Скороход, М.И. Ядренко. – К.: Выща шк. Главное изд-во, 1980. – 432 с.
3. Севастьянов Б.А. Ветвящиеся процессы / Б.А. Севастьянов. – М.: Наука, 1971. – 436 с.
4. Харрис Т. Теория ветвящихся случайных процессов / Т. Харрис; Пер. с англ. Б.А. Севастьянова и В.П. Чистякова. – М.: Мир, 1966. – 355 с.

Стаття надійшла до редакційної колегії 14.06.2018 р.
Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором ***Слейком Я.І.,***
к.ф.-м.н., доцентом ***Осипчуком М.М.***

LIMIT THEOREMS FOR NUMBER OF PARTICLES WHICH EMIGRATED FROM THE SYSTEM

I. B. Bazylevysh, Kh. M. Yakymyshyn, Kh. V. Pylypchuk
Ivan Franko National University of Lviv;
79000, Lviv, Universytetska Str., 1;
e-mail: i_bazylevych@yahoo.com, yakymyshyn_hrystyna@ukr.net

In this paper, the limit theorems for the number of emigrated particles for a homogeneous branching process with continuous time, emigration, and migration are proved.

Key words: *branching process, emigration, migration, central limit theorem, continuous time.*