УДК 517.98

ДЕЯКІ ГЕОМЕТРИЧНІ КРИВІ У СЕНСІ $\mathbf{d}$-ВІДРІЗКА

С. І. Галущак
Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника; 76018, Івано-Франківськ, вул. Шевченка, 57;
тел. +380 (342) 59-60-50; e-mail: sv.halushchak@ukr.net

У статті побудовано деякі геометричні криві у сенсі d-відрізка у метричних просторах $\left(\mathrm{R}^2, d_1\right)$ та $\left(\mathrm{R}^2, d_\infty\right)$, а також розглянуто поняття d-опуклості, наведено приклади d-опуклих та слабко опуклих множин.

Ключові слова: *d-відрізок, метричний відрізок, d-опукла множина.*

Вступ

Метрична геометрія [1] – галузь геометрії, що характеризує та вивчає множини точок, базуючись лише на заданні значень попарних відстаней між ними. Її розвиток пов’язаний з іменами К. Менґера [2], Л. Блюменталя [3], Дж. Кріппена [4], Т. Гавела [4] та ін. Метрична геометрія має безпосереднє відношення до таких областей науки, як біологія, геодезія, картографія, фізика та ін. Тісно пов’язаними з нею є поняття метричного відрізка, d-відрізка та d-опуклості.

Множину тих точок метричного простору $\left(\mathrm{X}, d\right)$, які перетворюють нерівність трикутника у рівність називають *d-відрізком,* що з’єднує точки A та B. Поняття d-відрізка базується на так званих метрично проміжних точках та метричному відношенні “бути між”, що були вперше розглянуті Менґером [2] та Блюменталем [3] у контексті повних опуклих метричних просторів. У роботах [5] та [6] подано означення та геометричний опис d-відрізків у просторах Мінковського. Метою цієї статті є побудова деяких геометричних кривих, базуючись на їх метричних інваріантах. А саме, у метричних просторах $\left(\mathrm{R}^2, d_1\right)$ та $\left(\mathrm{R}^2, d_\infty\right)$ побудовано еліпс та гіперболу в сенсі d-відрізка.

Замінюючи в означенні опуклих множин звичайні лінійні відрізки на d-відрізки, приходимо до ідеї d-опуклих множин. Поняття d-опуклості як виду метричної опуклості було введено К. Петті [7] та незалежно Дж. де Ґрутом [8]. Основні результати про d-опуклі множини та їх властивості подано у [5] та [6]. У цій статті наведено деякі приклади d-опуклих та слабко опуклих множин.

Означення різних типів відрізків та зв'язки між ними

Нехай (X, d) – метричний простір і A, $B \in \mathsf{X}$ – довільні точки. Нагадаємо, що *лінійним відрізком*, що з'єднує точки A та B, є геометричне місце точок

$$[A,B]_l = \{(1-\alpha)A + \alpha B:\ 0 \le \alpha \le 1\}. \tag{1}$$

У цій статті ми розглядаємо інше поняття, так званого *d*-відрізка. Відомо, що у кожному метричному просторі виконується нерівність трикутника. Множину тих точок метричного простору (X, d), які перетворюють нерівність трикутника у рівність, називають d-*відрізком,* що з'єднує точки A та B, тобто

$$[A,B]_d = \{C \in \mathsf{X} : d(A,C) + d(C,B) = d(A,B)\}. \tag{2}$$

Підмножину $[A,B]_m \subset \mathsf{X}$ називають (див. [6], [9]) *метричним відрізком,* що з'єднує точки $A, B \in \mathsf{X}$, якщо існує лінійний відрізок $[A,B]_l$ та ізометрія $\gamma : [A,B]_l \to \mathsf{X}$ такі, що $\gamma([A,B]_l) = [A,B]_m$, $\gamma(A) = A$ та $\gamma(B) = B$.

Зауважимо, що для довільних точок $A, B \in \mathsf{X}$ виконується вкладення $[A,B]_m \subset [A,B]_d$. Іншими словами *d*-відрізок є сукупністю всіх метричних відрізків між заданими точками.

Нехай $x(x_1,\dots,x_d)$ та $y(y_1,\dots,y_d) \in \mathsf{R}^d$. Нагадаємо, що *метрика Мінковського* – це відстань на евклідовому просторі, яку задають за формулою

$$d_p(x,y) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{i=1}^{d} |x_i - y_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, & 1 \le p < \infty, \\ \max\limits_{1 \le i \le d} |x_i - y_i|, & p = \infty. \end{cases}$$

Нагадаємо, що еліпсом $E_{d,a}$ у метричному просторі (R^2, d_p) називають геометричне місце точок цього простору, для кожної з яких сума відстаней до фокусів F_1 та F_2 є сталою величиною, більшою за відстань між F_1 і F_2, тобто

$$E_{d,a} = \{C \in \mathsf{R}^2 : d_p(C,F_1) + d_p(C,F_2) = 2a\}, \tag{3}$$

причому $d_p(F_1,F_2) = 2d,\ a > d > 0$.

Гіперболою $H_{d,a}$ у метричному просторі (R^2, d_p) називають геометричне місце точок цього простору, абсолютна величина різниці відстаней від кожної з яких до фокусів F_1 та F_2 є сталою величиною, меншою за відстань між F_1 і F_2, тобто

$$H_{d,a} = \{C \in \mathsf{R}^2 : |d_p(C,F_1) - d_p(C,F_2)| = 2a\},$$

причому $d_p(F_1,F_2) = 2d,\ d > a > 0$.

Надалі ми будемо розглядати тільки метричні простори $\left(\mathsf{R}^2, d_1\right)$ та $\left(\mathsf{R}^2, d_\infty\right)$.

Лема 1. Для довільних точок A та B метричного простору $\left(\mathsf{R}^2, d_p\right)$, $p \geq 1$, виконується вкладення $[A,B]_l \subset [A,B]_d$.

Доведення. Нехай $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2) \in \mathsf{R}^2$. Якщо $C(x,y) \in [A,B]_l$, то згідно з означенням лінійного відрізка (1) координати точки C задовольняють систему рівнянь

$$\begin{cases} x = x_1 + \alpha(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + \alpha(y_2 - y_1), \end{cases} \qquad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

Покажемо, що точка $C(x, y)$ задовольняє рівність

$$d_p(A,C) + d_p(C,B) = d_p(A,B)$$

для довільного $p \geq 1$. Дійсно,

$$d_p(A,C) + d_p(C,B) =$$

$$= \left(\left|x_1 - (x_1 + \alpha(x_2 - x_1))\right|^p + \left|y_1 - (y_1 + \alpha(y_2 - y_1))\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} +$$

$$+ \left(\left|(x_1 + \alpha(x_2 - x_1)) - x_2\right|^p + \left|(y_1 + \alpha(y_2 - y_1)) - y_2\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \alpha\left(\left|x_2 - x_1\right|^p + \left|y_2 - y_1\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} + (1-\alpha)\left(\left|x_2 - x_1\right|^p + \left|y_2 - y_1\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left(\left|x_2 - x_1\right|^p + \left|y_2 - y_1\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = d_p(A, B).$$

Лему доведено.

Лема 2. Для довільних точок A та B метричного простору $\left(\mathsf{R}^2, d_2\right)$ виконується рівність $[A,B]_d = [A,B]_m = [A,B]_l$.

Доведення. З Леми 1 випливає, що нам достатньо показати правильність вкладення $[A,B]_d \subset [A,B]_l$ у просторі $\left(\mathsf{R}^2, d_2\right)$.

Нехай $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2) \in \mathsf{R}^2$ і $C(x,y) \in [A,B]_d$ – довільна точка. Доведемо, що тоді $C(x,y) \in [A,B]_l$. З означення d-відрізка випливає, що виконується рівність

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = \sqrt{(x - x_1)^2 + (y - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x)^2 + (y_2 - y)^2}. \quad (4)$$

Позначимо

$$a_i = |x - x_i|, \quad b_i = |y - y_i|, i = 1, 2. \quad (5)$$

Тоді

$$|x_2 - x_1| = |x_2 - x + x - x_1| \leq |x_2 - x| + |x - x_1| = a_2 + a_1.$$

Зауважимо, що різниці $x_2 - x$ та $x - x_1$ в останній формулі мають один знак, тому нерівність перетвориться у рівність. Таким чином маємо $a_1 + a_2 = |x_2 - x_1|$. Аналогічно доводимо, що $b_1 + b_2 = |y_2 - y_1|$. Тоді з формули (4) отримаємо рівність

$$\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} = \sqrt{a_1^{\,2} + b_1^{\,2}} + \sqrt{a_2^{\,2} + b_2^{\,2}}.$$

Піднісши до квадрату вирази в останній рівності та звівши подібні доданки, отримаємо

$$a_1 a_2 + b_1 b_2 = \sqrt{(a_1^{\,2} + b_1^{\,2})(a_2^{\,2} + b_2^{\,2})},$$

звідки отримуємо рівність

$$(a_1 a_2 + b_1 b_2)^2 = (a_1^{\,2} + b_1^{\,2})(a_2^{\,2} + b_2^{\,2}). \qquad (6)$$

Покажемо, що рівність (6) можлива тоді і тільки тоді, коли для деякого дійсного k виконуються умови

$$a_1 k = a_2, \qquad b_1 k = b_2. \qquad (7)$$

Очевидно, що з (7) випливає (6). Навпаки, якщо рівність (6) виконується, то квадратне рівняння

$$(a_1^{\,2} + b_1^{\,2})x^2 - 2(a_1 a_2 + b_1 b_2)x + a_2^{\,2} + b_2^{\,2} = 0 \qquad (8)$$

має єдиний розв’язок. Нехай цей розв’язок k. Легко бачити, що рівняння (8) можна записати у вигляді $(a_1 x - a_2)^2 + (b_1 x - b_2)^2 = 0$. Звідси випливають умови (7).

Отже, для виконання рівності (4) необхідно і достатньо, щоб координати (x, y) точки C задовольняли умови $|x - x_1|k = |x - x_2|$, $|y - y_1|k = |y - y_2|$ (див. формули (5) та (7)). Звідси отримаємо систему рівнянь

$$\begin{cases} x = x_1 + \dfrac{1}{k+1}(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + \dfrac{1}{k+1}(y_2 - y_1). \end{cases}$$

Позначимо $\alpha = \dfrac{1}{k+1}$. Очевидно, що $0 \le \alpha \le 1$. Отже, точка $C(x, y)$ належить лінійному відрізку $[A, B]_l$. Лему доведено.

Основні результати

Побудуємо деякі геометричні криві у сенсі d-відрізка у метричних просторах (R^2, d_1) та (R^2, d_∞). Доведення наступних теорем ґрунтуються на зведенні до систем алгебраїчних рівнянь та відповідних геометричних побудовах. Для уникнення громіздкості матеріалу ми, для прикладу, доведемо лише теореми 1 та 3, решту залишаємо читачеві.

Теорема 1. Нехай $A(x_1, y_1)$ та $B(x_2, y_2)$ – точки площини R^2. У метричному просторі (R^2, d_1) d-відрізок $[A, B]_d$ є прямокутником у звичайному геометричному сенсі з вершинами у точках $A(x_1, y_1)$, $F(x_1, y_2)$, $B(x_2, y_2)$, $D(x_2, y_1)$ і сторонами, паралельними до осей координат (рис. 1).

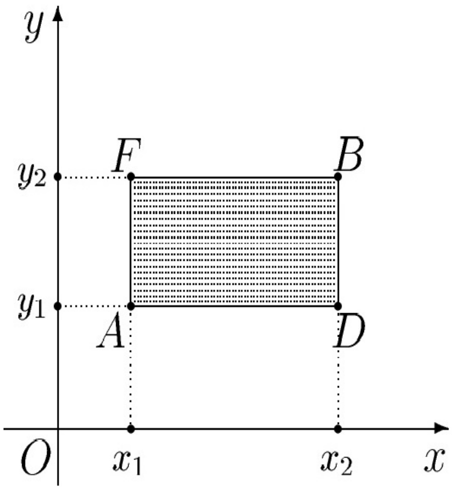


Рис. 1

Доведення. Нехай $d_1(A, B) = a$, $a > 0$. Без обмеження загальності можемо вважати, що точки A та B лежать у першому квадранті, причому $x_1 < x_2$, $y_1 < y_2$. Тоді згідно з означеннями d-відрізка (2) та метрики d_1 маємо

$$[A, B]_d = \{C(x, y) \in \mathrm{R}^2 : |x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = a\}.$$

Знайдемо координати $(x, y) \in \mathrm{R}^2$, що задовольнять рівність

$$|x - x_1| + |y - y_1| + |x - x_2| + |y - y_2| = a,$$

яка, як легко переконатися, рівносильна сукупності дев'яти систем:

$$\begin{cases} x \le x_1, \\ y \le y_1, \\ y = -x + \dfrac{x_1 + y_1 + x_2 + y_2 - a}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \le x_1, \\ y_1 \le y \le y_2, \\ x = \dfrac{x_1 + x_2 - y_1 + y_2 - a}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \le x_1, \\ y \ge y_2, \\ y = x + \dfrac{a - x_1 + y_1 - x_2 + y_2}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \le x \le x_2, \\ y \le y_1, \\ y = \dfrac{y_1 + x_2 + y_2 - x_1 - a}{2}, \end{cases}$$

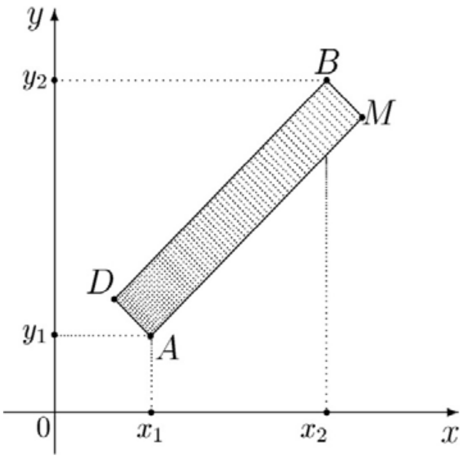
$$\begin{cases} x_1 \le x \le x_2, \\ y_1 \le y \le y_2, \\ x_2 + y_2 - x_1 - y_1 = a, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 \le x \le x_2, \\ y \ge y_2, \\ y = \dfrac{a + x_1 + y_1 - x_2 + y_2}{2}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge x_2, \\ y \le y_1, \\ y = x + \dfrac{y_1 - a - x_1 - x_2 + y_2}{2}, \end{cases} \qquad \begin{cases} x \ge x_2, \\ y_1 \le y \le y_2, \\ x = \dfrac{a + x_1 + y_1 + x_2 - y_2}{2}, \end{cases}$$

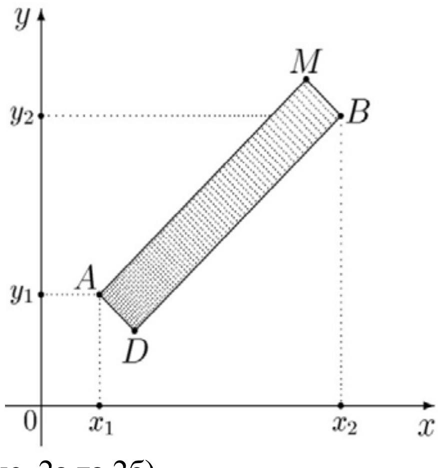
$$\begin{cases} x \ge x_2, \\ y \ge y_2, \\ y = -x + \dfrac{a + x_1 + y_1 + x_2 + y_2}{2}. \end{cases}$$

Виконавши побудову, отримаємо вказаний в умові теореми прямокутник. Теорему доведено.

Теорема 2. Нехай $A(x_1, y_1)$ та $B(x_2, y_2)$ –точки площини R^2. У метричному просторі (R^2, d_∞) d-відрізок $[A, B]_d$ є прямокутником у звичайному геометричному сенсі (рис. 2а та 2б).



а) випадок $|y_2 - y_1| > |x_2 - x_1|$

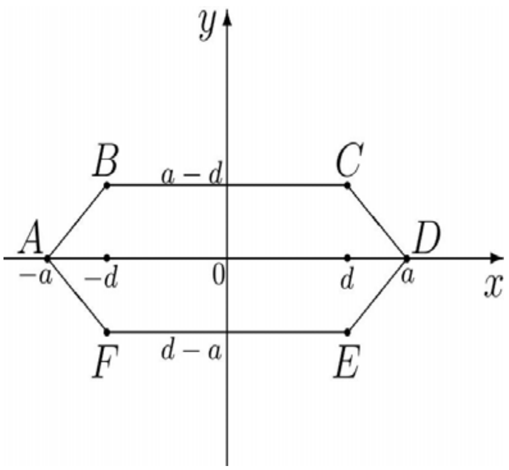


б) випадок $|x_2 - x_1| > |y_2 - y_1|$

Рис. 2

Зауваження 1. Для того, щоб побудувати d-відрізок, що з'єднує точки A та B у метричному просторі (R^2, d_∞), достатньо провести через ці точки прямі, які перетинають вісь абсцис під кутом 45°. Потім до побудованих ліній через точки A та B відповідно потрібно провести перпендикулярні прямі. Прямокутник, утворений перетином усіх намальованих ліній, і є шуканим d -відрізком $[A,B]_d$.

Теорема 3. Еліпс $E_{d,a}$ у метричному просторі $\left(\mathsf{R}^2, d_1\right)$ є шестикутником у звичайному геометричному сенсі з вершинами у точках $A(-a,0)$, $B(-d,a-d)$, $C(d,a-d)$, $D(a,0)$, $E(d,d-a)$, $F(-d,d-a)$ (рис. 3).



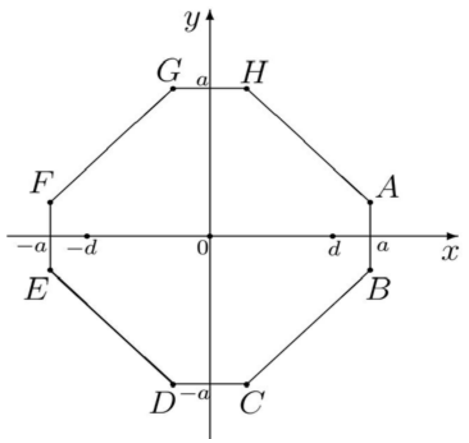


Рис. 3 Рис. 4

Доведення. Зафіксуємо точки $F_1(d,0)$ та $F_2(-d,0)$ – фокуси еліпса $E_{d,a}$, $d>0$. Тоді згідно з означеннями еліпса (3) та метрики d_1 маємо

$$E_{d,a}=\left\{C(x,y)\in\mathsf{R}^2:|x-d|+2|y|+|x+d|=2a\right\}.$$

Знайдемо координати $(x,y)\in\mathsf{R}^2$, що задовольнять рівність

$$|x-d|+2|y|+|x+d|=2a,$$

яка, як легко переконатися, рівносильна сукупності шести систем:

$$\begin{cases} y\le 0, \\ x\le -d, \\ y=-a-x, \end{cases} \qquad \begin{cases} y\le 0, \\ -d\le x\le d, \\ y=d-a, \end{cases} \qquad \begin{cases} y\le 0, \\ x\ge d, \\ y=x-a, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y\ge 0, \\ x\le -d, \\ y=a+x, \end{cases} \qquad \begin{cases} y\ge 0, \\ -d\le x\le d, \\ y=a-d\ , \end{cases} \qquad \begin{cases} y\ge 0, \\ x\ge d, \\ y=a-x. \end{cases}$$

Виконавши побудову, отримаємо вказаний в умові теореми шестикутник. Теорему доведено.

Зауваження 2. Якщо фокуси еліпса $E_{d,a}$ співпадають, то еліпс стає колом у метричному просторі $\left(\mathsf{R}^2, d_1\right)$ (рис. 5).

Теорема 4. Еліпс $E_{d,a}$ у метричному просторі (R^2, d_∞) є восьмикутником у звичайному геометричному сенсі з вершинами у точках $A(a, a-d)$, $B(a, d-a)$, $C(a-d, -a)$, $D(d-a, -a)$, $E(-a, d-a)$, $F(-a, a-d)$, $G(d-a, a)$, $H(a-d, a)$ (див. рис. 4).

Зауваження 3. Якщо фокуси еліпса $E_{d,a}$ співпадають, то еліпс стає колом у метричному просторі (R^2, d_∞) (рис. 6).

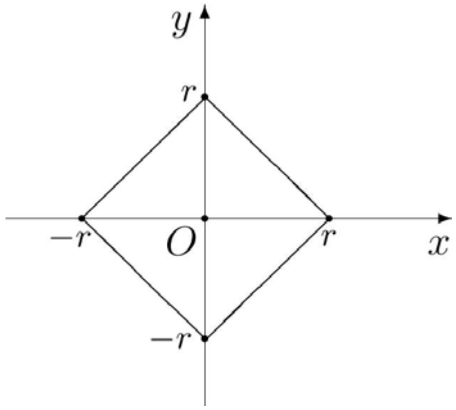


Рис. 5

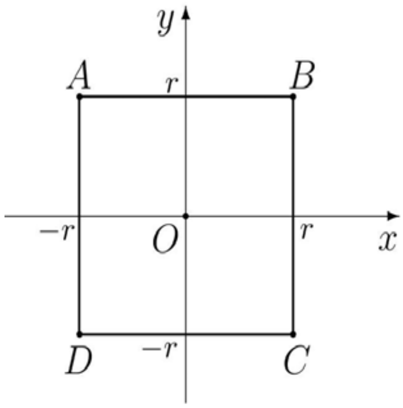


Рис. 6

Теорема 5. Гіпербола $H_{d,a}$ у метричному просторі (R^2, d_1) – це дві паралельні прямі $x = a$ та $x = -a$ у звичайному геометричному сенсі (рис. 7).

Теорема 6. Гіпербола $H_{d,a}$ у метричному просторі (R^2, d_∞) – це дві ламані, зображені на рис. 8, з вершинами у точках $A(a, d-a)$, $B(a, a-d)$, $C(-a, a-d)$, $D(-a, d-a)$.

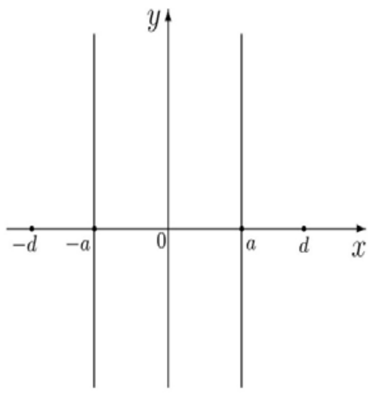


Рис. 7

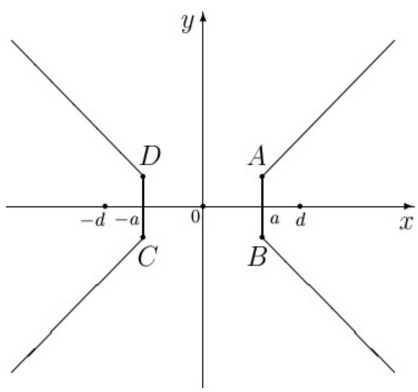


Рис. 8

Звичайне означення лінійної опуклості не може бути застосованим у випадку загальних метричних просторів. Таким чином виникає поняття так званої d-опуклості. Використовуючи поняття d-відрізка, можна дати означення d-опуклих множин наступним чином.

Множину $M \subset (\mathsf{X}, d)$ називають *d-опуклою*, якщо для довільних точок $A, B \in M$ виконується вкладення $[A, B]_d \subseteq M$. Прикладами d-опуклих множин у просторах (R^2, d_1) та (R^2, d_∞) є відповідні d-відрізки, а також множини, що утворюються з них шляхом «відкидання» однієї чи декількох їх сторін. З Леми 1 випливає, що кожна d-опукла множина є лінійно опуклою, але не навпаки. Наприклад, внутрішності усіх правильних багатокутників у звичайному геометричному сенсі є лінійно опуклими множинами, але не є d-опуклими.

Множину $M \subset (\mathsf{X}, d)$ називають *слабко опуклою* [9], якщо для довільних точок $A, B \in M$ існує метричний відрізок $[A, B]_m$ такий, що має місце вкладення $[A, B]_m \subseteq M$.

Оскільки для довільних точок $A, B \in (\mathsf{X}, d)$ виконується вкладення $[A, B]_m \subset [A, B]_d$, то кожна d-опукла множина є слабко опуклою, але не навпаки. Так, наприклад, внутрішності кіл та еліпсів у метричних просторах (R^2, d_1) та (R^2, d_∞) є слабко опуклими множинами, але не є d-опуклими.

Література

1. Distance Geometry: Theory, Methods and Applications / A.Mucherino, C.Lavor, L.Liberty, N.Maculan // Springer. – 2013.
2. Menger K. Untersuchungen uber allgemeine Metric / K.Menger // Math. Ann. – 1928. – P. 75-163.
3. Blumenthal L. Theory and applications of distance geometry, 2nd ed. / L.Blumenthal // Chelsea Publishing Company – 1970. – P. 347.
4. Crippen G.M. Distance Geometry and Molecular Conformation / G.M.Crippen, T.F.Havel// John Wiley and Sons. – 1988.
5. Boltjanskij V. Excursion into combinatorial geometry/ V.Boltjanskij, H.Martini and P.Soltan // Springer-Verlag.– 1997.
6. Martini H. The Geometry of Minkowski Spaces – A Survey. Part II / H.Martini and K.J.Swanepoel // Expo. Math. – 2004. – V.22. – P. 93-144.
7. Petty C.M. On the geometry of the Minkowski plane / C.M.Petty // Riv. Math. Univ. Parma 6. – 1955. – P. 269-292.
8. Groot De J. Some special metrics in general topology / J. De Groot // Colloq. Math. 6. – 1958. – P. 283-286.
9. Maragos P. Mathematical Morphology and Its Application to Image and Signal Processing / P.Maragos, R.W.Schafer, M.A.Butt // Kluwer Academic Publishers. – 1996.

Стаття надійшла до редакційної колегії 19.02.2016 р.

*Рекомендовано до друку д.ф.-м.н., професором **Загороднюком А.В.**,*
*к.ф.-м.н., доцентом **Шариним С.В.***

SOME GEOMETRIC CURVES IN THE SENSE OF D-SEGMENT

S. I. Halushchak
Vasyl Stefanyk Precarpathian National University;
76018, Ivano-Frankivsk, Shevchenko str., 57;
ph. +380 (342) 59-60-50; e-mail: sv.halushchak@ukr.net

We have constructed some geometric curves in the sense of d-segment in metric spaces $(\mathbb{R}^2, d_1)$ and $(\mathbb{R}^2, d_\infty)$. The notion of d-convexity as well as examples of d-convex and weakly convex sets are also considered.

Key words: *d-segment, metric segment, d-convexity.*